



EDISI REVISI 2017

Buku Guru

# Matematika



SMA/MA/  
SMK/MAK

KELAS

# XI

Hak Cipta © 2017 pada Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan  
Dilindungi Undang-Undang

**Disclaimer:** Buku ini merupakan buku guru yang dipersiapkan Pemerintah dalam rangka implementasi Kurikulum 2013. Buku guru ini disusun dan ditelaah oleh berbagai pihak di bawah koordinasi Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, dan dipergunakan dalam tahap awal penerapan Kurikulum 2013. Buku ini merupakan “dokumen hidup” yang senantiasa diperbaiki, diperbaharui, dan dimutakhirkan sesuai dengan dinamika kebutuhan dan perubahan zaman. Masukan dari berbagai kalangan yang dialamatkan kepada penulis dan laman <http://buku.kemdikbud.go.id> atau melalui email [buku@kemdikbud.go.id](mailto:buku@kemdikbud.go.id) diharapkan dapat meningkatkan kualitas buku ini.

*Katalog Dalam Terbitan (KDT)*

Indonesia. Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.  
Matematika: buku guru/ Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.-- . Edisi Revisi  
Jakarta : Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, 2017.  
xxii, 226 hlm. : illus. ; 25 cm.

Untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas XI  
ISBN 978-602-427-118-3 (jilid lengkap)  
ISBN 978-602-427-120-6 (jilid 2)

1. Matematika — Studi dan Pengajaran	I. Judul
II. Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan	

510

Penulis : Sudianto Manullang, Andri Kristianto S., Tri Andri Hutapea,  
Lasker Pangarapan Sinaga, Bornok Sinaga, Mangaratua  
Marianus S., Pardomuan N. J. M. Sinambela,  
Penelaah : Agung Lukito, Muhammad Darwis M., Turmudi, Nanang  
Priatna,  
Pereview : Sri Mulyaningsih  
Penyelia Penerbitan : Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Balitbang, Kemendikbud.

Cetakan Ke-1, 2014 ISBN 978-602-282-028-4 (Jilid 2)  
Cetakan Ke-2, 2017 (Edisi Revisi)  
Disusun dengan huruf Times New Roman, 12 pt.



## Kata Pengantar

Bapak/Ibu guru kami yang terhormat, banyak hal yang sudah kita lakukan sebagai usaha membelajarkan peserta didik dengan harapan, mereka berketuhanan, berperikemanusiaan, berpengetahuan, dan berketerampilan melalui pendidikan matematika. Harapan dan tugas mulia ini cukup berat, menuntut tanggung jawab yang tidak habis-habisnya dari generasi ke generasi. Banyak masalah pembelajaran matematika yang kita hadapi, bagaikan menelusuri sebuah lingkaran dengan titik-titik masalah yang tak berhingga banyaknya. Tokoh pendidikan matematika Soedjadi dan Yansen Marpaung menyatakan, kita harus berani memilih/menetapkan tindakan dan menghadapi resiko untuk meningkatkan kualitas pendidikan matematika di setiap sekolah tempat guru melaksanakan tugas profesionalitasnya. Artinya, guru sebagai orang yang pertama dan yang utama bertindak sebagai pengembang kurikulum yang mengenal karakteristik siswa dengan baik, dituntut bekerja sama memikirkan jalan keluar permasalahan yang terjadi. Guru diharapkan dapat menemukan pola pembelajaran yang sesuai dengan karakteristik matematika dan karakteristik peserta didik di sekolah.

Salah satu alternatif, kita akan mengembangkan pembelajaran matematika berbasis paham konstruktivisme. Buah pikiran ini didasari prinsip bahwa: (1) setiap anak lahir di bumi, mereka telah memiliki potensi, (2) cara berpikir, bertindak, dan persepsi setiap orang dipengaruhi budaya, (3) matematika adalah produk budaya, yaitu hasil konstruksi sosial dan sebagai alat penyelesaian masalah kehidupan, dan (4) matematika adalah hasil abstraksi pikiran manusia. Untuk itu diperlukan perangkat pembelajaran, media pembelajaran, asesmen autentik dalam pelaksanaan proses pembelajaran di kelas.

Model pembelajaran yang menganut paham konstruktivistik yang relevan dengan karakteristik matematika dan tujuan pembelajaran matematika cukup banyak, seperti (1) model pembelajaran berbasis masalah, (2) pembelajaran kontekstual, (3) pembelajaran kooperatif dan banyak model pembelajaran lainnya. Bapak/Ibu dapat mempelajarinya secara mendalam melalui aneka sumber pembelajaran.



Pokok bahasan yang dikaji dalam buku petunjuk guru ini, antara lain: (1) Induksi Matematika, (2) Program Linear, (3) Matriks, (4) Transformasi, (5) Barisan, (6) Limit Fungsi, (7) Turunan, dan (8) Integral. Berbagai konsep, aturan, dan sifat-sifat dalam matematika ditemukan melalui penyelesaian masalah nyata, media pembelajaran, yang terkait dengan materi yang diajarkan. Seluruh materi yang diajarkan berorientasi pada pencapaian kompetensi yang ditetapkan dalam Kurikulum 2013. Semua petunjuk yang diberikan dalam buku ini hanyalah pokok-pokoknya saja. Oleh karena itu, Bapak dan Ibu guru dapat mengembangkan dan menyesuaikan dengan keadaan dan suasana kelas saat pembelajaran berlangsung.

Akhirnya, tidak ada gading yang tak retak. Rendahnya kualitas pendidikan matematika adalah masalah kita bersama. Kita telah diberi talenta yang beragam, seberapa besar buahnya yang dapat kita persembahkan padanya. Taburlah rotimu di lautan tanpa batas, percayalah kamu akan mendapat roti sebanyak pasir di tepi pantai. Mari kita lakukan tugas mulia ini sebaik-baiknya, semoga buku petunjuk guru ini dapat digunakan dan bermanfaat dalam pelaksanaan proses pembelajaran matematika di sekolah.

Jakarta, Januari 2017

Tim Penulis,



## Daftar Isi

<b>Kata Pengantar</b> .....	<b>iii</b>
<b>Daftar Isi</b> .....	<b>v</b>
<b>Petunjuk Penggunaan Buku Guru</b> .....	<b>ix</b>
<b>Pedoman Penyusunan Rencana Pembelajaran</b> .....	<b>xv</b>
<b>Fase Konstruksi Matematika</b> .....	<b>xviii</b>
<b>Bab 1 Induksi Matematika</b> .....	<b>1</b>
A. Kompetensi Inti .....	1
B. Kompetensi Dasar dan Indikator .....	2
C. Tujuan Pembelajaran .....	3
D. Diagram Alir .....	4
E. Proses Pembelajaran .....	5
1.1 Memahami Prinsip Induksi Matematika .....	5
1.2 Bentuk-Bentuk Penerapan Prinsip Induksi Matematika .....	10
F. Penilaian .....	12
G. Pengayaan .....	15
H. Remedial .....	15
<b>Bab 2 Program Linear</b> .....	<b>17</b>
A. Kompetensi Inti .....	17
B. Kompetensi Dasar dan Indikator .....	18
C. Tujuan Pembelajaran .....	20
D. Diagram Alir .....	21
E. Proses Pembelajaran .....	22
2.1 Pertidaksamaan Linear Dua Variabel .....	22
2.2 Program Linear .....	27
2.3 Nilai Optimum dengan Garis Selidik .....	33
2.4 Beberapa Kasus Daerah Penyelesaian .....	39
F. Penilaian .....	41
G. Pengayaan .....	44



H. Remedial .....	44
I. Kegiatan Proyek .....	45
J. Rangkuman .....	46
<b>Bab 3 Matriks .....</b>	<b>47</b>
A. Kompetensi Inti .....	47
B. Kompetensi Dasar dan Indikator .....	47
C. Tujuan Pembelajaran .....	48
D. Diagram Alir .....	49
E. Proses Pembelajaran .....	50
3.1 Membangun Konsep Matriks .....	50
3.2 Jenis-Jenis Matriks .....	53
3.3 Kesamaan Matriks .....	54
3.4 Operasi pada Matriks.....	57
3.5 Determinan dan Invers Matriks .....	64
F. Penilaian .....	67
G. Pengayaan .....	70
H. Remedial .....	70
I. Penyelesaian Soal-Soal Uji Kompetensi .....	70
J. Rangkuman .....	72
<b>Bab 4 Transformasi .....</b>	<b>73</b>
A. Kompetensi Inti .....	73
B. Kompetensi Dasar dan Indikator .....	73
C. Tujuan Pembelajaran .....	75
D. Diagram Alir .....	76
E. Proses Pembelajaran .....	77
4.1 Menemukan Konsep Translasi (Pergeseran) .....	77
4.2 Menemukan Konsep Refleksi (Pencerminan) .....	81
4.3 Menemukan Konsep Rotasi (Perputaran) .....	92
4.4 Menemukan Konsep Dilatasi (Perkalian) .....	94
4.5 Komposisi Transformasi.....	98
F. Penilaian .....	101
G. Pengayaan .....	104
H. Remedial .....	105
I. Rangkuman .....	106



<b>Bab 5 Barisan</b> .....	109
A. Kompetensi Inti .....	109
B. Kompetensi Dasar dan Indikator .....	110
C. Tujuan Pembelajaran .....	110
D. Diagram Alir .....	112
E. Proses Pembelajaran .....	113
5.1, 5.2 Membangun Konsep Barisan dan Barisan Aritmetika .....	113
5.3 Menemukan Konsep Barisan Geometri .....	119
5.4 Aplikasi Barisan .....	125
F. Penilaian .....	128
G. Pengayaan .....	131
H. Remedial .....	132
I. Rangkuman .....	132
<b>Bab 6 Limit Fungsi</b> .....	133
A. Kompetensi Inti .....	133
B. Kompetensi Dasar dan Indikator .....	134
C. Tujuan Pembelajaran .....	135
D. Diagram Alir .....	136
E. Proses Pembelajaran .....	137
6.1 Konsep Limit Fungsi .....	137
6.2 Sifat-Sifat Limit Fungsi .....	143
6.3 Menentukan Nilai Limit Fungsi .....	147
F. Penilaian .....	151
G. Pengayaan .....	154
H. Remedial .....	155
I. Rangkuman .....	156
<b>Bab 7 Turunan</b> .....	157
A. Kompetensi Inti .....	157
B. Kompetensi Dasar dan Indikator .....	158
C. Tujuan Pembelajaran .....	160
D. Diagram Alir .....	161
E. Proses Pembelajaran .....	162
7.1 Menemukan Konsep Turunan Suatu Fungsi .....	162
7.2 Turunan Fungsi Aljabar .....	168
7.3 Aplikasi Turunan .....	173
7.4 Menggambar Grafik Fungsi .....	181



F. Penilaian .....	185
G. Pengayaan .....	189
H. Remedial .....	190
I. Rangkuman .....	190
<b>Bab 8 Integral .....</b>	<b>193</b>
A. Kompetensi Inti .....	193
B. Kompetensi Dasar dan Indikator .....	194
C. Tujuan Pembelajaran .....	195
D. Diagram Alir .....	196
E. Proses Pembelajaran .....	197
8.1 Menemukan Konsep Integral Tak Tentu sebagai Kebalikan dari Turunan Fungsi .....	197
8.2 Notasi Integral .....	201
8.3 Rumus Dasar dan Sifat Dasar Integral Tak Tentu .....	202
F. Penilaian .....	206
G. Pengayaan .....	210
H. Remedial .....	211
I. Rangkuman .....	212
<b>Daftar Pustaka .....</b>	<b>213</b>
<b>Profil Penulis .....</b>	<b>215</b>
<b>Profil Penelaah .....</b>	<b>222</b>
<b>Profil Editor .....</b>	<b>213</b>



## Petunjuk Penggunaan Buku Guru

Dalam bagian ini diuraikan hal-hal penting yang perlu diikuti guru, saat guru menggunakan buku ini. Hal-hal esensial yang dijabarkan, antara lain: (1) pentingnya guru memahami model pembelajaran berbasis konstruktivis dengan pendekatan *scientific learning* terkait sintaksis model pembelajaran yang diterapkan, sistem sosial, prinsip reaksi pengelolaan (perilaku guru mengajar di kelas), sistem pendukung pembelajaran yang harus dipersiapkan (berbagai fasilitas, misalnya buku siswa, lembar aktivitas siswa, media pembelajaran, instrumen penilaian, tugas-tugas yang akan diberikan), serta dampak instruksional dan dampak pengiring (sikap) yang harus dicapai melalui proses pembelajaran; (2) mengorganisir siswa belajar (di dalam dan luar kelas) dalam memberi kesempatan mengamati data, informasi, dan masalah, kerja kelompok dalam memecahkan masalah, memberi bantuan jalan keluar bagi siswa; (3) memilih model, strategi, dan metode pembelajaran untuk tujuan pembelajaran yang efektif; (4) memilih sumber belajar yang melibatkan partisipasi aktif siswa dalam proses pembelajaran yang dipicu melalui pengajuan masalah, pemberian tugas produk, proyek; (5) petunjuk penggunaan asesmen autentik untuk mengecek keberhasilan aspek sikap, pengetahuan, dan keterampilan; (6) petunjuk pelaksanaan remedial dan pemberian pengayaan.

### A. Model dan Metode Pembelajaran Berbasis Konstruktivistik dengan Pendekatan *Scientific Learning*

Model pembelajaran yang diterapkan dalam buku ini, dilandasi teori pembelajaran yang menganut paham konstruktivistik, seperti *Project-Based Learning*, *Problem-Based Learning*, dan *Discovery Learning* dengan pendekatan *scientific learning* melalui proses mengamati, menanya, menalar, mencoba, membangun jejaring dan mengomunikasikan berbagai informasi terkait pemecahan masalah *real world*, analisis data, dan menarik kesimpulan. Proses pembelajaran memberi perhatian pada aspek-aspek kognisi dan mengangkat berbagai masalah *real world* yang sangat mempengaruhi aktifitas dan perkembangan mental siswa selama proses pembelajaran dengan prinsip bahwa, (1) setiap anak lahir, tumbuh dan berkembang dalam matriks sosial tertentu dan telah memiliki potensi, (2) cara berpikir, bertindak, dan persepsi setiap orang dipengaruhi nilai budayanya, (3) matematika adalah hasil konstruksi sosial dan sebagai alat penyelesaian masalah kehidupan, dan (4) matematika adalah hasil abstraksi pikiran manusia.

Metode pembelajaran yang diterapkan, antara lain: metode penemuan, pemecahan masalah, tanya-jawab, diskusi dalam kelompok heterogen, pemberian tugas produk, unjuk kerja, dan proyek. Pembelajaran matematika yang diharapkan dalam praktek pembelajaran di kelas adalah (1) pembelajaran berpusat pada aktivitas siswa, (2) siswa diberi kebebasan berpikir memahami masalah, membangun strategi penyelesaian masalah, mengajukan ide-ide secara bebas dan terbuka, (3) guru melatih dan membimbing siswa berpikir kritis dan



kreatif dalam menyelesaikan masalah, (4) upaya guru mengorganisasikan adalah dengan bekerja sama dalam kelompok belajar, melatih siswa berkomunikasi menggunakan grafik, diagram, skema, dan variabel, (5) seluruh hasil kerja selalu dipresentasikan di depan kelas untuk menemukan berbagai konsep, hasil penyelesaian masalah, aturan matematika yang ditemukan melalui proses pembelajaran.

Rancangan model pembelajaran yang diterapkan mengikuti 5 (lima) komponen utama model pembelajaran yang dijabarkan sebagai berikut.

## 1. Sintaks

Pengelolaan pembelajaran terdiri 5 tahapan pembelajaran, yaitu:

### a. Apersepsi

Tahap apersepsi diawali dengan menginformasikan kepada siswa kompetensi dasar dan indikator yang akan dicapai siswa melalui pembelajaran materi yang akan diajarkan. Lalu, guru menumbuhkan persepsi positif dan motivasi belajar pada diri siswa melalui pemaparan manfaat materi matematika yang dipelajari dalam penyelesaian masalah kehidupan. Selain itu, guru meyakinkan siswa, jika siswa terlibat aktif dalam merekonstruksi konsep dan prinsip matematika melalui penyelesaian masalah yang bersumber dari fakta dan lingkungan kehidupan siswa dengan strategi penyelesaian yang menerapkan pola interaksi sosial yang pahami siswa dan guru. Dengan demikian, siswa akan lebih baik dalam menguasai materi yang diajarkan, informasi baru berupa pengetahuan lebih bertahan lama di dalam ingatan siswa, dan pembelajaran lebih bermakna sebab setiap informasi baru dikaitkan dengan apa yang diketahui siswa dan menunjukkan secara nyata kegunaan konsep dan prinsip matematika yang dipelajari dalam kehidupan.

### b. Interaksi Sosial di Antara Siswa, Guru dan Masalah

Pada tahap orientasi masalah dan penyelesaian masalah, guru meminta siswa mencoba memahami masalah dan mendiskusikan hasil pemikiran melalui belajar kelompok. Pembentukan kelompok belajar menerapkan prinsip kooperatif, yakni heterogenitas anggota kelompok dari segi karakteristik (kemampuan dan jenis kelamin) siswa, berbeda budaya, berbeda agama dengan tujuan agar siswa terlatih bekerjasama, berkomunikasi, menumbuhkan rasa toleransi dalam perbedaan, saling memberi ide dalam penyelesaian masalah, saling membantu dan berbagi informasi. Guru memfasilitasi siswa dengan buku siswa, Lembar Aktivitas Siswa (LAS) dan Asesmen Autentik. Selanjutnya, guru mengajukan permasalahan matematika yang bersumber dari lingkungan kehidupan siswa. Guru menanamkan nilai-nilai matematis (jujur, konsisten, tangguh menghadapi masalah) dan nilai-nilai budaya agar para siswa saling berinteraksi secara sosio kultural, memotivasi dan mengarahkan jalannya diskusi agar lebih efektif, serta mendorong siswa bekerja sama.

Selanjutnya, guru memusatkan pembelajaran pada siswa dalam kelompok belajar untuk menyelesaikan masalah. Guru meminta siswa memahami masalah secara individu dan mendiskusikan hasil pemikirannya dalam kelompok, dan



dilanjutkan berdialog secara interaktif (berdebat, bertanya, mengajukan ide-ide, berdiskusi) dengan kelompok lain dengan arahan guru. Antaranggota kelompok saling bertanya-jawab, berdebat, merenungkan hasil pemikiran teman, mencari ide dan jalan keluar penyelesaian masalah. Setiap kelompok memadu hasil pemikiran dan menuangkannya dalam sebuah LAS yang dirancang guru. Jika semua anggota kelompok mengalami kesulitan memahami dan menyelesaikan masalah, maka salah seorang dari anggota kelompok bertanya pada guru sebagai panutan. Selanjutnya, guru memberi *scaffolding*, yaitu berupa pemberian petunjuk, memberi kemudahan pengerjaan siswa, contoh analogi, struktur, bantuan jalan keluar sampai saatnya siswa dapat mengambil alih tugas-tugas penyelesaian masalah.

**c. Mempresentasikan dan Mengembangkan Hasil Kerja**

Pada tahapan ini, guru meminta salah satu kelompok mempresentasikan hasil kerjanya di depan kelas dan memberi kesempatan pada kelompok lain memberi tanggapan berupa kritikan disertai alasan-alasan, dan memberi masukan sebagai pembanding. Sesekali guru mengajukan pertanyaan menguji pemahaman/penguasaan penyaji dan dapat ditanggapi oleh kelompok lain. Kriteria untuk memilih hasil diskusi kelompok yang akan dipresentasikan antara lain: jawaban kelompok berbeda dengan jawaban dari kelompok lain, ada ide penting dalam hasil diskusi kelompok yang perlu mendapat perhatian khusus. Dengan demikian, kelompok penyaji bisa lebih dari satu kelompok. Selama presentasi hasil kerja, guru mendorong terjadinya diskusi kelas dan mendorong siswa mengajukan ide-ide secara terbuka dengan menanamkan nilai *softskill*.

Tujuan tahapan ini adalah untuk mengetahui keefektifan hasil diskusi dan hasil kerja kelompok pada tahapan sebelumnya. Dalam penyajiannya, kelompok penyaji akan diuji oleh kelompok lain dan guru tentang penguasaan dan pemahaman mereka atas penyelesaian masalah yang dilakukan. Dengan cara tersebut dimungkinkan tiap-tiap kelompok mendapatkan pemikiran-pemikiran baru dari kelompok lain atau alternatif jawaban yang lain yang berbeda. Sehingga pertimbangan-pertimbangan secara objektif akan muncul di antara siswa. Tujuan lain dalam tahapan ini adalah melatih siswa terampil menyajikan hasil kerjanya melalui penyampaian ide-ide di depan umum (teman satu kelas). Keterampilan mengomunikasikan ide-ide tersebut adalah salah satu kompetensi yang dituntut dalam pembelajaran berdasarkan masalah, untuk memampukan siswa berinteraksi/berkolaborasi dengan orang lain.

**d. Temuan Objek Matematika dan Penguatan Skemata Baru**

Objek-objek matematika berupa model (contoh konsep) yang diperoleh dari proses dan hasil penyelesaian masalah dijadikan bahan inspirasi dan abstraksi konsep melalui penemuan ciri-ciri konsep oleh siswa dan mengkonstruksi konsep secara ilmiah. Setelah konsep ditemukan, guru melakukan teorema pengontrasan melalui pengajuan contoh dan bukan contoh. Dengan mengajukan sebuah objek, guru meminta siswa memberi alasan, apakah objek itu termasuk contoh atau bukan contoh konsep.



Guru memberi kesempatan bertanya atas hal-hal yang kurang dipahami. Sesekali guru menguji pemahaman siswa atas konsep dan prinsip yang ditemukan, serta melengkapi hasil pemikiran siswa dengan memberikan contoh dan bukan contoh konsep. Berdasar konsep yang ditemukan/direkonstruksi, diturunkan beberapa sifat dan aturan-aturan. Selanjutnya, siswa diberi kesempatan mengerjakan soal-soal tantangan untuk menunjukkan kebergunaan konsep dan prinsip matematika yang dimiliki.

**e. Menganalisis dan Mengevaluasi Proses dan Hasil Penyelesaian Masalah**

Pada tahapan ini, guru membantu siswa atau kelompok mengkaji ulang hasil penyelesaian masalah, menguji pemahaman siswa dalam proses penemuan konsep dan prinsip. Selanjutnya, guru melakukan evaluasi materi akademik dengan pemberian kuis atau meminta siswa membuat peta konsep atau memberi tugas dirumah atau membuat peta materi yang dipelajari.

**2. Sistem Sosial**

Pengorganisasian siswa selama proses pembelajaran menerapkan pola pembelajaran kooperatif. Dalam interaksi sosiokultural di antara siswa dan temannya, guru selalu menanamkan nilai-nilai *softskill* dan nilai matematis. Siswa dalam kelompok saling bekerja sama dalam menyelesaikan masalah, saling bertanya/berdiskusi antara siswa yang lemah dan yang pintar, kebebasan mengajukan pendapat, berdialog dan berdebat, guru tidak boleh terlalu mendominasi siswa, bersifat membantu dan gotong royong untuk menghasilkan penyelesaian masalah yang disepakati bersama. Dalam interaksi sosiokultural, para siswa diizinkan berbahasa daerah dalam menyampaikan pertanyaan, kritikan, pendapat terhadap temannya maupun pada guru.

**3. Prinsip Reaksi**

Model pembelajaran yang diterapkan dalam buku ini dilandasi teori konstruktivis dan nilai budaya di mana siswa belajar yang memberi penekanan pembelajaran berpusat pada siswa, sehingga fungsi guru sebagai fasilitator, motivator, dan mediator dalam pembelajaran. Tingkah laku guru dalam menanggapi hasil pemikiran siswa berupa pertanyaan atau kesulitan yang dialami dalam menyelesaikan masalah harus bersifat mengarahkan, membimbing, memotivasi dan membangkitkan semangat belajar siswa.

Untuk mewujudkan tingkah laku tersebut, guru harus memberikan kesempatan pada siswa untuk mengungkapkan hasil pemikirannya secara bebas dan terbuka, mencermati pemahaman siswa atas objek matematika yang diperoleh dari proses dan hasil penyelesaian masalah, menunjukkan kelemahan atas pemahaman siswa dan memancing mereka menemukan jalan keluar untuk mendapatkan penyelesaian masalah yang sesungguhnya. Jika ada siswa yang bertanya, sebelum guru memberikan penjelasan/bantuan, guru terlebih dahulu memberi kesempatan pada siswa lainnya memberikan tanggapan dan merangkum hasilnya. Jika keseluruhan siswa mengalami kesulitan, maka guru saatnya memberi penjelasan atau bantuan/memberi petunjuk sampai siswa dapat mengambil alih penyelesaian masalah pada langkah berikutnya. Ketika siswa bekerja



menyelesaikan tugas-tugas, guru mengontrol jalannya diskusi dan memberikan motivasi agar siswa tetap berusaha menyelesaikan tugas-tugasnya.

#### 4. Sistem Pendukung

Agar model pembelajaran ini dapat terlaksana secara praktis dan efektif, guru diwajibkan membuat suatu rancangan pembelajaran yang dilandasi teori pembelajaran konstruktivis dan nilai *softskill* matematis yang diwujudkan dalam setiap langkah-langkah pembelajaran yang ditetapkan dan menyediakan fasilitas belajar yang cukup. Dalam hal ini dikembangkan buku model yang berisikan teori-teori pendukung dalam melaksanakan pembelajaran, komponen-komponen model, petunjuk pelaksanaan dan seluruh perangkat pembelajaran yang digunakan seperti rencana pembelajaran, buku guru, buku siswa, lembar kerja siswa, objek-objek abstraksi dari lingkungan budaya, dan media pembelajaran yang diperlukan.

#### 5. Dampak Instruksional dan Pengiring yang Diharapkan

Dampak langsung penerapan pembelajaran ini adalah memampukan siswa merekonstruksi konsep dan prinsip matematika melalui penyelesaian masalah dan terbiasa menyelesaikan masalah nyata di lingkungan siswa. Pemahaman siswa terhadap objek-objek matematika dibangun berdasarkan pengalaman budaya dan pengalaman belajar yang telah dimiliki sebelumnya. Kebermaknaan pembelajaran yang melahirkan pemahaman, dan pemahaman mendasari kemampuan siswa mentransfer pengetahuannya dalam menyelesaikan masalah. Kemampuan menyelesaikan masalah tidak rutin menyadarkan siswa akan kebergunaan matematika. Kegunaan akan menimbulkan motivasi belajar secara internal dari dalam diri siswa dan rasa memiliki terhadap matematika akan muncul sebab matematika yang dipahami adalah hasil rekonstruksi pemikirannya sendiri. Motivasi belajar secara internal akan menimbulkan kecintaan terhadap dewi matematika. Bercinta dengan dewi matematika berarti penyatuan diri dengan keabstrakan yang tidak memiliki batas atas dan batas bawah tetapi bekerja dengan simbol-simbol.

Selain dampak di atas, siswa terbiasa menganalisis secara logis dan kritis memberikan pendapat atas apa saja yang dipelajari menggunakan pengalaman belajar yang dimiliki sebelumnya. Penerimaan individu atas perbedaan-perbedaan yang terjadi (perbedaan pola pikir, pemahaman, daya lihat, dan kemampuan), serta berkembangnya kemampuan berkolaborasi antara siswa. Retensi pengetahuan matematika yang dimiliki siswa dapat bertahan lebih lama sebab siswa terlibat aktif di dalam proses penemuannya.

Dampak pengiring yang akan terjadi dengan penerapan model pembelajaran berbasis konstruktivistik adalah siswa mampu menemukan kembali berbagai konsep dan aturan matematika dan menyadari betapa tingginya manfaat matematika bagi kehidupan sehingga dia tidak merasa terasing dari lingkungannya. Matematika sebagai ilmu pengetahuan tidak lagi dipandang sebagai hasil pemikiran dunia luar tetapi berada pada lingkungan budaya siswa yang bermanfaat dalam menyelesaikan permasalahan di lingkungan budayanya. Dengan demikian terbentuk dengan sendirinya rasa memiliki,



sikap, dan persepsi positif siswa terhadap matematika dan budayanya. Siswa memandang bahwa matematika terkait dan inklusif di dalam budaya. Jika matematika bagian dari budaya siswa, maka suatu saat diharapkan siswa memiliki cara tersendiri memeliharanya dan menjadikannya **Landasan Makna** (Landasan makna dalam hal ini berpihak pada sikap, kepercayaan diri, cara berpikir, cara bertingkah laku, cara mengingat apa yang dipahami oleh siswa sebagai pelaku-pelaku budaya). Dampak pengiring yang lebih jauh adalah hakikat tentatif keilmuan, keterampilan proses keilmuan, otonomi dan kebebasan siswa, toleransi terhadap ketidakpastian dan masalah-masalah nonrutin.



## Pedoman Penyusunan Rencana Pembelajaran

Penyusunan rencana pembelajaran berpedoman pada kurikulum 2013 dan sintaksis Model Pembelajaran. Berdasarkan analisis kurikulum matematika ditetapkan hal-hal berikut.

1. Kompetensi dasar dan indikator pencapaian kompetensi dasar untuk tiap-tiap pokok bahasan. Rumusan indikator dan kompetensi dasar harus disesuaikan dengan prinsip-prinsip pembelajaran matematika berdasarkan masalah, memberikan pengalaman belajar bagi siswa, seperti menyelesaikan masalah autentik (masalah bersumber dari fakta dan lingkungan budaya), berkolaborasi, berbagi pengetahuan, saling membantu, berdiskusi dalam menyelesaikan masalah.
2. Materi pokok yang akan diajarkan, termasuk analisis topik, dan peta konsep.
3. Materi prasyarat, yaitu materi yang harus dikuasai oleh siswa sebagai dasar untuk mempelajari materi pokok. Dalam hal ini perlu dilakukan tes kemampuan awal siswa.
4. Kelengkapan, yaitu fasilitas pembelajaran yang harus dipersiapkan oleh guru, misalnya: rencana pembelajaran, buku petunjuk guru, buku siswa, lembar aktivitas siswa (LAS), objek-objek budaya, kumpulan masalah-masalah yang bersumber dari fakta dan lingkungan budaya siswa, laboratorium, dan alat peraga jika dibutuhkan.
5. Alokasi waktu: banyak jam pertemuan untuk setiap pokok bahasan tidak harus sama tergantung kepadatan dan kesulitan materi untuk tiap-tiap pokok bahasan. Penentuan rata-rata banyak jam pelajaran untuk satu pokok bahasan adalah hasil bagi jumlah jam efektif untuk satu semester dibagi banyak pokok bahasan yang akan diajarkan untuk semester tersebut.
6. Hasil belajar yang akan dicapai melalui kegiatan pembelajaran antara lain:
  - Produk : Konsep dan prinsip-prinsip yang terkait dengan materi pokok.
  - Proses : Apersepsi budaya, interaksi sosial dalam penyelesaian masalah, memodelkan masalah secara matematika, merencanakan penyelesaian masalah, menyajikan hasil kerja dan menganalisis serta mengevaluasi kembali hasil penyelesaian masalah.
  - Kognitif : Kemampuan matematisasi, kemampuan abstraksi, pola pikir deduktif, berpikir tingkat tinggi (berpikir kritis dan berpikir kreatif).
  - Psikomotor : Keterampilan menyelesaikan masalah, keterampilan berkolaborasi, kemampuan berkomunikasi.
  - Afektif : Menghargai budaya, penerimaan individu atas perbedaan yang ada, bekerja sama, tangguh menghadapi masalah, jujur mengungkapkan pendapat dan senang belajar matematika.



Sintaksis pembelajaran adalah langkah-langkah pembelajaran yang dirancang dan dihasilkan dari kajian teori yang melandasi model pembelajaran berbasis konstruktivistik. Sementara, rencana pembelajaran adalah operasional dari sintaks, sehingga skenario pembelajaran yang terdapat pada rencana pembelajaran disusun mengikuti setiap langkah-langkah pembelajaran (sintaks). Sintaks model pembelajaran terdiri dari 5 langkah pokok, yaitu: (1) apersepsi budaya, (2) orientasi dan penyelesaian masalah, (3) persentase dan mengembangkan hasil kerja, (4) temuan objek matematika dan penguatan skemata baru, (5) menganalisis dan mengevaluasi proses dan hasil penyelesaian masalah. Kegiatan yang dilakukan untuk setiap tahapan pembelajaran dijabarkan sebagai berikut:

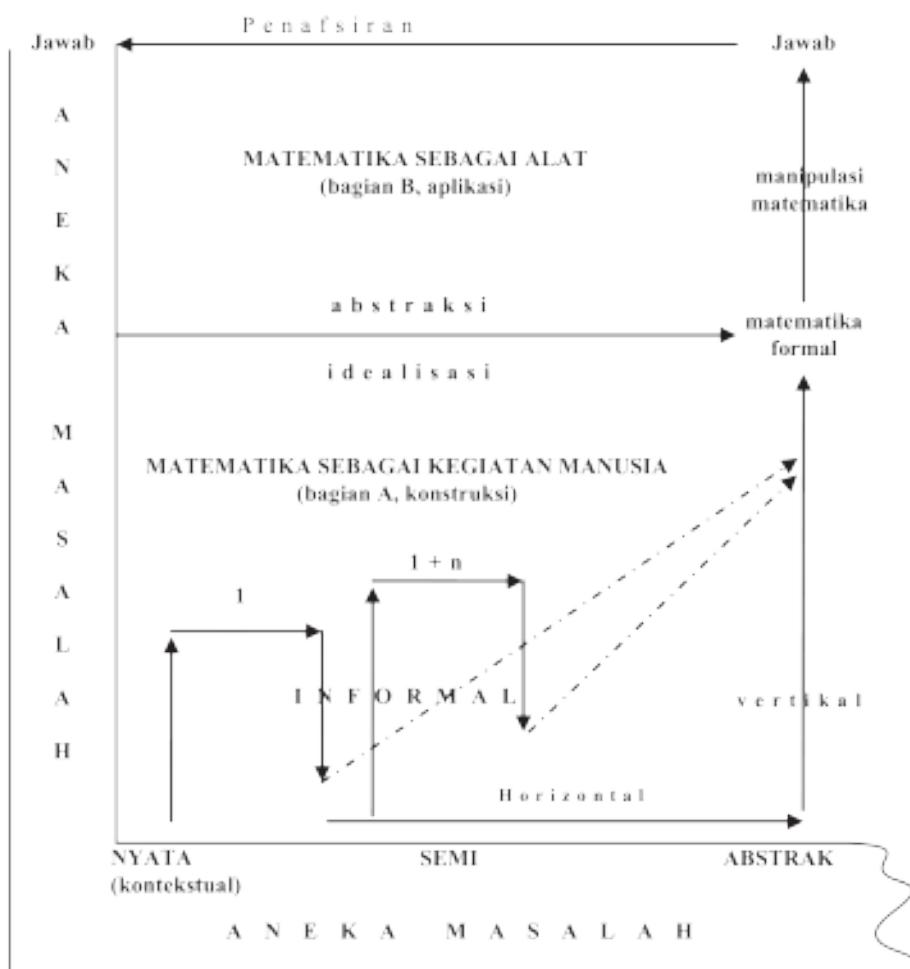
1. Kegiatan guru pada tahap apersepsi budaya antara lain:
  - a. Menginformasikan indikator pencapaian kompetensi dasar.
  - b. Menciptakan persepsi positif dalam diri siswa terhadap budayanya dan matematika sebagai hasil konstruksi sosial.
  - c. Menjelaskan pola interaksi sosial, menjelaskan peranan siswa dalam menyelesaikan masalah.
  - d. Memberikan motivasi belajar pada siswa melalui penanaman nilai matematis, *softskill* dan kebergunaan matematika.
  - e. Memberi kesempatan pada siswa menanyakan hal-hal yang sulit dimengerti pada materi sebelumnya.
2. Kegiatan guru pada tahap penyelesaian masalah dengan pola interaksi edukatif antara lain:
  - a. Membentuk kelompok.
  - b. Mengajukan masalah yang bersumber dari fakta dan lingkungan budaya siswa.
  - c. Meminta siswa memahami masalah secara individual dan kelompok.
  - d. Mendorong siswa bekerja sama menyelesaikan tugas-tugas.
  - e. Membantu siswa merumuskan hipotesis (dugaan).
  - f. Membimbing, mendorong/mengarahkan siswa menyelesaikan masalah dan mengerjakan LKS.
  - g. Memberikan *scaffolding* pada kelompok atau individu yang mengalami kesulitan.
  - h. Mengkondisikan antaranggota kelompok berdiskusi, berdebat dengan pola kooperatif.
  - i. Mendorong siswa mengekspresikan ide-ide secara terbuka.
  - j. Membantu dan memberi kemudahan bagi siswa dalam menyelesaikan masalah dalam pemberian solusi.
3. Kegiatan guru pada tahap persentasi dan mengembangkan hasil kerja antara lain:
  - a. Memberi kesempatan pada kelompok mempresentasikan hasil penyelesaian masalah di depan kelas.



- b. Membimbing siswa menyajikan hasil kerja.
  - c. Memberi kesempatan kelompok lain mengkritisi/menanggapi hasil kerja kelompok penyaji, memberi masukan sebagai alternatif pemikiran, dan membantu siswa menemukan konsep berdasarkan masalah.
  - d. Mengontrol jalannya diskusi agar pembelajaran berjalan dengan efektif.
  - e. Mendorong keterbukaan, proses-proses demokrasi.
  - f. Menguji pemahaman siswa.
4. Kegiatan guru pada tahap temuan objek matematika dan penguatan skemata baru antara lain:
- a. Mengarahkan siswa membangun konsep dan prinsip secara ilmiah.
  - b. Menguji pemahaman siswa atas konsep yang ditemukan melalui pengajuan contoh dan bukan contoh konsep.
  - c. Membantu siswa mendefinisikan dan mengorganisasikan tugas-tugas belajar yang berkaitan dengan masalah.
  - d. Memberi kesempatan melakukan konektivitas konsep dan prinsip dalam mengerjakan soal tantangan.
  - e. Memberikan *scaffolding*.
5. Kegiatan guru pada tahap menganalisis dan mengevaluasi proses dan hasil penyelesaian masalah antara lain:
- a. Membantu siswa mengkaji ulang hasil penyelesaian masalah.
  - b. Memotivasi siswa untuk terlibat dalam penyelesaian masalah yang selektif.
  - c. Mengevaluasi materi akademik: memberi kuis atau membuat peta konsep atau peta materi.



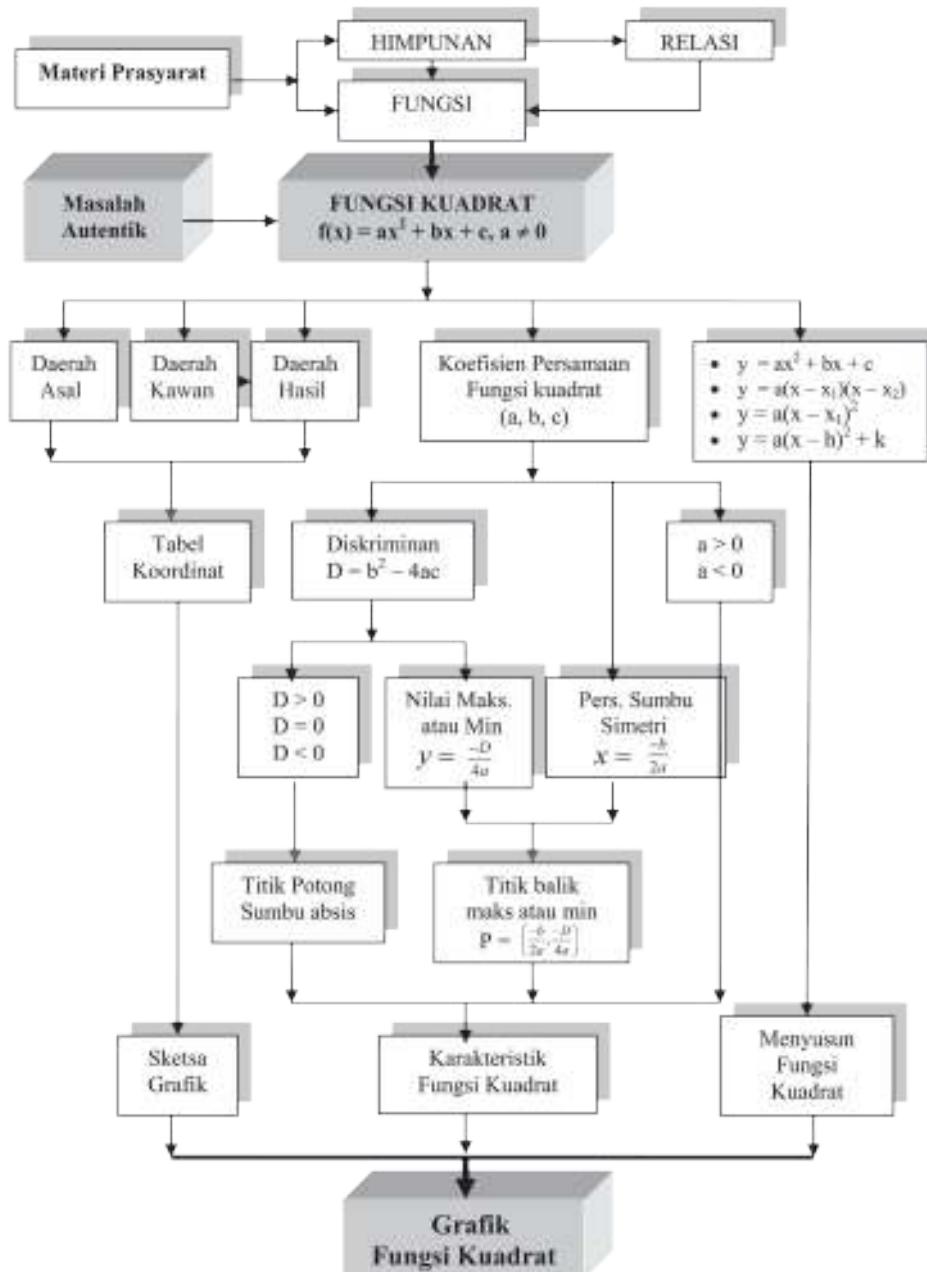
# Fase Konstruksi Matematika



Gambar: Matematika Hasil Konstruksi Sosial (Adaptasi, Soedjadi (2004))



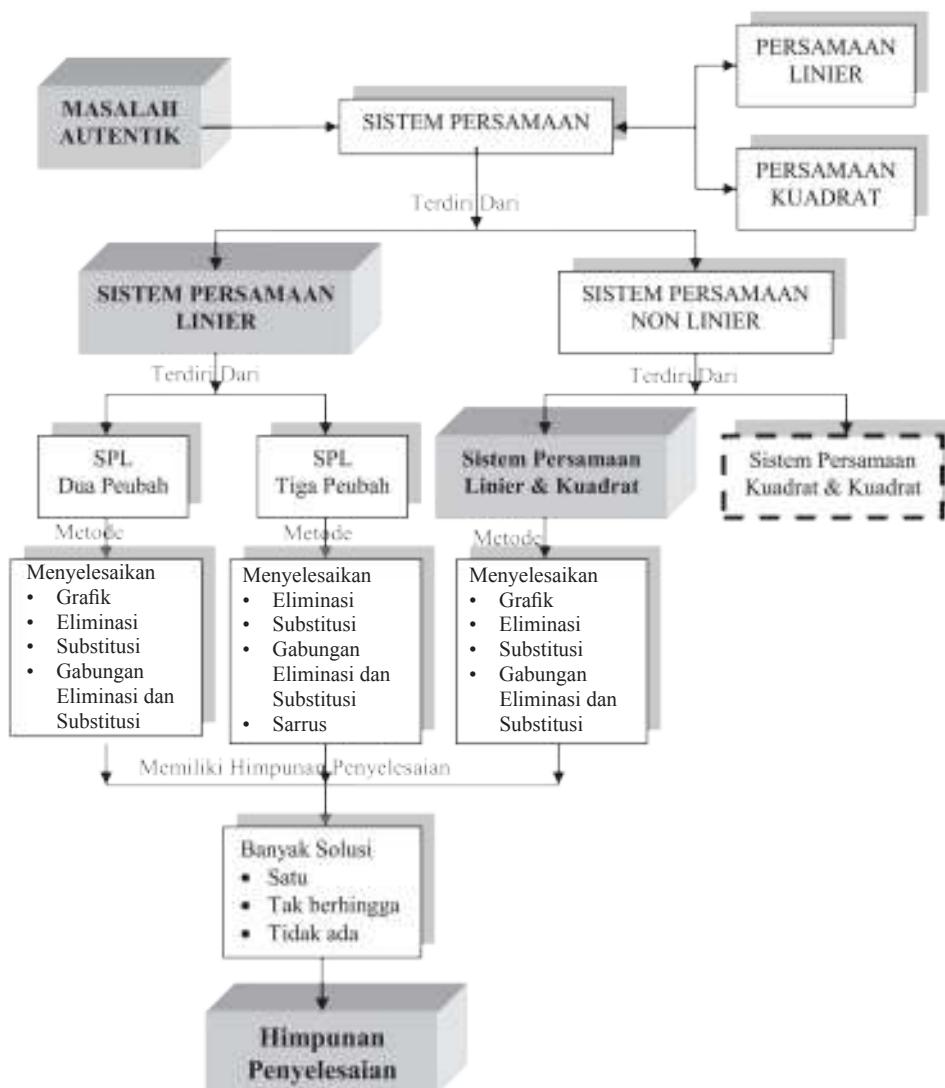
### CONTOH ANALISIS TOPIK



Gambar: Analisis Topik pada Materi Fungsi Kuadrat

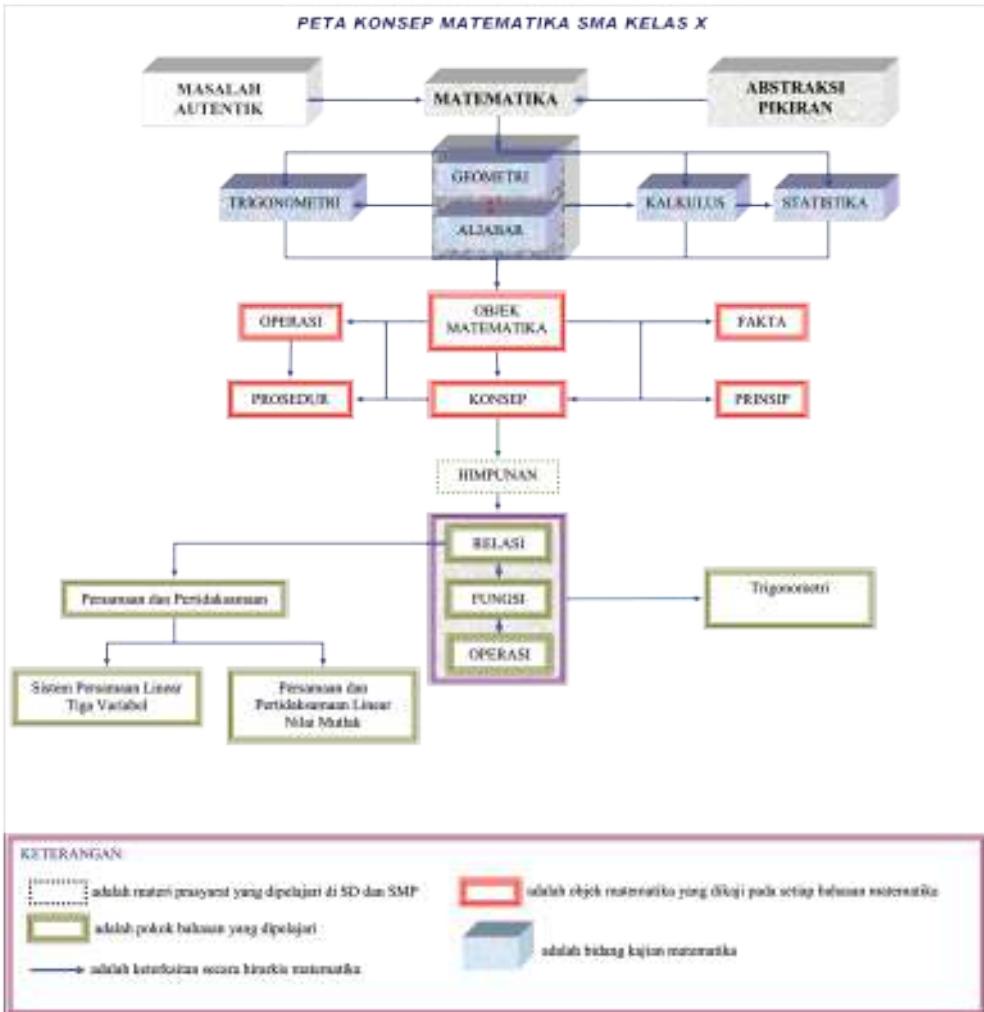


## CONTOH DIAGRAM ALIR





PETA KONSEP MATEMATIKA SMA KELAS X







# BAB 1

## Induksi Matematika

### A. Kompetensi Inti

<b>Sikap</b>	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Menghargai dan menghayati ajaran agama yang dianutnya.</li><li>2. Menghayati dan mengamalkan perilaku jujur, disiplin, tanggung jawab, peduli (gotong royong, kerja sama, toleran, damai), santun, responsif dan pro-aktif dan menunjukkan sikap sebagai bagian dari solusi atas berbagai permasalahan dalam berinteraksi secara efektif dengan lingkungan sosial dan alam serta dalam menempatkan diri sebagai cerminan bangsa dalam pergaulan dunia.</li></ol>
<b>Pengetahuan</b>	<ol style="list-style-type: none"><li>3. Memahami, menerapkan, menganalisis pengetahuan faktual, konseptual, prosedural, dan metakognitif berdasarkan rasa ingin tahunya tentang ilmu pengetahuan, teknologi, seni, budaya, dan humaniora dengan wawasan kemanusiaan, kebangsaan, kenegaraan, dan peradaban terkait penyebab fenomena dan kejadian, serta menerapkan pengetahuan prosedural pada bidang kajian yang spesifik sesuai dengan bakat dan minatnya untuk memecahkan masalah.</li></ol>
<b>Keterampilan</b>	<ol style="list-style-type: none"><li>4. Mengolah, menalar, dan menyaji dalam ranah konkret dan ranah abstrak terkait dengan pengembangan dari yang dipelajarinya di sekolah secara mandiri, bertindak secara efektif dan kreatif serta mampu menggunakan metode sesuai kaidah keilmuan.</li></ol>



## B. Kompetensi Dasar dan Indikator

Indikator pencapaian kompetensi pada pembelajaran dapat dikembangkan guru sendiri berdasarkan kondisi peserta didik masing-masing di tempat guru mengajar. Berikut ini dipaparkan contoh Indikator Pencapaian Kompetensi Pembelajaran yang dapat dijabarkan dari KD 3.1 dan KD 4.1.

No.	Kompetensi Dasar	Indikator Pencapaian Kompetensi
1.	3.1 Menjelaskan metode pembuktian pernyataan matematis berupa barisan, ketidaksamaan, keterbagian dengan induksi matematika.	3.1.1 Merancang formula untuk suatu pola barisan bilangan. 3.1.2 Menjelaskan prinsip induksi matematika. 3.1.3 Membuktikan formula suatu barisan bilangan dengan prinsip induksi matematika. 3.1.4 Membuktikan formula keterbagian bilangan dengan prinsip induksi matematika. 3.1.5 Membuktikan formula bentuk ketidaksamaan bilangan dengan prinsip induksi matematika.
2.	4.1 Menggunakan metode pembuktian induksi matematika untuk menguji pernyataan matematis berupa barisan, ketidaksamaan, keterbagian.	4.1.1 Menerapkan prinsip induksi matematika untuk membuktikan kebenaran formula suatu barisan bilangan. 4.1.2 Menerapkan prinsip induksi matematika untuk menyelidiki kebenaran suatu formula. 4.1.3 Menerapkan prinsip induksi matematika untuk membuktikan keterbagian bilangan. 4.1.4 Menerapkan prinsip induksi matematika untuk membuktikan ketidaksamaan bilangan.



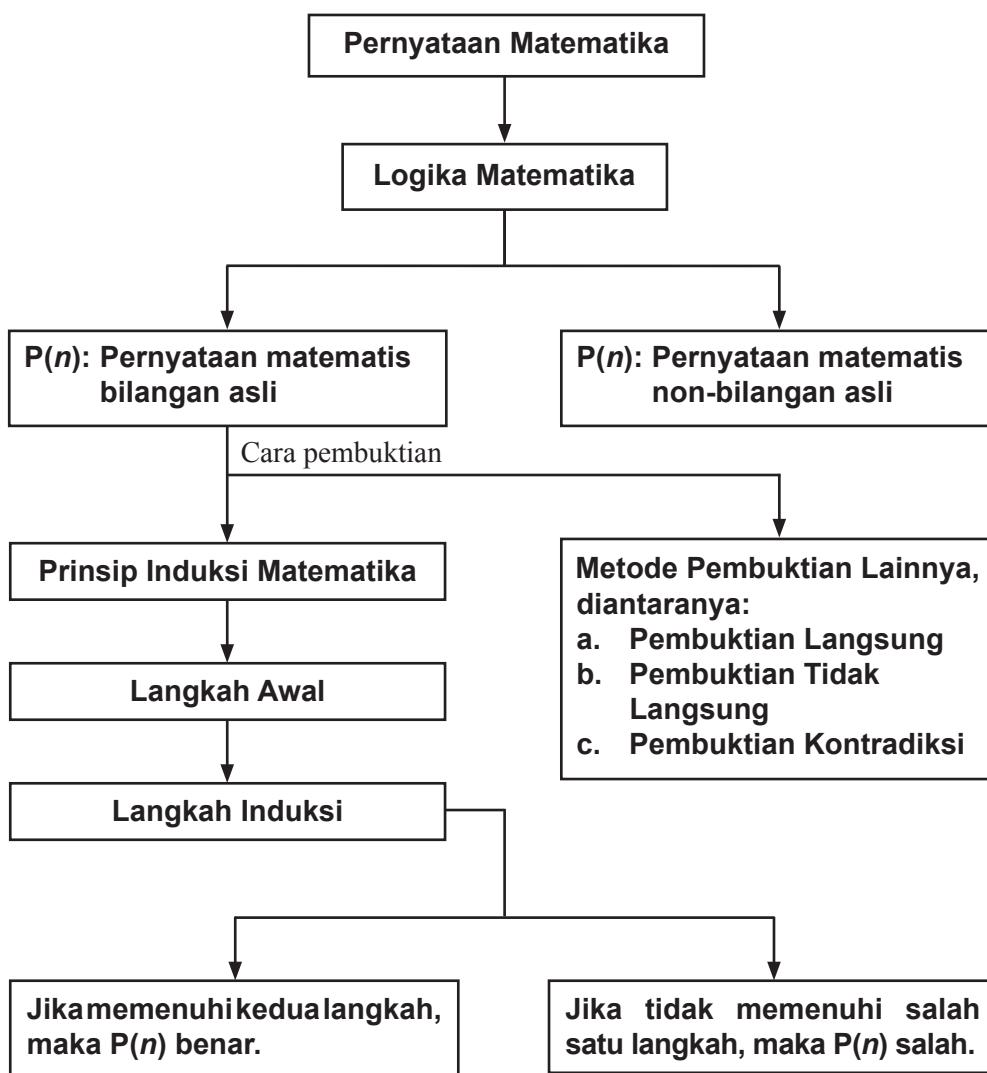
### C. Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari konsep induksi matematika melalui pengamatan, menalar, tanya jawab, mencoba menyelesaikan persoalan, penugasan individu dan kelompok, diskusi kelompok, dan mengkomunikasikan pendapatnya, siswa mampu:

1. Melatih siswa menumbuhkan sikap perilaku jujur, disiplin, tanggung jawab, peduli (gotong royong, kerja sama, toleran, damai), santun, responsif dan pro-aktif, berani bertanya, berpendapat, dan menghargai pendapat orang lain dalam aktivitas sehari-hari.
2. Menunjukkan rasa ingin tahu dalam memahami konsep dan menyelesaikan masalah.
3. Menjelaskan prinsip induksi matematika.
4. Menjelaskan langkah-langkah pembuktian suatu formula dengan prinsip induksi matematika.
5. Merancang formula dari suatu pola barisan bilangan.
6. Membuktikan kebenaran formula suatu barisan bilangan dengan prinsip induksi matematika.
7. Membuktikan kebenaran keterbagian pola bilangan.
8. Membuktikan kebenaran ketidaksamaan pola bilangan.
9. Menyelidiki kebenaran formula suatu pola bilangan.



## D. Diagram Alir





## E. Proses Pembelajaran

### 1.1 Memahami Prinsip Induksi Matematika

No.	Deskripsi Kegiatan
1.	<p><b>Kegiatan Pendahuluan</b></p> <ol style="list-style-type: none"><li>1) Menyiapkan peserta didik secara psikis dan fisik untuk mengikuti proses pembelajaran.</li><li>2) Memberi motivasi belajar siswa secara kontekstual sesuai manfaat dan aplikasi prinsip induksi matematika dalam kehidupan sehari-hari.</li><li>3) Menjelaskan tujuan pembelajaran atau kompetensi dasar yang akan dicapai.</li><li>4) <i>Apersepsi</i><ol style="list-style-type: none"><li>1. Guru memberikan beberapa pengantar tentang penalaran induksi dalam kehidupan sehari, melalui kegiatan atau pengalaman siswa yang menggunakan prinsip induksi matematika. Misalnya, ilustrasi susunan <math>n</math> papan yang berukuran sama dan berjarak sama. Ajak siswa berimajinasi tentang yang akan terjadi jika papan pertama dijatuhkan ke arah papan kedua.</li><li>2. Berikan pertanyaan kepada siswa dari setiap pola yang diamati.</li><li>3. Ajak siswa untuk berpikir kritis dalam memahami kondisi awal suatu pola barisan.</li></ol></li></ol>
2.	<p><b>Kegiatan Inti</b></p> <p><i>Pengantar Pembelajaran</i></p> <ul style="list-style-type: none"><li>• Mintalah siswa untuk membaca Masalah 1.1.</li></ul> <p><i>Mengamati</i></p> <ul style="list-style-type: none"><li>• Ajaklah siswa untuk mengamati Masalah 1.1 tersebut dan meminta siswa untuk menentukan nilai kebenarannya.</li><li>• Berdasarkan nilai kebenaran yang diperoleh, minta siswa untuk membuat ingkaran dari kalimat tersebut.</li></ul> <p><i>Menanya</i></p> <ul style="list-style-type: none"><li>• Selanjutnya minta siswa untuk bertanya tentang apa-apa saja yang belum dipahaminya dalam menyelesaikan Masalah 1.1.</li></ul>



### **Mengumpulkan Informasi**

- Bimbing siswa untuk menemukan informasi yang disajikan pada setiap masalah.
- Uji pemahaman siswa terhadap pemecahan masalah, dengan mengajukan pertanyaan yang berkaitan dengan Masalah 1.1 dan Masalah 1.2.

### **Menalar**

- Berikan pancingan kepada siswa, jika siswa menemukan pola penjumlahan bilangan berurutan mulai dari 1 hingga  $n$ , tetapi  $n$  merupakan bilangan ganjil, sedemikian hingga siswa dapat menyimpulkan secara umum.
- Setelah Tabel 1.1 tuntas dilengkapi oleh siswa, ajak siswa memecahkan pola yang terdapat pada:
  - a. Penjumlahan berurut bilangan kuadrat mulai dari  $1^2$  hingga  $30^2$ . Kemudian hitunglah hasilnya.
  - b. Penjumlahan berurut bilangan kuadrat mulai dari  $1^2$  hingga  $50^2$ . Kemudian hitunglah hasilnya.
  - c. Penjumlahan berurut bilangan kuadrat mulai dari  $1^2$  hingga  $n^2$ .

### **Alternatif Penyelesaian**

- 1) Meskipun  $n$  ganjil, pola yang untuk genap juga dapat diterapkan, tetapi dengan mengartikan  $1 + 2 + 3 + \dots + n = 0 + 1 + 2 + 3 + \dots + n$ ,  $n$  bilangan ganjil.

Jadinya hasilnya,

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{(n+1)}{2}$$

$$0 + 1 + 2 + 3 + \dots + n = (0 + n) \frac{(n+1)}{2}$$

- 2) Selengkapnya Tabel 1.1 adalah sebagai berikut.

$n$	Jumlah $n$ Bilangan Kuadrat yang Pertama
1.	$1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$
2.	$1^2 + 2^2 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{6} = 5$
3.	$1^2 + 2^2 + 3^2 = \frac{3 \cdot 4 \cdot 7}{6} = 14$
4.	$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = \frac{4 \cdot 5 \cdot 9}{6} = 30$



	<table border="1"><tbody><tr><td>5.</td><td><math>1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = \frac{5 \cdot 6 \cdot 11}{6} = 55</math></td></tr><tr><td>6.</td><td><math>1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = \frac{6 \cdot 7 \cdot 13}{6} = 91</math></td></tr><tr><td>7.</td><td><math>1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 = \frac{7 \cdot 8 \cdot 15}{6} = 140</math></td></tr><tr><td>8.</td><td><math>1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 = \frac{8 \cdot 9 \cdot 17}{6} = 204</math></td></tr><tr><td>9.</td><td><math>1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 = \frac{9 \cdot 10 \cdot 19}{6} = 285</math></td></tr><tr><td>10.</td><td><math>1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 = \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 385</math></td></tr></tbody></table>	5.	$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = \frac{5 \cdot 6 \cdot 11}{6} = 55$	6.	$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = \frac{6 \cdot 7 \cdot 13}{6} = 91$	7.	$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 = \frac{7 \cdot 8 \cdot 15}{6} = 140$	8.	$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 = \frac{8 \cdot 9 \cdot 17}{6} = 204$	9.	$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 = \frac{9 \cdot 10 \cdot 19}{6} = 285$	10.	$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 = \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 385$
5.	$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = \frac{5 \cdot 6 \cdot 11}{6} = 55$												
6.	$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = \frac{6 \cdot 7 \cdot 13}{6} = 91$												
7.	$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 = \frac{7 \cdot 8 \cdot 15}{6} = 140$												
8.	$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 = \frac{8 \cdot 9 \cdot 17}{6} = 204$												
9.	$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 = \frac{9 \cdot 10 \cdot 19}{6} = 285$												
10.	$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 = \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 385$												
	<p>a) <math>1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \dots + 29^2 + 30^2 = \frac{30 \cdot 31 \cdot 61}{6} = 9.455</math></p> <p>b) <math>1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 49^2 + 50^2 = \frac{50 \cdot 51 \cdot 101}{6} = 42.925</math></p> <p>c) <math>1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}</math></p> <p>3) Selanjutnya, ajak siswa memahami prinsip induksi matematika, yang dinyatakan pada Prinsip 1.1 pada buku siswa. Pastikan siswa memahami prinsip tersebut melalui mengajukan pertanyaan-pertanyaan, misalnya bagaimana pembuktian formula yang diperoleh melalui Masalah 1.1 dan Masalah 1.2.</p> <p>4) Kegiatan berikutnya, berikan kesempatan kepada siswa untuk mencermati dan memahami Masalah 1.3, Contoh 1.1, Contoh 1.2, dan Contoh 1.3.</p>												
3.	<p><b>Kegiatan Penutup</b></p> <p>1) Ajak siswa untuk menyimpulkan prinsip induksi matematika.</p> <p>2) Berikan pertanyaan untuk memastikan pemahaman siswa akan langkah-langkah prinsip induksi matematika.</p> <p>3) Berikan penugasan kepada siswa untuk mengerjakan Uji Kompetensi 1.1.</p>												



## Penilaian

### 1. Prosedur Penilaian Sikap

No.	Aspek yang Dinilai	Teknik Penilaian	Waktu Penilaian
1.	Berpikir Logis	Pengamatan	Kegiatan inti
2.	Kritis	Pengamatan	Kegiatan inti

### 2. Instrumen Pengamatan Sikap

#### Berpikir Logis

- Kurang baik jika sama sekali tidak berusaha mengajukan ide-ide logis dalam proses pembelajaran.
- Baik jika menunjukkan sudah ada usaha untuk mengajukan ide-ide logis dalam proses pembelajaran.
- Sangat baik jika mengajukan ide-ide logis dalam proses pembelajaran dalam proses pembelajaran secara terus menerus dan ajeg/konsisten.

#### Kritis

- Kurang baik jika sama sekali tidak berusaha mengajukan ide-ide logis dengan kritis atau pertanyaan menantang dalam proses pembelajaran.
- Baik jika menunjukkan sudah ada usaha untuk mengajukan ide-ide logis dengan kritis atau pertanyaan menantang dalam proses pembelajaran.
- Sangat baik jika mengajukan ide-ide logis dengan kritis atau pertanyaan menantang dalam proses pembelajaran secara terus menerus dan ajeg/konsisten.

Berikan tanda Ceklis pada kolom-kolom sesuai hasil pengamatan.

No.	Nama	Berpikir Logis			Kritis		
		SB	B	KB	SB	B	KB
1							
2							
3							
...							
...							
...							
29							
30							

SB = Sangat Baik

B = Baik

KB = Kurang Baik



### 3. Instrumen Penilaian Pengetahuan dan Keterampilan

#### Petunjuk:

Kerjakan soal berikut secara individu, tidak boleh menyontek dan tidak boleh bekerja sama.

#### Soal

1. Untuk setiap rumusan  $P(k)$  yang diberikan, tentukan masing-masing  $P(k+1)$ .

a)  $P(k) = \frac{5}{k(k+1)}$

b)  $P(k) = \frac{3}{(k+2)(k+3)}$

c)  $P(k) = \frac{k^2(k-1)^2}{4}$

d)  $P(k) = \frac{k^2}{2(k+1)^2}$

2. Rancanglah formula yang memenuhi setiap pola berikut ini.

a)  $2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2n$

b)  $2 + 7 + 12 + 17 + 22 + \dots + (5n - 3)$

c)  $3 + 7 + 11 + 15 + 19 + \dots + (4n - 1)$

d)  $1 + 4 + 7 + 10 + 13 + \dots + (3n - 2)$

e)  $(1 + \frac{1}{1}) \times (1 + \frac{1}{2}) \times (1 + \frac{1}{3}) \times (1 + \frac{1}{4}) \times \dots \times (1 + \frac{1}{n})$

#### Pedoman Penilaian Pengetahuan dan Keterampilan

No Soal	Aspek Penilaian	Rubrik Penilaian	Skor	Skor Maksimal
1	Ketelitian dalam menghitung	Benar	50	50
		Salah	5	
		Tidak ada jawaban	0	
2	Keterampilan menerapkan prinsip induksi matematika	Benar	50	50
		Salah	5	
		Tidak ada jawaban	0	
		Skor maksimal =	100	100
		Skor minimal =	0	0



## 1.2 Bentuk-Bentuk Penerapan Prinsip Induksi Matematika

Dengan pengalaman belajar mengajar yang telah diperoleh pada pertemuan sebelum guru harus mempersiapkan sesuatu apapun yang menjadi kekurangan, termasuk cara psikologis mengatasi siswa yang belum mau bertanya.

No.	Deskripsi Kegiatan
1.	<p><b>Kegiatan Pendahuluan</b></p> <p>Pada kegiatan pendahuluan guru:</p> <ol style="list-style-type: none"><li>Menyiapkan peserta didik secara psikis dan fisik untuk mengikuti proses pembelajaran.</li><li>Memberi motivasi belajar siswa secara kontekstual sesuai manfaat dan aplikasi prinsip induksi matematika dalam kajian ilmu komputer.</li><li>Mengarahkan siswa untuk membentuk kelompok belajar yang heterogen.</li><li>Mengajukan pertanyaan-pertanyaan yang mengaitkan pengetahuan sebelumnya dengan materi yang akan dipelajari, Misalnya, bagaimana langkah-langkah pembuktian dengan prinsip induksi matematika.</li><li>Menjelaskan tujuan pembelajaran atau kompetensi dasar yang akan dicapai;</li><li>Menyampaikan cakupan materi dan penjelasan uraian kegiatan sesuai silabus.</li></ol>
2.	<p><b>Kegiatan Inti</b></p> <p>Pada kegiatan inti, guru mendistribusikan Masalah 1.4, Contoh 1.4 hingga Contoh 1.9 ke kelompok belajar yang telah dibentuk. Lalu, guru mengarahkan alur pembelajaran melalui langkah-langkah saintifik berikut.</p> <p><b>Ayo Kita Mengamati</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>Setiap siswa pada kelompok belajar diajak mengamati masalah yang diberikan.</li></ul> <p><b>Ayo Kita Menanya</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>Siswa diberi rangsangan untuk mengajukan pertanyaan-pertanyaan terkait setiap masalah yang diberikan. Guru harus mengajukan pertanyaan-pertanyaan kepada siswa untuk memastikan pemahaman siswa.</li></ul>



No.	Deskripsi Kegiatan
	<p><b><i>Ayo Kita Mengumpulkan Informasi</i></b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>• Sebagai umpan balik aktivitas sebelumnya, siswa diminta untuk menemukan dan mengumpulkan informasi yang ditemukan pada masalah tersebut, sedemikian sehingga siswa dapat memahami pola yang diberikan pada setiap masalah.</li><li>• Guru mengkoordinir kelompok belajar agar setiap informasi yang telah dikumpulkan diketahui dan dipahami setiap anggota kelompok.</li><li>• Siswa diarahkan melanjutkan ke langkah-langkah prinsip induksi matematika.</li></ul> <p><b><i>Ayo Kita Mengasosiasi</i></b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>• Ajukan pertanyaan-pertanyaan untuk setiap siswa yang memancing siswa untuk mengajukan pertanyaan-pertanyaan kritis, termasuk dalam penemuan formula setiap pola yang bersesuaian.</li><li>• Berikan kesempatan kepada setiap kelompok belajar untuk memaparkan hasil diskusi di depan kelas. Guru mengarahkan agar kelompok lain mencermati dan memotivasi siswa untuk mengajukan pertanyaan-pertanyaan kritis terkait paparan.</li><li>• Untuk memastikan pemahaman siswa tersebut, guru dapat memberikan masalah yang telah dipersiapkan guru sebelumnya.</li></ul>
3.	<p><b>Kegiatan Penutup</b></p> <p><b><i>Ayo Kita Menyimpulkan</i></b></p> <ol style="list-style-type: none"><li>a) Tindak lanjut dari paparan setiap kelompok belajar yang telah dipaparkan, arahkan siswa untuk menyampaikan kesimpulan yang diperolehnya.</li><li>b) Guru menegaskan/menyempurnakan kesimpulan yang diperoleh siswa, jika terdapat kekurangan.</li><li>c) Untuk memastikan pemahaman siswa, berikan penugasan kepada siswa melalui mengerjakan soal-soal pada Uji Kompetensi 1.2.</li></ol>



## Penilaian

### 1. Prosedur Penilaian

No.	Aspek yang dinilai	Teknik Penilaian	Waktu Penilaian
1	Berani bertanya	Pengamatan	Kegiatan inti
2	Berpendapat	Pengamatan	Kegiatan inti
3	Mau mendengar orang lain	Pengamatan	Kegiatan inti
4	Bekerja sama	Pengamatan	Kegiatan inti
5	Konsep	Tes Tertulis	Kegiatan penutup

### 2. Instrumen Penilaian Sikap

(Sikap Kinerja dalam Menyelesaikan Tugas Kelompok)

No.	Nama Peserta Didik	Aspek				Jumlah	Nilai
		Kerja Sama	Keaktifan	Menghargai Pendapat Teman	Tanggung Jawab		
1							
2							
3							
4							
...							

#### Keterangan Skor:

- 1 = (belum terlihat), apabila peserta didik belum memperlihatkan tanda-tanda awal perilaku sikap yang dinyatakan dalam indikator.
- 2 = (mulai terlihat), apabila peserta didik mulai memperlihatkan adanya tanda-tanda awal perilaku yang dinyatakan dalam indikator tetapi belum konsisten.
- 3 = (mulai berkembang), apabila peserta didik sudah memperlihatkan tanda perilaku yang dinyatakan dalam indikator dan mulai konsisten.
- 4 = (membudaya), apabila peserta didik terus-menerus memperlihatkan perilaku yang dinyatakan dalam indikator secara konsisten.

Skor maksimal = 16

$$\text{Nilai} = \frac{\text{skor perolehan}}{\text{skor maksimal}} \times 100\%$$



### 3. Instrumen Penilaian Pengetahuan

Contoh rubrik penilaian hasil penyelesaian soal oleh siswa. Dengan memper-  
timbang langkah-langkah penyelesaian soal yang dilakukan oleh siswa  
terhadap soal-soal yang diajukan guru, maka dapat disusun rubrik penilaiannya.  
Alternatif pedoman penskorannya sebagai berikut.

NO	ASPEK PENILAIAN	RUBRIK PENILAIAN	SKOR
1.	Pemahaman terhadap prinsip induksi matematika	Penyelesaian sesuai dengan prinsip induksi matematika	20
		Sudah menerapkan prinsip induksi matematika namun belum benar	10
		Tidak ada respon/jawaban	0
2.	Kebenaran jawaban akhir soal	Jawaban benar	40
		Jawaban hampir benar	30
		Jawaban salah	5
		Tidak ada respon/jawaban	0
3.	Proses perhitungan	Proses perhitungan benar	40
		Proses perhitungan sebagian besar benar	30
		Proses perhitungan sebagian kecil saja yang benar	20
		Proses perhitungan sama sekali salah	5
		Tidak ada respon/jawaban	0
Total		Skor maksimal	100

### 4. Instrumen Penilaian Keterampilan

(Penilaian kinerja dalam menyelesaikan tugas presentasi)

No.	Nama Peserta Didik	Aspek					Jumlah Skor	Nilai
		Komuni- kasi	Sistematika Penyampaian	Penguasaan Materi	Keberanian	Antusias		
1								
2								
3								
4								
5								
...								



### **Keterangan Skor:**

#### **Komunikasi:**

- 1 = Tidak dapat berkomunikasi
- 2 = Komunikasi agak lancar, tetapi sulit dimengerti
- 3 = Komunikasi lancar, tetapi kurang jelas dimengerti
- 4 = Komunikasi sangat lancar, benar, dan jelas

#### **Wawasan:**

- 1 = Tidak menunjukkan pengetahuan/materi
- 2 = Sedikit memiliki pengetahuan/materi
- 3 = Memiliki pengetahuan/materi tetapi kurang luas
- 4 = Memiliki pengetahuan/materi yang luas

#### **Antusias:**

- 1 = Tidak antusias
- 2 = Kurang antusias
- 3 = Antusias tetapi kurang kontrol
- 4 = Antusias dan terkontrol

#### **Sistematika Penyampaian:**

- 1 = Tidak sistematis
- 2 = Sistematis, uraian kurang, tidak jelas
- 3 = Sistematis, uraian cukup
- 4 = Sistematis, uraian luas, jelas

#### **Keberanian:**

- 1 = Tidak ada keberanian
- 2 = Kurang berani
- 3 = Berani
- 4 = Sangat berani

Skor maksimal = 20

$$\text{Nilai} = \frac{\text{skor perolehan}}{\text{skor maksimal}} \times 100\%$$



## G. Pengayaan

Bentuk pembelajaran pengayaan adalah pemberian asesmen portofolio tambahan yang memuat asesmen masalah autentik, proyek, keterampilan proses, *check up* diri, dan asesmen kerja sama kelompok. Sebelum asesmen ini dikembangkan, terlebih dahulu dilakukan identifikasi kemampuan belajar berdasarkan jenis serta tingkat kelebihan belajar peserta didik. Misalnya, belajar lebih cepat, menyimpan informasi lebih mudah, keingintahuan lebih tinggi, berpikir mandiri, superior dan berpikir abstrak, dan memiliki banyak minat. Pembelajaran pengayaan dapat dilaksanakan melalui belajar kelompok, belajar mandiri, bimbingan khusus dari guru dan para ahli (mentor).

Materi pembahasan pada pembelajaran pengayaan bertumpu pada pengembangan kompetensi dasar kelompok wajib tertera pada kurikulum 2013, termasuk pengembangan kompetensi dasar kelompok peminatan. Materi pembahasan dituangkan dalam asesmen masalah autentik, proyek, keterampilan proses, *check up* diri, dan asesmen kerja sama kelompok. Keterampilan yang dibangun melalui materi matematika yang dipelajari adalah kemampuan berpikir tingkat tinggi (berpikir kreatif dan kritis) serta kemampuan adaptif terhadap perubahan, penggunaan teknologi dan membangun kerjasama antar siswa dan orang lain yang lebih memahami masalah yang diajukan dalam asesmen.

## H. Remedial

Pembelajaran remedial membantu peserta didik yang mengalami kesulitan dalam belajar. Pembelajaran remedial adalah tindakan perbaikan pembelajaran bagi peserta didik yang belum mencapai standar kompetensi. Remedial bukan mengulang tes (ulangan harian) dengan materi yang sama, tetapi guru memberikan perbaikan pembelajaran pada KD yang belum dikuasai oleh peserta didik melalui upaya tertentu.

Bentuk pembelajaran remedial tergantung pada jumlah peserta didik yang mengalami kegagalan mencapai kompetensi dasar yang ditetapkan. Beberapa alternatif bentuk pelaksanaan pembelajaran remedial di sekolah.

1. Jika jumlah peserta didik yang mengikuti remedial lebih dari 50%, maka tindakan yang dilakukan adalah pemberian pembelajaran ulang dengan model dan strategi pembelajaran yang lebih inovatif berbasis pada berbagai kesulitan belajar yang dialami peserta didik yang berdampak pada peningkatan kemampuan untuk mencapai kompetensi dasar tertentu.



2. Jika jumlah peserta didik yang mengikuti remedial lebih dari 20% tetapi kurang dari 50%, maka tindakan yang dilakukan adalah pemberian tugas terstruktur baik secara berkelompok dan tugas mandiri. Tugas yang diberikan berbasis pada berbagai kesulitan belajar yang dialami peserta didik yang berdampak pada peningkatan kemampuan untuk mencapai kompetensi dasar tertentu.
3. Jika jumlah peserta didik yang mengikuti remedial maksimal 20%, maka tindakan yang dilakukan adalah pemberian bimbingan secara khusus, misalnya bimbingan perorangan oleh guru dan tutor sebaya.



# BAB 2

## Program Linear

### A. Kompetensi Inti

<b>Sikap</b>	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Menghargai dan menghayati ajaran agama yang dianutnya.</li><li>2. Menghayati dan mengamalkan perilaku jujur, disiplin, tanggung jawab, peduli (gotong royong, kerja sama, toleran, damai), santun, responsif dan pro-aktif dan menunjukkan sikap sebagai bagian dari solusi atas berbagai permasalahan dalam berinteraksi secara efektif dengan lingkungan sosial dan alam serta dalam menempatkan diri sebagai cerminan bangsa dalam pergaulan dunia.</li></ol>
<b>Pengetahuan</b>	<ol style="list-style-type: none"><li>3. Memahami, menerapkan, menganalisis pengetahuan faktual, konseptual, prosedural, dan metakognitif berdasarkan rasa ingin tahunya tentang ilmu pengetahuan, teknologi, seni, budaya, dan humaniora dengan wawasan kemanusiaan, kebangsaan, kenegaraan, dan peradaban terkait penyebab fenomena dan kejadian, serta menerapkan pengetahuan prosedural pada bidang kajian yang spesifik sesuai dengan bakat dan minatnya untuk memecahkan masalah.</li></ol>
<b>Keterampilan</b>	<ol style="list-style-type: none"><li>4. Mengolah, menalar, dan menyaji dalam ranah konkret dan ranah abstrak terkait dengan pengembangan dari yang dipelajarinya di sekolah secara mandiri, bertindak secara efektif dan kreatif serta mampu menggunakan metode sesuai kaidah keilmuan.</li></ol>



## B. Kompetensi Dasar dan Indikator

Kompetensi Dasar untuk bab program linear ini mengaju pada KD yang telah ditetapkan. Guru tentu harus mampu merumuskan indikator pencapaian kompetensi dari kompetensi dasar. Berikut ini disajikan indikator pencapaian kompetensi untuk materi program linear.

No.	Kompetensi Dasar	Indikator Pencapaian Kompetensi
1.	3.2 Menjelaskan pertidaksamaan linear dua variabel dan penyelesaiannya dengan menggunakan masalah kontekstual.	3.3.1 Mendefinisikan pertidaksamaan linear dua variabel. 3.3.2 Membentuk model matematika dari suatu masalah program linear yang kontekstual. 3.3.3 Menentukan penyelesaian suatu pertidaksamaan linear dua variabel. 3.3.4 Menemukan syarat pertidaksamaan memiliki penyelesaian. 3.3.5 Menemukan syarat pertidaksamaan tidak memiliki penyelesaian. 3.4.6 Mendefinisikan program linear dua variabel. 3.4.7 Mendefinisikan daerah penyelesaian suatu masalah program linear dua variabel. 3.4.8 Mendefinisi fungsi tujuan suatu masalah program linear dua variabel. 3.4.9 Menjelaskan garis selidik. 3.4.10 Menjelaskan nilai optimum suatu masalah program linear dua variabel.



2.	4.2 Menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan program linear dua variabel.	4.2.1 Membedakan pertidaksamaan linear dua variabel dengan pertidaksamaan linear lainnya. 4.2.2 Menyusun pertidaksamaan linear dua variabel dari suatu masalah kontekstual. 4.2.3 Menyelesaikan pertidaksamaan linear dua variabel. 4.2.4 Meyajikan grafik pertidaksamaan linear dua variabel. 4.2.5 Membentuk model matematika suatu masalah program linear dua variabel. 4.2.6 Menyelesaikan masalah program linear dua variabel. 4.2.7 Menerapkan garis selidik untuk menyelesaikan program linear dua variabel. 4.2.8 Menginterpretasikan penyelesaian yang ditemukan secara kontekstual.
----	--	--



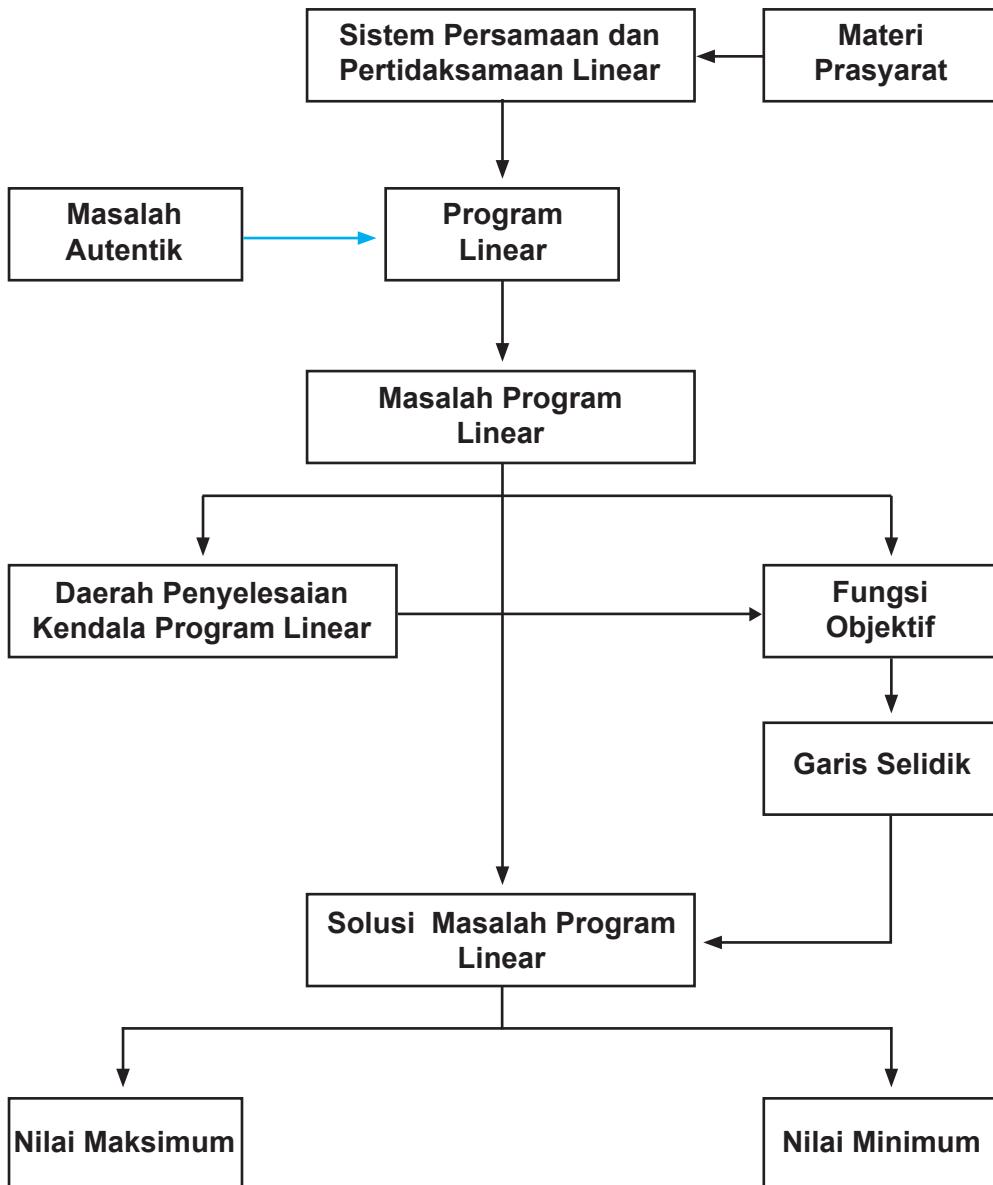
### C. Tujuan Pembelajaran

Melalui pengamatan, tanya jawab, penugasan individu dan kelompok, diskusi kelompok, dan penemuan (*discovery*) siswa mampu:

1. Menunjukkan sikap jujur, tertib, dan mengikuti aturan pada saat proses belajar berlangsung.
2. Menunjukkan sikap cermat dan teliti dalam menyelesaikan masalah-masalah program linear dua variabel.
3. Menjelaskan pertidaksamaan linear dua variabel.
4. Membentuk model matematika dari suatu masalah kontekstual.
5. Membedakan pertidaksamaan linear dua variabel dengan yang lainnya.
6. Menyelesaikan pertidaksamaan linear dua variabel baik secara analisis maupun secara geometris.
7. Menjelaskan definisi program linear dua variabel.
8. Membentuk model matematika dari suatu masalah program linear dua variabel.
9. Menjelaskan definisi daerah penyelesaian.
10. Menjelaskan fungsi tujuan.
11. Menyajikan grafik daerah penyelesaian dari suatu masalah program linear dua variabel.
12. Menggunakan garis selidik untuk menentukan nilai optimum suatu program linear.
13. Menginterpretasikan penyelesaian secara kontekstual.



#### D. Diagram Alir





## E. Proses Pembelajaran

Suatu proses pembelajaran akan berjalan dengan efektif jika guru sudah mengenali karakteristik peserta belajarnya. Adapun proses pembelajaran yang dirancang pada buku guru ini hanya pertimbangan bagi guru untuk merancang kegiatan belajar mengajar yang sesungguhnya. Oleh karena itu, diharapkan guru lebih giat dan kreatif lagi dalam mempersiapkan semua perangkat belajar mengajar.

### 2.1 Pertidaksamaan Linear Dua Variabel

#### Sebelum Pelaksanaan Kegiatan

1. Siswa diharapkan sudah membawa perlengkapan alat-alat tulis, seperti pulpen, pensil, pengapus, penggaris, kemas berpetak, dan lain-lain.
2. Bentuklah kelompok kecil siswa (2 – 3 orang) yang memungkinkan belajar secara efektif dan efisien.
3. Sediakan lembar kerja yang diperlukan siswa.
4. Sediakan kertas HVS secukupnya.

No.	Petunjuk Kegiatan Pembelajaran
1.	<b>Kegiatan Pendahuluan</b> Pada kegiatan pendahuluan guru: <ol style="list-style-type: none"><li>a) menyiapkan peserta didik secara psikis dan fisik untuk mengikuti proses pembelajaran;</li><li>b) memberi motivasi belajar siswa secara kontekstual sesuai manfaat dan aplikasi pertidaksamaan linear dua variabel dalam kehidupan sehari-hari, dengan memberikan contoh dan perbandingan lokal, nasional, dan internasional;</li><li>c) mengajukan pertanyaan-pertanyaan yang mengaitkan pengetahuannya dengan materi yang akan dipelajari; Misalnya, bagaimana konsep dalam menggambarkan suatu fungsi linear.</li><li>d) menjelaskan tujuan pembelajaran atau kompetensi dasar yang akan dicapai;</li><li>e) menyampaikan cakupan materi dan penjelasan uraian kegiatan sesuai silabus.</li></ol>



No.	Petunjuk Kegiatan Pembelajaran
2.	<p><b>Kegiatan Inti</b> Ayo kita mengamati</p> <p>a) Melalui kelompok belajar yang heterogen, arahkan untuk mencermati Masalah 2.1, Masalah 2.2, dan Masalah 2.3.</p> <p><b>Ayo Kita Menanya</b></p> <p>a) Siswa diberi ransangan untuk mengajukan pertanyaan-pertanyaan terkait Masalah 2.1, 2.2, dan Masalah 2.3. Jika tidak ada siswa yang mengajukan pertanyaan, guru harus mengajukan pertanyaan-pertanyaan kepada siswa untuk memastikan pemahaman siswa. Misalnya, pada Persamaan (2a), kenapa harus dituliskan <math>x &gt; 0</math> dan <math>y &gt; 0</math>?</p> <p><b>Ayo Kita Mengumpulkan Informasi</b></p> <p>a) Sebagai umpan balik aktivitas sebelumnya, siswa diminta untuk menemukan dan mengumpulkan informasi yang ditemukan pada masalah tersebut, sedemikian sehingga siswa dapat memahami model matematika yang disajikan pada Persamaan (2a), Persamaan (2b), dan Persamaan (2c).</p> <p>b) Arahkan siswa berdiskusi dalam kelompok belajar untuk menalar informasi yang disajikan pada Tabel 2.1, Tabel 2.2, dan Tabel 2.3.</p> <p><b>Ayo Kita Mengasosiasi</b></p> <p>a) Siswa perwakilan kelompok diminta menyajikan hasil pemahaman mereka dengan hubungan setiap data yang disajikan pada Tabel 2.1, Tabel 2.2, dan Tabel 2.3.</p> <p>b) Dengan menggunakan informasi pada Tabel 2.1, siswa diberi kesempatan menjawab pertanyaan berikut:</p> <ol style="list-style-type: none"><li>Menurut kamu, apa makna jika <math>x = -20.000</math> dan <math>y = -5.000</math>?</li><li>Untuk mengisi tabel di atas, berikan penjelasan jika <math>x = 0</math> dan <math>y = 90.000</math>.</li><li>Menurut kamu, berapa harga paling mahal satu baju dan harga paling mahal satu buku yang mungkin dibeli oleh Santi? Berikan penjelasan untuk jawaban yang kamu berikan.</li></ol> <p><b>Alternatif Penyelesaian</b></p> <ol style="list-style-type: none"><li>Secara analisis, <math>x = -20.000</math> dan <math>y = -5.000</math> memenuhi <math>2x + 3y &lt; 250.000</math>. Namun secara fakta, nilai <math>x</math> dan <math>y</math> itu tidak terjadi.</li><li>Pasangan nilai <math>x = 0</math> dan <math>y = 90.000</math> tidak merupakan penyelesaian untuk pertidaksamaan <math>2x + 3y &lt; 250.000</math></li><li>Harga maksimum satu seragam sekolah adalah Rp120.000. Akan tetapi, harga 1 buku harus harga paling minimum, dengan mempertimbangkan masih ada kembalian uangnya. Sebaliknya juga berlaku.</li></ol> <p>c) Dengan menggunakan konsep grafik fungsi linear, siswa dipastikan memahami Gambar 2.1, Gambar 2.2, dan Gambar 2.3.</p>



No.	Petunjuk Kegiatan Pembelajaran
	<p>d) Siswa diminta memberikan ide-ide tentang perbedaan penyelesaian pertidaksamaan secara analitis dan secara geometris.</p> <p>e) Siswa diminta menyampaikan hasil ide-ide yang diperoleh kegiatan diskusi kelompok.</p> <p>f) Tanpa melihat Definisi 2.1, siswa diminta menuliskan pemahaman mereka tentang pertidaksamaan linear dua variabel dan menentukan penyelesaiannya.</p> <p>g) Ujilah pemahaman siswa dengan meminta siswa mengerjakan Contoh 2.1, tanpa melihat penyelesaian yang disajikan pada buku siswa.</p>
3.	<p><b>Kegiatan Penutup</b> Ayo kita menyimpulkan</p> <p>a) Bersama dengan siswa menyimpulkan definisi pertidaksamaan linear dua variabel, seperti yang disajikan pada Definisi 2.1.</p> <p>b) Untuk meningkatkan pemahaman siswa, baik pengetahuan dan keterampilan, siswa diminta menjawab pertanyaan kritis berikut ini:</p> <ol style="list-style-type: none"><li>i. Apakah setiap pertidaksamaan memiliki himpunan penyelesaian? Berikan penjelasan atas jawaban kamu.</li><li>ii. Misalkan diberikan suatu himpunan penyelesaian suatu pertidaksamaan yang disajikan pada suatu grafik, bagaimana caranya membentuk pertidaksamaan yang memenuhi himpunan penyelesaian tersebut?</li></ol> <p><b>Alternatif Penyelesaian</b></p> <ol style="list-style-type: none"><li>i. Tidak semua sistem pertidaksamaan linear dua variabel memiliki penyelesaian. Hal ini dapat dikembang bahwa terdapat syarat suatu sistem persamaan linear dua variabel tidak memiliki penyelesaian.</li><li>ii. Konsep yang digunakan bagaimana menentukan persamaan suatu garis linear jika diketahui melalui dua titik.</li></ol> <p>c) Guru menyampaikan materi untuk dipelajari siswa pada pertemuan berikutnya.</p>



## Penilaian

### 1. Prosedur Penilaian Sikap

No.	Aspek yang dinilai	Teknik Penilaian	Waktu Penilaian
1	Berpikir Logis	Pengamatan	Kegiatan inti
2	Kritis	Pengamatan	Kegiatan inti

### 2. Instrumen Pengamatan Sikap

#### Berpikir Logis

1. Kurang baik jika sama sekali tidak berusaha mengajukan ide-ide logis dalam proses pembelajaran.
2. Baik jika menunjukkan sudah ada usaha untuk mengajukan ide-ide logis dalam proses pembelajaran.
3. Sangat baik jika mengajukan ide-ide logis dalam proses pembelajaran dalam proses pembelajaran secara terus menerus dan ajeg/konsisten.

#### Kritis

1. Kurang baik jika sama sekali tidak berusaha mengajukan ide-ide logis dengan kritis atau pertanyaan menantang dalam proses pembelajaran.
2. Baik jika menunjukkan sudah ada usaha untuk mengajukan ide-ide logis dengan kritis atau pertanyaan menantang dalam proses pembelajaran.
3. Sangat baik jika mengajukan ide-ide logis dengan kritis atau pertanyaan menantang dalam proses pembelajaran secara terus menerus dan ajeg/konsisten.

Berikan tanda ✓ pada kolom-kolom sesuai hasil pengamatan.

No.	Nama	Berpikir Logis			Kritis		
		SB	B	KB	SB	B	KB
1.							
2.							
3.							
...							
...							
...							
29.							
30.							

SB = Sangat Baik   B = Baik   KB = Kurang Baik



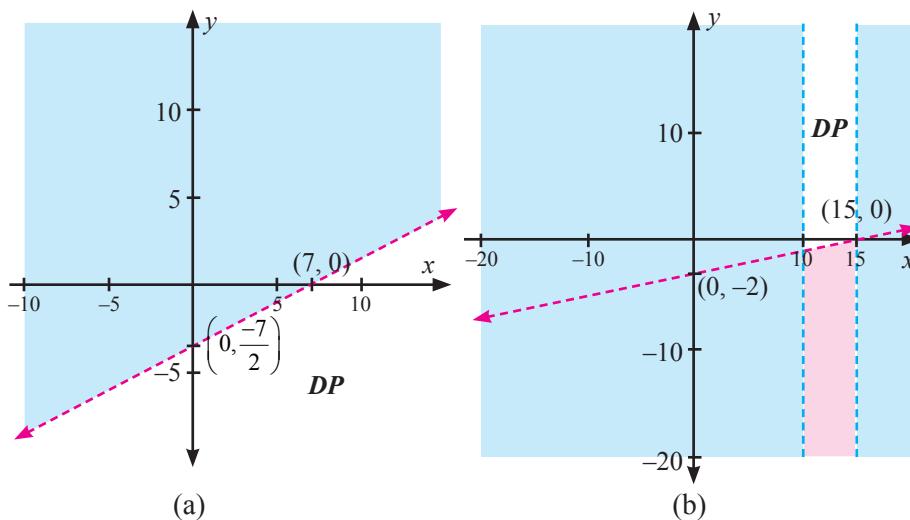
### 3. Instrumen Penilaian Pengetahuan dan Keterampilan

Petunjuk:

1. Kerjakan soal berikut secara individu, tidak boleh menyontek dan tidak boleh bekerja sama.

#### Latihan 2.1

1. Tanpa menggambar grafik, tentukanlah himpunan penyelesaian (jika ada) setiap pertidaksamaan di bawah ini.
  - a.  $2x - 9y \geq \frac{1}{2}$ .
  - b.  $x - 6y \geq 0$ .
  - c.  $\frac{2x}{y} \geq \frac{5}{4}$
  - d.  $\frac{x+3y}{3} \geq \frac{4x+2y}{2}$ .
  - e.  $\frac{5x+4y}{5} \geq \frac{2x-\frac{8y}{5}}{2}$
  - f.  $ax + by \geq c$ ;  $a, b, c$  bilangan real positif.
2. Untuk soal No.1, gambarkan setiap pertidaksamaan untuk menentukan daerah penyelesaian (jika ada).
3. Untuk setiap grafik di bawah ini, tentukanlah pertidaksamaan yang tepat memenuhi daerah penyelesaian.





4. PT Lasin adalah suatu pengembang perumahan di daerah pemukiman baru. PT tersebut memiliki tanah seluas 12.000 meter persegi berencana akan membangun dua tipe rumah, yaitu tipe mawar dengan luas 130 meter persegi dan tipe melati dengan luas 90 m<sup>2</sup>. Jumlah rumah yang akan dibangun tidak lebih 150 unit. Pengembang merancang laba tiap-tiap tipe rumah Rp2.000.000 dan Rp1.500.000. Modelkan permasalahan di atas! Kemudian gambarkan daerah penyelesaian untuk sistem pertidaksamaannya.

### Pedoman Penilaian Pengetahuan dan Keterampilan

No Soal	Aspek Penilaian	Rubrik Penilaian	Skor	Skor Maksimal
1.	Ketelitian dalam menghitung	Benar Salah Tidak ada jawaban	25 5 0	25
2.	Keterampilan menggambar-kan daerah penyelesaian	Benar Salah Tidak ada jawaban	25 5 0	25
3.	Ketelitian menghitung	Benar Salah Tidak ada jawaban	25 5 0	25
4.	Ketelitian dalam membentuk model	Benar Salah Tidak ada jawaban	25 5 0	25
Skor maksimal =			100	100
Skor minimal =			0	0

## 2.2 Program Linear

Dengan pengalaman belajar mengajar yang telah diperoleh pada pertemuan sebelumnya guru harus mempersiapkan sesuatu apapun yang menjadi kekurangan, termasuk cara psikologis mengatasi siswa yang belum mau bertanya.

Sebelum melakukan aktivitas belajar mengajar di kelas, hendaknya guru mempersiapkan:



### Sebelum Pelaksanaan Kegiatan

1. Bentuklah kelompok kecil siswa (4 – 5 orang) yang memungkinkan belajar secara efektif.
2. Identifikasi siswa-siswa yang biasanya agak sulit membuat pertanyaan.
3. Identifikasi pula bentuk bantuan apa yang perlu diberikan agar siswa akhirnya produktif membuat pertanyaan.
4. Sediakan tabel-tabel yang diperlukan bagi siswa untuk mengisikan hasil kerjanya.
5. Sediakan kertas HVS secukupnya.
6. Mungkin perlu diberikan contoh kritik, komentar, saran, atau pertanyaan terhadap suatu karya agar siswa bisa meniru dan mengembangkan lebih jauh sesuai dengan materinya.

No.	Petunjuk Kegiatan Pembelajaran
1.	<p><b>Kegiatan Pendahuluan</b> Pada kegiatan pendahuluan guru:</p> <ol style="list-style-type: none"><li>a) menyiapkan peserta didik secara psikis dan fisik untuk mengikuti proses pembelajaran;</li><li>b) memberi motivasi belajar siswa secara kontekstual sesuai manfaat dan aplikasi program linear dua variabel dalam kehidupan sehari-hari, dengan memberikan contoh dan perbandingan lokal, nasional, dan internasional;</li><li>c) mengajukan pertanyaan-pertanyaan yang mengaitkan pengetahuan sebelumnya dengan materi yang akan dipelajari; Misalnya, bagaimana menentukan penyelesaian pertidaksamaan linear dua variabel dan cara menggambarkan daerah penyelesaian;</li><li>d) menjelaskan tujuan pembelajaran atau kompetensi dasar yang akan dicapai;</li><li>e) menyampaikan cakupan materi dan penjelasan uraian kegiatan sesuai silabus.</li></ol>
2.	<p><b>Kegiatan Inti</b></p> <p><i>Ayo Kita Mengamati</i></p> <ol style="list-style-type: none"><li>a) Melalui kelompok belajar yang heterogen, arahkan untuk mencermati Masalah 2.4 dan Masalah 2.5.</li></ol> <p><i>Ayo Kita Menanya</i></p> <ol style="list-style-type: none"><li>a) Siswa diberi ransangan untuk mengajukan pertanyaan-pertanyaan terkait Masalah 2.4 dan Masalah 2.5. Jika tidak ada siswa yang mengajukan pertanyaan, guru harus mengajukan pertanyaan-pertanyaan kepada siswa untuk memastikan pemahaman siswa.</li></ol>



No.	Petunjuk Kegiatan Pembelajaran																				
<p><b>Ayo Kita Mengumpulkan Informasi</b></p> <p>a) Sebagai umpan balik aktivitas sebelumnya, siswa diminta untuk menemukan dan mengumpulkan informasi yang ditemukan pada masalah tersebut, sedemikian sehingga siswa dapat memahami model matematika yang disajikan pada Persamaan (1).</p> <p>b) Dengan keterampilan yang telah dimiliki siswa mengenai menggambarkan daerah penyelesaian suatu sistem pertidaksamaan linear dua variabel, siswa diharapkan mampu menggambar daerah penyelesaian Persamaan (1). Guru memperhatikan siswa yang mengalami kesulitan dan memberikan bantuan pada siswa yang mengalami kesulitan.</p> <p>c) Siswa diarahkan memahami langkah-langkah menggambarkan grafik suatu sistem pertidaksamaan linear dua variabel.</p> <p><b>Ayo Kita Mengasosiasi</b></p> <p>a) Untuk memastikan pemahaman siswa, siswa diarahkan untuk mengisi Tabel 2.5 dan membentuk model matematika Masalah 2.5.</p> <p style="text-align: center;"><b>Tabel 2.5: Alokasi setiap sumber yang tersedia</b></p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; margin: 10px 0;"> <thead> <tr> <th style="text-align: center;">Sumber</th> <th style="text-align: center;">Resistor</th> <th style="text-align: center;">Transistor</th> <th style="text-align: center;">Kapasitor</th> <th style="text-align: center;">Keuntungan</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Mesin A</td> <td style="text-align: center;">20</td> <td style="text-align: center;">10</td> <td style="text-align: center;">10</td> <td style="text-align: center;">Rp 50.000</td> </tr> <tr> <td>Mesin B</td> <td style="text-align: center;">10</td> <td style="text-align: center;">20</td> <td style="text-align: center;">30</td> <td style="text-align: center;">Rp 120.000</td> </tr> <tr> <td>Persediaan</td> <td style="text-align: center;">200</td> <td style="text-align: center;">120</td> <td style="text-align: center;">150</td> <td></td> </tr> </tbody> </table> <p>Misalkan <math>x</math>: banyak unit barang yang diproduksi mesin A  <math>y</math>: banyak unit barang yang diproduksi mesin B.</p> <p>Dengan melengkapi Tabel 2.5, kemudian kamu diminta membentuk model matematika masalah ini. Bandingkan hasil yang kamu peroleh dengan hasil yang ditemukan temanmu.</p> <p><b>Kendala Persediaan</b> ..... (1*)</p> $\left. \begin{array}{l} 20x + 10y \geq 200 \\ 10x + 20y \geq 120 \\ 10x + 30y \geq 150 \end{array} \right\} \leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y \geq 20 \\ x + 2y \geq 12 \\ x + 3y \geq 15 \end{array} \right\}$ <p>Karena banyak barang yang diproduksi tidak mungkin negatif, maka kita menuliskan kendala non-negatif:</p> <p><b>Kendala non-negatif</b> ..... (2*)</p> $\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$ <p>Artinya, untuk memenuhi persediaan, mungkin mesin A atau B tidak berproduksi.</p>	Sumber	Resistor	Transistor	Kapasitor	Keuntungan	Mesin A	20	10	10	Rp 50.000	Mesin B	10	20	30	Rp 120.000	Persediaan	200	120	150		
Sumber	Resistor	Transistor	Kapasitor	Keuntungan																	
Mesin A	20	10	10	Rp 50.000																	
Mesin B	10	20	30	Rp 120.000																	
Persediaan	200	120	150																		



No.	Petunjuk Kegiatan Pembelajaran
	<p>b) Ajukan pertanyaan-pertanyaan untuk setiap siswa yang memancing siswa untuk mengajukan pertanyaan-pertanyaan kritis, termasuk dalam menggambarkan daerah penyelesaian suatu sistem pertidaksamaan linear dua variabel.</p> <p>c) Untuk memastikan pemahaman siswa tersebut, siswa diberi kesempatan menyelesaikan Contoh 2.2 dengan atau tanpa melihat alternatif penyelesaian yang telah disajikan.</p>
3.	<p><b>Kegiatan Penutup</b> <i>Ayo kita menyimpulkan</i></p> <p>a) Dengan melihat model matematika yang terbentuk pada Masalah 2.4 dan Masalah 2.5, arahkan siswa untuk merumuskan definisi program linear dua variabel.</p> <p>b) Bersama dengan siswa menyimpulkan definisi program linear dua variabel dan daerah penyelesaian, seperti yang disajikan pada Definisi 2.2 dan Definisi 2.3.</p> <p>c) Menginformasikan materi selanjutnya, yaitu bagaimana menentukan nilai maksimum atau minimum fungsi tujuan suatu program linear dua variabel.</p> <p>d) Memberikan penugasan kepada siswa, yaitu mengerjakan soal Uji Kompetensi 2.1 nomor 5 hingga nomor 8.</p>

## Penilaian

### 1. Prosedur Penilaian Sikap

No.	Aspek yang dinilai	Teknik Penilaian	Waktu Penilaian
1	Analitis	Pengamatan	Kegiatan inti
2	Bekerja sama	Pengamatan	Kegiatan inti

### 2. Instrumen Pengamatan Sikap

#### Analitis

1. Kurang baik jika sama sekali tidak mengajukan pertanyaan-pertanyaan menantang atau memberikan ide-ide dalam menyelesaikan masalah selama proses pembelajaran.
2. Baik jika menunjukkan sudah ada usaha untuk mengajukan pertanyaan-pertanyaan menantang atau memberikan ide-ide dalam menyelesaikan masalah selama proses pembelajaran.
3. Sangat baik jika mengajukan pertanyaan-pertanyaan menantang atau memberikan ide-ide dalam menyelesaikan masalah selama proses pembelajaran secara terus menerus dan ajeg/konsisten.



### Bekerja Sama

1. Kurang baik jika sama sekali tidak menunjukkan sikap mau bekerja sama dengan temannya selama proses pembelajaran.
2. Baik jika menunjukkan sikap mau bekerja sama dengan temannya selama proses pembelajaran.
3. Sangat baik jika menunjukkan sikap mau bekerja sama dengan temannya selama proses pembelajaran secara terus menerus dan ajeg/konsisten.

Berikan tanda ✓ pada kolom-kolom sesuai hasil pengamatan.

No.	Nama	Analitis			Bekerja sama		
		SB	B	KB	SB	B	KB
1.							
2.							
3.							
...							
...							
...							
...							
29.							
30.							

SB = Sangat Baik   B = Baik   KB = Kurang Baik

### 3. Instrumen Penilaian Pengetahuan dan Keterampilan

Petunjuk:

1. Kerjakan soal berikut secara individu, tidak boleh menyontek dan tidak boleh bekerja sama.
2. Pilihlah jawaban soal, kemudian jawablah pertanyaan/perintah di bawahnya.



## Latihan 2.2

1. Suatu toko bunga menjual 2 macam rangkaian bunga. Rangkaian I memerlukan 10 tangkai bunga mawar dan 15 tangkai bunga anyelir. Rangkaian II memerlukan 20 tangkai bunga mawar dan 5 tangkai bunga anyelir. Persediaan bunga mawar dan bunga anyelir masing-masing 200 tangkai dan 100 tangkai. Rangkaian I dijual seharga Rp200.000, dan Rangkaian II dijual seharga Rp100.000 per rangkaian. (UN 2006 no. 21)  
Bentuk model matematika masalah di atas. Kemudian gambarkan grafik model matematikanya.
2. Perhatikan masalah yang dihadapi seorang penjaja buah-buahan berikut ini. Pak Benni, seorang penjaja buah-buahan yang menggunakan gerobak menjual apel dan pisang. Harga pembelian apel Rp18.000 tiap kilogram dan pisang Rp8.000 tiap kilogram. Beliau hanya memiliki modal Rp2.000.000, sedangkan muatan gerobak tidak lebih dari 450 kilogram. Padahal keuntungan tiap kilogram apel 2 kali keuntungan tiap kilogram pisang.  
Tentukanlah tiga titik yang terdapat pada grafik daerah penyelesaian masalah ini.

### Pedoman Penilaian Pengetahuan dan Keterampilan

No Soal	Aspek Penilaian	Rubrik Penilaian	Skor	Skor Maksimal
1.	Ketelitian dalam membentuk model matematika	Benar Salah Tidak ada jawaban	50 10 0	50
2.	Keterampilan dalam membentuk model dan menyelesaikan masalah	Benar Salah Tidak ada jawaban	50 10 0	50
Skor maksimal =			100	100
Skor minimal =			0	0



### 2.3 Nilai Optimum dengan Garis Selidik

Dengan pengalaman belajar mengajar yang telah diperoleh pada pertemuan sebelum, guru harus mempersiapkan sesuatu apapun yang menjadi kekurangan, termasuk cara psikologis mengatasi siswa yang belum mau bertanya.

Sebelum melakukan aktivitas belajar mengajar di kelas, hendaknya guru mempersiapkan:

#### Sebelum Pelaksanaan Kegiatan

1. Bentuklah kelompok kecil siswa (4 – 5 orang) yang memungkinkan belajar secara efektif.
2. Identifikasi siswa-siswa yang biasanya agak sulit membuat pertanyaan.
3. Identifikasi pula bentuk bantuan apa yang perlu diberikan agar siswa akhirnya produktif membuat pertanyaan.
4. Sediakan tabel-tabel yang diperlukan bagi siswa untuk mengisikan hasil kerjanya.
5. Sediakan kertas berpetak atau papan.
6. Kritik, komentar, saran, atau pertanyaan terhadap suatu karya agar siswa bisa meniru dan mengembangkan lebih jauh sesuai dengan materinya.

No.	Petunjuk Kegiatan Pembelajaran
1.	<b>Kegiatan Pendahuluan</b> Pada kegiatan pendahuluan guru: a) menyiapkan peserta didik secara psikis dan fisik untuk mengikuti proses pembelajaran; b) memberi motivasi belajar siswa secara kontekstual sesuai manfaat dan aplikasi menentukan nilai optimum dalam kehidupan sehari-hari, dengan memberikan contoh dan perbandingan lokal, nasional, dan internasional; c) mengajukan pertanyaan-pertanyaan yang mengaitkan pengetahuan sebelumnya dengan materi yang akan dipelajari; Misalnya, bagaimana menentukan daerah penyelesaian yang terbatas dan yang tidak terbatas. d) menjelaskan tujuan pembelajaran atau kompetensi dasar yang akan dicapai; e) menyampaikan cakupan materi dan penjelasan uraian kegiatan sesuai silabus.



No.	Petunjuk Kegiatan Pembelajaran
2.	<p><b>Kegiatan Inti</b></p> <p><i>Ayo mengamati</i></p> <p>a) Melalui kelompok belajar yang heterogen, arahkan untuk mencermati Masalah 2.6, dan Masalah 2.7.</p> <p><i>Ayo Menanya</i></p> <p>a) Guru mengajukan pertanyaan-pertanyaan pancingan kepada siswa, untuk memunculkan motivasi kepada siswa dalam mengajukan pertanyaan-pertanyaan kritis terkait Masalah 2.6 dan Masalah 2.7.</p> <p><i>Ayo Mengumpulkan Informasi</i></p> <p>a) Sebagai umpan balik aktivitas sebelumnya, siswa diminta untuk menemukan dan mengumpulkan informasi yang ditemukan pada masalah tersebut, sedemikian sehingga siswa dapat memahami model matematika yang untuk Masalah 2.6 dan Masalah 2.7.</p> <p>b) Arahkan siswa untuk memahami prosedur dalam menentukan nilai optimum fungsi tujuan suatu program linear dua variabel, yaitu dengan menemukan pasangan titik, sebut pasangan titik <math>(x, y)</math>, yang terdapat pada daerah penyelesaian sedemikian sehingga menjadikan fungsi tujuan bernilai optimum (memiliki nilai maksimum ataupun minimum).</p> <p><i>Ayo Mengasosiasi</i></p> <p>a) Berikan pancingan kepada siswa bahwa untuk menemukan nilai optimum fungsi tujuan suatu program linear dua variabel tidak selalu tepat dengan menguji nilai fungsi tujuan pada titik-titik sudut daerah penyelesaian. Hal ini, guru dapat memberikan contoh-contoh penyangkal.</p> <p>b) Berikan petunjuk kepada siswa bagaimana menemukan nilai optimum fungsi tujuan dengan metode garis selidik, yaitu dengan menggambarkan grafik fungsi pada saat melalui suatu titik pada daerah penyelesaian.</p>



No.	Petunjuk Kegiatan Pembelajaran
	<div data-bbox="414 439 1157 967" data-label="Figure"></div> <p data-bbox="465 1028 1099 1058"><b>Gambar 2.13:</b> Daerah penyelesaian yang memenuhi pertidaksamaan (3*)</p> <p data-bbox="400 1088 1223 1159">Pada kasus ini, kebetulan titik pembuat optimum fungsi tujuan terdapat di titik sudut daerah penyelesaian.</p> <p data-bbox="342 1159 1223 1260">c) Guru menegaskan kepada siswa bahwa titik pembuat optimum suatu fungsi tidak selalu berada pada titik sudut daerah penyelesaian. Seperti yang terjadi pada penyelesaian Masalah 2.7.</p> <p data-bbox="400 1260 1223 1320">Titik pembuat maksimumnya adalah titik <math>(1\frac{9}{11}, 7\frac{3}{11})</math>. Namun nilai <math>x</math> dan <math>y</math> tersebut tidak dapat ditemukan secara kontekstual. Dengan menggunakan prinsip pembulatan bilangan, terdapat kemungkinan sebagai berikut:</p> <ol data-bbox="400 1391 1223 1582" style="list-style-type: none"><li><math>B_1(1, 7)</math>: titik tersebut berada di luar daerah penyelesaian <math>OBA</math>.</li><li><math>B_2(1, 8)</math>: titik tersebut berada di luar daerah penyelesaian <math>OBA</math>.</li><li><math>B_3(2, 7)</math>: titik tersebut berada di dalam daerah penyelesaian <math>OBA</math>. Pada titik <math>(2, 7)</math> akan diperoleh keuntungan sebesar Rp34.500.000. Artinya, si pedagang mengalami kekurangan sebesar Rp45.450.</li><li><math>B_4(2, 8)</math>: titik tersebut berada di luar daerah penyelesaian <math>OBA</math>.</li></ol>



No.	Petunjuk Kegiatan Pembelajaran
3.	<p>Namun, dengan menyelidiki titik integer pada sekitar titik <math>(1\frac{9}{11}, 7\frac{3}{11})</math>, ditemukan titik pembuat maksimum fungsi tersebut, yaitu: titik (2, 7). Dengan melalui pembahasan Masalah 2.6 dan 2.7, ajak siswa untuk mendefinisikan garis selidik dan merumuskan langkah menentukan nilai optimum suatu fungsi tujuan dengan metode garis selidik.</p> <p><b>Kegiatan Penutup</b></p> <ol style="list-style-type: none"><li>Bersama dengan siswa menyimpulkan definisi garis selidik dan langkah-langkah menentukan nilai optimum suatu fungsi tujuan dengan metode garis selidik.</li><li>Menginformasikan materi selanjutnya, yaitu berbagai kasus dalam menentukan nilai optimum suatu fungsi tujuan.</li><li>Memberikan penugasan kepada siswa, yaitu mengerjakan soal Uji Kompetensi 2.2 nomor 1 hingga nomor 4.</li></ol>

## Penilaian

### 1. Prosedur Penilaian Sikap

No.	Aspek yang dinilai	Teknik Penilaian	Waktu Penilaian
1	Analitis	Pengamatan	Kegiatan inti
2	Kritis	Pengamatan	Kegiatan inti

### 2. Instrumen Pengamatan Sikap

#### Analitis

- Kurang baik jika sama sekali tidak mengajukan pertanyaan-pertanyaan menantang atau memberikan ide-ide dalam menyelesaikan masalah selama proses pembelajaran.
- Baik jika menunjukkan sudah ada usaha untuk mengajukan pertanyaan-pertanyaan menantang atau memberikan ide-ide dalam menyelesaikan masalah selama proses pembelajaran.
- Sangat baik jika mengajukan pertanyaan-pertanyaan menantang atau memberikan ide-ide dalam menyelesaikan masalah selama proses pembelajaran secara terus menerus dan ajeg/konsisten.



### Kritis

1. Kurang baik jika sama sekali tidak mengajukan pertanyaan-pertanyaan menantang kepada guru maupun temannya selama proses pembelajaran.
2. Baik jika mengajukan pertanyaan-pertanyaan menantang kepada guru maupun temannya selama proses pembelajaran.
3. Sangat baik jika mengajukan pertanyaan-pertanyaan menantang kepada guru maupun temannya selama proses pembelajaran secara terus-menerus dan ajeg/konsisten.

Berikan tanda ✓ pada kolom-kolom sesuai hasil pengamatan.

No.	Nama	Analitis			Kritis		
		SB	B	KB	SB	B	KB
1.							
2.							
3.							
...							
...							
...							
29.							
30.							

SB = Sangat Baik B = Baik KB = Kurang Baik

### 3. Instrumen Penilaian Pengetahuan dan Keterampilan

Petunjuk:

1. Kerjakan soal berikut secara individu, tidak boleh menyontek dan tidak boleh bekerja sama.
2. Pilihlah jawaban soal, kemudian jawablah pertanyaan/perintah di bawahnya.



### Latihan 2.3

- Gambarkan daerah penyelesaian untuk setiap kendala masalah program linear berikut ini.
  - $x - 4y \leq 0$ ;  $x - y \leq 2$ ;  $-2x + 3y \leq 6$ ;  $x \leq 10$
  - $x + 4y \leq 30$ ;  $-5x + y \leq 5$ ;  $6x - y \geq 0$ ;  $5x + y \leq 50$ ;  $x - 5y \leq 0$
  - $x + 4y \leq 0$ ;  $-5x + y \leq 5$ ;  $6x - y \geq 0$ ;  $5x + y \leq 50$ ;  $x + 5y \leq 0$
- Cermati pertidaksamaan  $ax + by \geq c$ .  
Untuk menentukan daerah penyelesaian pada bidang koordinat, selain dengan menggunakan uji titik, selidiki hubungan tanda koefisien  $x$  dan  $y$  terhadap daerah penyelesaian (bersih) pertidaksamaan.

#### Pedoman Penilaian Pengetahuan dan Keterampilan

No Soal	Aspek Penilaian	Rubrik Penilaian	Skor	Skor Maksimal
1.	Ketelitian menyajikan grafik	Benar Salah Tidak ada jawaban	50 10 0	50
2.	Keterampilan dalam membentuk model dan menyelesaikan masalah	Benar Salah Tidak ada jawaban	50 10 0	50
Skor maksimal =			100	100
Skor minimal =			0	0



## 2.4 Beberapa Kasus Daerah Penyelesaian

Materi ini mendeskripsikan bahwa banyak hal mungkin terjadi dengan mempertimbangkan daerah penyelesaian. Dengan membelajarkan ini semakin meningkatkan cara berpikir siswa dalam kajian program linear. Perlu diingatkan kembali, bahwa persiapan yang baik adalah kunci keberhasilan.

### Sebelum Pelaksanaan Kegiatan

1. Bentuklah kelompok kecil siswa (4 – 5 orang) yang memungkinkan belajar secara efektif.
2. Sediakan masalah-masalah yang akan diberikan kepada siswa.
3. Sediakan kertas seperlunya.
4. Sediakan tabel untuk penilaian.

No.	Petunjuk Kegiatan Pembelajaran
1.	<b>Kegiatan Pendahuluan</b> Pada kegiatan pendahuluan guru: <ol style="list-style-type: none"><li>a) menyiapkan peserta didik secara psikis dan fisik untuk mengikuti proses pembelajaran;</li><li>b) memberi motivasi belajar siswa secara kontekstual sesuai manfaat dan aplikasi menentukan nilai optimum dalam kehidupan sehari-hari, dengan memberikan contoh dan perbandingan lokal, nasional, dan internasional;</li><li>c) mengajukan pertanyaan-pertanyaan yang mengaitkan pengetahuan sebelumnya dengan materi yang akan dipelajari; Misalnya, apakah syarat supaya suatu fungsi tujuan memiliki nilai optimum.</li><li>d) menjelaskan tujuan pembelajaran atau kompetensi dasar yang akan dicapai;</li><li>e) menyampaikan cakupan materi dan penjelasan uraian kegiatan sesuai silabus.</li></ol>



No.	Petunjuk Kegiatan Pembelajaran
2.	<p data-bbox="308 391 463 419"><b>Kegiatan Inti</b></p> <p data-bbox="308 423 535 451"><i>Ayo Kita Mengamati</i></p> <p data-bbox="308 455 806 483">a) Arahkan untuk mencermati Gambar 2.14;</p> <div data-bbox="398 499 995 1064"></div> <p data-bbox="314 1096 1176 1124"><b>Gambar 2.14:</b> Sistem pertidaksamaan yang tidak memiliki daerah penyelesaian.</p> <p data-bbox="361 1128 917 1201">Grafik tersebut dibangun oleh sistem <math display="block">\begin{cases} 3x + 4y \leq 12 \\ 3x + 4y \geq 24 \end{cases}</math></p> <p data-bbox="308 1213 1182 1274">b) Guru mengingatkan siswa akan syarat dua garis sejajar seperti yang telah dipelajari pada saat SMP/MTS.</p> <p data-bbox="308 1306 515 1334"><i>Ayo Kita Menanya</i></p> <p data-bbox="308 1338 1182 1435">a) Arahkan siswa untuk mengajukan pertanyaan-pertanyaan yang berhubungan dengan Gambar 2.14. Jika siswa tidak mengajukan pertanyaan, guru harus mempersiapkan pertanyaan-pertanyaan yang akan diajukan pada siswa.</p> <p data-bbox="308 1467 704 1495"><i>Ayo Kita Mengumpulkan Informasi</i></p> <p data-bbox="308 1499 1182 1661">a) Siswa diarahkan menemukan hubungan perbandingan koefisien <math>x</math> dan <math>y</math> pada sistem tersebut. b) Bekerja sama dalam kelompok, arahkan siswa merancang suatu sistem pertidaksamaan yang memiliki hubungan perbandingan koefisien seperti yang disajikan pada Gambar 2.14.</p>



No.	Petunjuk Kegiatan Pembelajaran
	<p><b>Ayo Kita Mengasosiasi</b></p> <p>a) Bersama dengan siswa, guru menyimpulkan syarat suatu sistem pertidaksamaan tidak memiliki daerah penyelesaian. Karena tidak memiliki daerah penyelesaian, otomatis tidak dapat ditentukan nilai optimum.</p> <p>b) Arahkan siswa mengamati Gambar 2.15. Siswa ditugasi untuk menemukan sistem pertidaksamaan yang memenuhi daerah penyelesaian seperti yang ada pada Gambar 2.15, yaitu:</p> $2x + y \geq 4$ $2x + y \geq 8$ $x \geq 0, y \geq 2$ <p>c) Guru memberikan pancingan agar siswa mengajukan pertanyaan-pertanyaan kritis terkait Gambar 2.15. Misalnya berapa nilai maksimum fungsi tujuan? Berikan alasan untuk setiap jawaban yang diberikan.</p> <p>d) Arahkan siswa melalui diskusi untuk menemukan syarat suatu fungsi tujuan memiliki nilai minimum atau nilai maksimum. Mintalah penjelasan lebih lanjut untuk setiap jawaban setiap siswa.</p> <p>e) Untuk memastikan pemahaman siswa, guru memberikan penugasan kepada siswa untuk mendesaian suatu sistem pertidaksamaan yang memiliki nilai maksimum atau nilai minimum saja.</p> <p>f) Arahkan siswa untuk mengamati Gambar 2.16. Mintalah siswa mengumpulkan informasi tentang syarat suatu daerah penyelesaian memiliki nilai maksimum dan nilai minimum.</p>
3.	<p><b>Kegiatan Penutup</b></p> <p>a) Bersama dengan siswa menyimpulkan syarat-syarat suatu daerah penyelesaian belum tentu memiliki nilai maksimum dan/atau nilai minimum.</p> <p>b) Menginformasikan kepada siswa bahwa kajian program linear tidak berhenti hanya pada linear dua variabel saja.</p> <p>c) Memberikan penugasan kepada siswa, yaitu mengerjakan soal Uji Kompetensi 2.2 nomor 7, 10, dan 12.</p>

## F. Penilaian

### 1. Prosedur Penilaian Sikap

No.	Aspek yang dinilai	Teknik Penilaian	Waktu Penilaian
1	Analitis	Pengamatan	Kegiatan inti
2	Kritis	Pengamatan	Kegiatan inti



## 2. Instrumen Pengamatan Sikap

### Analitis

1. Kurang baik jika sama sekali tidak mengajukan pertanyaan-pertanyaan menantang atau memberikan ide-ide dalam menyelesaikan masalah selama proses pembelajaran.
2. Baik jika menunjukkan sudah ada usaha untuk mengajukan pertanyaan-pertanyaan menantang atau memberikan ide-ide dalam menyelesaikan masalah selama proses pembelajaran.
3. Sangat baik jika mengajukan pertanyaan-pertanyaan menantang atau memberikan ide-ide dalam menyelesaikan masalah selama proses pembelajaran. secara terus menerus dan ajeg/konsisten.

### Kritis

1. Kurang baik jika sama sekali tidak mengajukan pertanyaan-pertanyaan menantang kepada guru maupun temannya selama proses pembelajaran.
2. Baik jika mengajukan pertanyaan-pertanyaan menantang kepada guru maupun temannya selama proses pembelajaran.
3. Sangat baik jika mengajukan pertanyaan-pertanyaan menantang kepada guru maupun temannya selama proses pembelajaran secara terus menerus dan ajeg/konsisten.

Berikan tanda ✓ pada kolom-kolom sesuai hasil pengamatan.

No.	Nama	Analitis			Kritis		
		SB	B	KB	SB	B	KB
1.							
2.							
3.							
...							
...							
...							
29.							
30.							

SB = Sangat Baik B = Baik KB = Kurang Baik



### 3. Instrumen Penilaian Pengetahuan dan Keterampilan

Petunjuk:

1. Kerjakan soal berikut secara individu, tidak boleh menyontek dan tidak boleh bekerja sama.
2. Pilihlah jawaban soal kemudian jawablah pertanyaan/perintah di bawahnya.



#### **Latihan 2.4**

1. Pesawat penumpang mempunyai tempat duduk 48 kursi. Setiap penumpang kelas utama boleh membawa bagasi maksimum 60 kilogram sedangkan kelas ekonomi maksimum 20 kg. Pesawat hanya dapat membawa bagasi maksimum 1440 kg. Harga tiket kelas utama Rp150.000,00 dan kelas ekonomi Rp100.000,00. Supaya pendapatan dari penjualan tiket pada saat pesawat penuh mencapai maksimum, tentukan jumlah tempat duduk kelas utama. (UMPTN Tahun 2000 Rayon A).
2. Tentukan titik yang mengakibatkan fungsi linear  $f(x, y) = 2x - y - 4$  bernilai optimum (maksimum atau minimum) jika daerah asal dibatasi sebagai berikut  $-1 \leq x \leq 1$ ;  $-1 \leq y \leq 1$ . (Periksa nilai fungsi di beberapa titik daerah asal dan periksa bahwa nilai optimum tercapai pada suatu titik sudut daerah asal).



### Pedoman Penilaian

No Soal	Aspek Penilaian	Rubrik Penilaian	Skor	Skor Maksimal
1.	Keterampilan dalam membentuk model dan menyelesaikan masalah	Benar Salah Tidak ada jawaban	50 10 0	50
2.	Ketelitian menyajikan grafik	Benar Salah Tidak ada jawaban	50 10 0	50
Skor maksimal =			100	100
Skor minimal =			0	0

### G. Pengayaan

Pengayaan merupakan kegiatan yang diberikan kepada siswa yang memiliki akselerasi pencapaian KD yang cepat (nilai maksimal) agar potensinya berkembang optimal dengan memanfaatkan sisa waktu yang dimilikinya. Guru sebaiknya merancang kegiatan pembelajaran lanjut yang terkait dengan program linear.

### H. Remedial

Pembelajaran remedial pada hakikatnya adalah pemberian bantuan bagi peserta didik yang mengalami kesulitan atau kelambatan belajar. Pembelajaran remedial adalah tindakan perbaikan pembelajaran yang diberikan kepada peserta didik yang belum mencapai kompetensi minimalnya dalam satu kompetensi dasar tertentu.

Perlu dipahami oleh guru, bahwa remedial bukan mengulang tes (ulangan harian) dengan materi yang sama, tetapi guru memberikan perbaikan pembelajaran pada KD yang belum dikuasai oleh peserta didik melalui upaya tertentu. Setelah perbaikan pembelajaran dilakukan, guru melakukan tes untuk mengetahui apakah peserta didik telah memenuhi kompetensi minimal dari KD yang diremedialkan.



## 1. Kegiatan Proyek

Sehubungan dengan kegiatan proyek pada buku siswa, maka hal-hal yang perlu dilakukan oleh guru adalah sebagai berikut.

### Sebelum Pelaksanaan Kegiatan

1. Sediakan bahan-bahan yang dibutuhkan untuk kegiatan proyek kali ini, seperti buku-buku teks pelajaran atau pojok pustaka atau bahkan fasilitas internet.
2. Sediakan kertas HVS atau kertas asturo atau lainnya.
3. Bentuklah siswa dalam beberapa kelompok untuk membagi tugas dalam menjalankan tugasnya.
4. Guru membimbing siswa dalam menyusun langkah-langkah pelaksanaan proyek.
5. Selain itu, guru harus merancang bagaimana penilaian proyek hasil kerja siswa.



### Soal Proyek

Setiap manusia memiliki keterbatasan akan tenaga, waktu, dan tempat. Misalnya, dalam aktivitas belajar yang kamu lakukan setiap hari tentu kamu memiliki keterbatasan dengan waktu belajar di rumah, serta waktu yang kamu perlukan untuk membantu orang tuamu. Di sisi lain, kamu juga membutuhkan waktu yang cukup untuk istirahat setelah kamu melakukan aktivitas belajar dan aktivitas membantu orang tua.

Dengan kondisi tersebut, rumuskan model matematika untuk masalah waktu yang kamu perlukan setiap hari, hingga kamu dapat mengetahui waktu istirahat yang kamu peroleh setiap hari (minggu).

Selesaikan proyek di atas dalam waktu satu minggu.

Susun hasil kinerja dalam suatu laporan, sehingga kamu, temanmu, dan gurumu dapat memahami dengan jelas.



## J. Rangkuman

Beberapa hal penting yang perlu dirangkum terkait dengan konsep program linear.

1. Konsep program linear didasari oleh konsep persamaan dan pertidaksamaan bilangan real, sehingga sifat-sifat persamaan linear dan pertidaksamaan linear dalam sistem bilangan real banyak digunakan sebagai pedoman dalam menyelesaikan suatu masalah program linear.
2. Model matematika merupakan cara untuk menyelesaikan masalah kontekstual. Pembentukan model tersebut dilandasi oleh konsep berpikir logis dan kemampuan bernalar keadaan masalah nyata ke bentuk matematika.
3. Model matematika dari suatu masalah yang dinyatakan bentuk pertidaksamaan atau sistem pertidaksamaan dan/atau persamaan merupakan kendala suatu masalah program linear.
4. Pasangan-pasangan  $(x, y)$  disebut sebagai penyelesaian pada masalah suatu program linear jika memenuhi setiap pertidaksamaan yang terdapat pada kendala program linear.
5. Fungsi tujuan atau juga disebut fungsi sasaran atau fungsi objektif merupakan tujuan suatu masalah program linear, yang juga terkait dengan sistem pertidaksamaan program linear.
6. Suatu fungsi objektif (merupakan fungsi linear) terdefinisi pada daerah penyelesaian suatu masalah program linear. Fungsi objektif memiliki nilai jika sistem kendala memiliki daerah penyelesaian.
7. Garis selidik merupakan salah satu cara untuk menentukan nilai objektif suatu fungsi tujuan masalah program linear dua variabel. Garis selidik ini merupakan persamaan garis fungsi tujuan,  $ax + by = k$ , yang digeser di sepanjang daerah penyelesaian untuk menentukan nilai maksimum atau minimum suatu fungsi tujuan masalah program linear.



# BAB 3

## Matriks

### A. Kompetensi Inti

<b>Sikap</b>	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Menghargai dan menghayati ajaran agama yang dianutnya.</li><li>2. Menghayati dan mengamalkan perilaku jujur, disiplin, tanggung jawab, peduli (gotong royong, kerja sama, toleran, damai), santun, responsif dan pro-aktif dan menunjukkan sikap sebagai bagian dari solusi atas berbagai permasalahan dalam berinteraksi secara efektif dengan lingkungan sosial dan alam serta dalam menempatkan diri sebagai cerminan bangsa dalam pergaulan dunia.</li></ol>
<b>Pengetahuan</b>	<ol style="list-style-type: none"><li>3. Memahami, menerapkan, menganalisis pengetahuan faktual, konseptual, prosedural berdasarkan rasa ingin tahunya tentang ilmu pengetahuan, teknologi, seni, budaya, dan humaniora dengan wawasan kemanusiaan, kebangsaan, kenegaraan, dan peradaban terkait penyebab fenomena dan kejadian, serta menerapkan pengetahuan prosedural pada bidang kajian yang spesifik sesuai dengan bakat dan minatnya untuk memecahkan masalah.</li></ol>
<b>Keterampilan</b>	<ol style="list-style-type: none"><li>4. Mengolah, menalar, dan menyaji dalam ranah konkret dan ranah abstrak terkait dengan pengembangan dari yang dipelajarinya di sekolah secara mandiri, dan mampu menggunakan metode sesuai kaidah keilmuan.</li></ol>

### B. Kompetensi Dasar dan Indikator

Indikator Pencapaian Kompetensi pada kegiatan pembelajaran dapat dikembangkan oleh guru yang disesuaikan dari kondisi peserta didik dan lingkungan di tempat guru mengajar.



Berikut ini dipaparkan contoh Indikator Pencapaian Kompetensi yang dapat dijabarkan dari KD pengetahuan 3.3-3.4 dan KD Keterampilan 4.3-4.4.

Kompetensi Dasar	Indikator Pencapaian Kompetensi
3.3 Menjelaskan matriks dan kesamaan matriks dengan menggunakan masalah kontekstual dan melakukan operasi pada matriks yang meliputi penjumlahan, pengurangan, perkalian skalar, dan perkalian, serta transpos.	3.3.1 Mendefinisikan matriks. 3.3.2 Menunjukkan konsep kesamaan matriks. 3.3.3 Memahami operasi-operasi pada matriks.
3.4 Menganalisis sifat-sifat determinan dan invers matriks berordo $2 \times 2$ dan $3 \times 3$ .	3.4.1 Menyatakan determinan matriks. 3.4.2 Menyatakan invers matriks.
4.3 Menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan matriks dan operasinya.	4.3.1 Menyajikan model matematika dari suatu masalah nyata yang berkaitan dengan matriks dan menyatakan konsep kesamaan matriks. 4.3.2 Menyatakan operasi-operasi matriks.
4.4 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan determinan dan invers matriks berordo $2 \times 2$ dan $3 \times 3$ .	4.4.1 Menyajikan model matematika dari suatu masalah nyata yang berkaitan dengan determinan matriks. 4.4.2 Menyajikan model matematika dari suatu masalah nyata yang berkaitan dengan invers matriks.

### C. Tujuan Pembelajaran

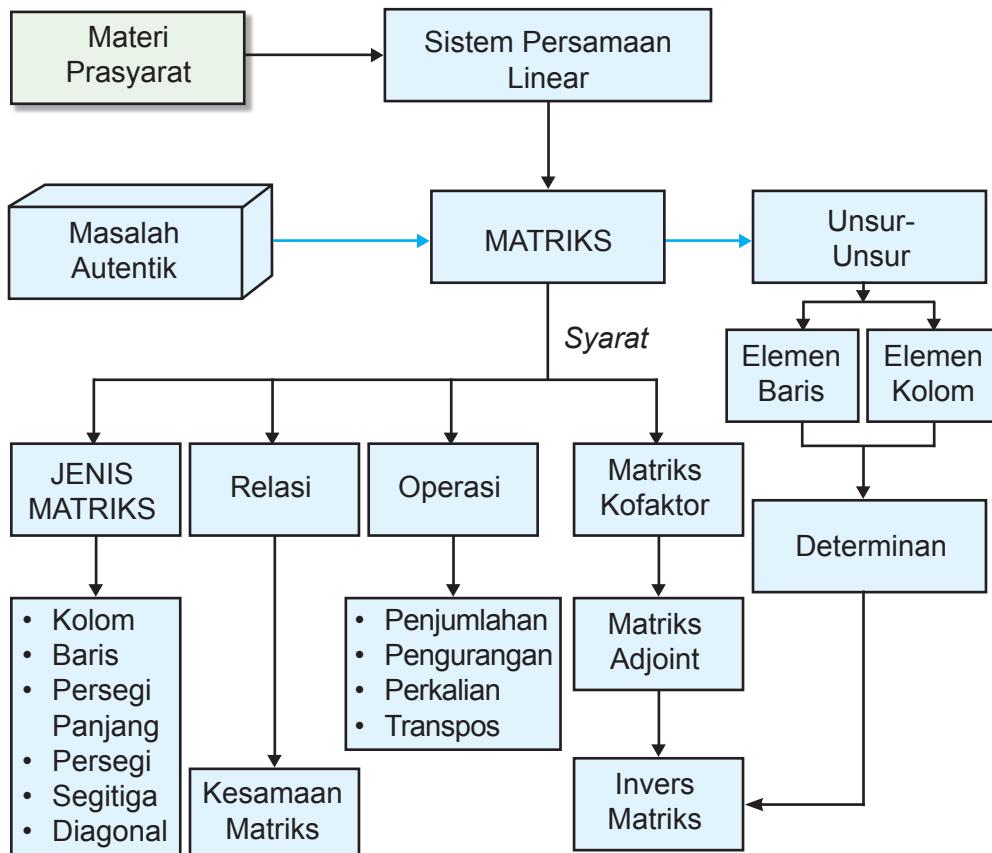
Pembelajaran materi matriks melalui pengamatan, tanya jawab, penugasan individu dan kelompok, diskusi kelompok, dan penemuan (*discovery*) diharapkan siswa dapat:

1. Melatih sikap sosial berani bertanya, berpendapat, mau mendengar orang lain, bekerja sama dalam diskusi di kelompok sehingga terbiasa berani bertanya, berpendapat, mau mendengar orang lain, bekerja sama dalam aktivitas sehari-hari.
2. Menunjukkan ingin tahu selama mengikuti proses.



3. Bertanggung jawab terhadap kelompoknya dalam menyelesaikan tugasnya.
4. Menjelaskan pengertian matriks.
5. Menjelaskan dengan kata-kata dan menyatakan masalah dalam sehari-hari yang berkaitan dengan matriks.
6. Menunjukkan konsep kesamaan matriks.
7. Memahami operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian matriks dengan bilangan skalar dan perkalian, serta transpos matriks.
8. Menyajikan determinan matriks.
9. Menyajikan invers matriks.
10. Menyajikan model matematika berkaitan dengan determinan dan invers matriks.

#### D. Diagram Alir





## E. Proses Pembelajaran

### 3.1 Membangun Konsep Matriks

Sebelum Pelaksanaan Kegiatan

1. Siswa diharapkan sudah membawa perlengkapan alat-alat tulis untuk pembelajaran.
2. Bentuklah kelompok kecil siswa yang memungkinkan belajar secara efektif dan efisien.
3. Sediakan tabel-tabel yang diperlukan bagi siswa untuk mengisikan hasil kerjanya pada tiap kegiatan yang dilaksanakan.

No.	Deskripsi Kegiatan
1.	<b>Kegiatan Pendahuluan</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• Pembelajaran dimulai dengan Salam dan Doa</li><li>• <i>Apersepsi</i><ol style="list-style-type: none"><li>1. Para siswa diperkenalkan dengan informasi berbagai bentuk baik tabel, jadwal transportasi, susunan benda, dan susunan angka.</li><li>2. Informasikan kepada siswa bahwa informasi seperti jadwal, susunan barang, dan susunan angka pada tabel dapat dibentuk menjadi beberapa susunan angka yang sederhana.</li><li>3. Berilah kesempatan kepada siswa untuk memikirkan bentuk susunan angka yang dibentuk.</li><li>4. Kemudian ajaklah siswa untuk memahami salah satu bentuk yang dapat dibuat seperti yang telah diuraikan pada buku siswa.</li><li>5. Berdasarkan masalah dan kegiatan yang diberikan pada buku siswa, instruksikan siswa agar mampu menemukan konsep matriks.</li><li>6. Berilah penilaian kepada siswa yang sedang melakukan aktivitas membuat susunan matriks.</li></ol></li></ul>
2.	<b>Kegiatan Inti</b> <i>Pengantar Pembelajaran</i> <ul style="list-style-type: none"><li>• Tumbuhkan motivasi internal dalam diri siswa melalui menunjukkan manfaat mempelajari matriks dalam kehidupan.</li><li>• Ajaklah siswa untuk memperhatikan dan memahami masalah pada buku siswa.</li></ul>



### Mengamati

- Arahkan siswa menemukan matriks dari berbagai situasi nyata yang dekat dengan kehidupan siswa.
- Guru memberikan kesempatan siswa untuk mengamati Masalah 3.1; 3.2 yaitu:

#### Masalah 3.1

Seorang wisatawan lokal hendak berlibur ke beberapa tempat wisata yang ada di pulau Jawa. Untuk memaksimalkan waktu liburan, dia mencatat jarak antar kota-kota tersebut sebagai berikut.

Bandung–Semarang	367 km
Semarang–Yogyakarta	115 km
Bandung–Yogyakarta	428 km

Tentukanlah susunan jarak antar kota tujuan wisata, seandainya wisatawan tersebut memulai perjalanannya dari Bandung! Kemudian berikan makna setiap angka dalam susunan tersebut.

#### Masalah 3.2

Manager supermarket ingin menata koleksi barang yang tersedia. Ubahlah bentuk susunan barang di supermarket di bawah ini menjadi matriks dan tentukan elemen-elemennya.

KOLEKSI Susu 10 (item)	KOLEKSI Roti dan Biskuit 20 (item)	KOLEKSI Permen dan Coklat 14 (item)
KOLEKSI Sabun 18 (item)	KOLEKSI Sampo dan Pasta Gigi 12 (item)	KOLEKSI Detergen 8 (item)
KOLEKSI Minyak Goreng 22 (item)	KOLEKSI Beras dan Tepung 6 (item)	KOLEKSI Bumbu 17 (item)

Gambar 3. 2: Susunan barang pada rak supermarket



### *Menanya*

- Siswa diupayakan untuk bertanya tentang hubungan susunan benda ataupun angka terhadap konsep matriks.
- Guru memastikan kelompok dapat bekerja sama dalam merumuskan konsep yang akan dicapai dengan melemparkan ataupun merangsang siswa untuk bertanya.

### *Menalar*

- Untuk mendapatkan penalaran terhadap konsep matriks, guru memberikan kesempatan siswa untuk melakukan Kegiatan 3.1, yaitu:

#### **Kegiatan 3.1**

1. Bentuklah kelompok yang masing-masing beranggotakan 3-4 orang.
2. Wawancaralah setiap anggota kelompok untuk mendapatkan informasi nilai siswa terhadap tiga mata pelajaran yang diminatinya.
3. Sajikan data yang diperoleh dalam bentuk tabel seperti di bawah ini.
4. Sajikan pula data tersebut dalam bentuk matriks dan jelaskan.

Nilai Siswa Nama Siswa	Pelajaran X	Pelajaran Y	Pelajaran Z
Siswa A	....	....	....
Siswa B	....	....	....
Siswa C	....	....	....

### *Mengomunikasikan*

- Mintalah siswa untuk berbagi hasil diskusi ke teman sebangku dan pastikan teman yang menerima hasil karya tersebut memahami apa yang harus dilakukan.
- Guru memberikan kesempatan siswa untuk dapat menyatakan sendiri konsep matriks dengan bahasa dan penyampaiannya sendiri.
- Guru memastikan siswa dapat menjelaskan jenis-jenis matriks.
- Guru memastikan siswa dapat memahami konsep kesamaan matriks.

### **3. Kegiatan Penutup**

- Periksalah apakah semua kelompok sudah mengumpulkan tugas dan apakah identitas kelompok sudah jelas.
- Berikan penilaian terhadap proses dan hasil karya siswa dengan menggunakan rubrik penilaian.
- Guru sebaiknya hanya mengonfirmasi akan kebenaran konsep matriks yang diperoleh siswa.



### 3.2 Jenis-Jenis Matriks

No.	Deskripsi Kegiatan
1.	<b>Kegiatan Pendahuluan</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• Pembelajaran dimulai dengan salam dan doa.</li><li>• Tumbuhkan motivasi internal dalam diri siswa melalui menunjukkan manfaat mempelajari matriks dalam kehidupan siswa.</li></ul>
2.	<b>Kegiatan Inti</b> <p><i>Mengamati</i></p> <ul style="list-style-type: none"><li>• Ajaklah siswa untuk memperhatikan dan memahami contoh 3.1.</li><li>• Arahkan siswa menemukan bentuk-bentuk matriks dari contoh 3.1.</li></ul> <p><b>Contoh 3.1</b></p> <p>Teguh, siswa kelas IX SMA Panca Budi, akan menyusun anggota keluarganya berdasarkan umur dalam bentuk matriks. Dia memiliki Ayah, Ibu, berturut-turut berumur 46 tahun dan 43 tahun. Selain itu dia juga memiliki kakak dan adik, secara berurut, Ningrum (22 tahun), Sekar (19 tahun), dan Wahyu (12 tahun). Dia sendiri berumur 14 tahun.</p> <p>Berbekal dengan materi yang dia pelajari di sekolah dan kesungguhan dia dalam berlatih, dia mampu mengkreasikan susunan matriks, yang merepresentasikan umur anggota keluarga Teguh, sebagai berikut (berdasarkan urutan umur dalam keluarga Teguh).</p> <p><i>Menanya</i></p> <ul style="list-style-type: none"><li>• Siswa diupayakan untuk bertanya tentang bentuk matriks alternatif lainnya yang dikembangkan dari contoh 3.1.</li></ul> <p><i>Menalar</i></p> <ul style="list-style-type: none"><li>• Untuk mendapatkan penalaran terhadap jenis-jenis matriks, guru memberikan kesempatan siswa untuk membentuk matriks lainnya.</li><li>• Berikan bentuk matriks lain untuk mendapatkan hubungan antar matriks.</li></ul> <p><i>Mengomunikasikan</i></p> <ul style="list-style-type: none"><li>• Mintalah siswa untuk berbagi hasil diskusi ke teman sebangku.</li><li>• Guru memberikan kesempatan siswa untuk dapat menyatakan sendiri jenis-jenis matriks dengan bahasa dan penyampaianya sendiri.</li><li>• Guru memastikan siswa dapat menjelaskan jenis-jenis matriks.</li><li>• Guru memastikan siswa dapat memahami konsep kesamaan matriks.</li></ul>



<b>3. Kegiatan Penutup</b>
<ul style="list-style-type: none"><li>• Berikan penilaian terhadap proses dan hasil karya siswa dengan menggunakan rubrik penilaian.</li><li>• Guru sebaiknya hanya mengkonfirmasi akan kebenaran konsep matriks yang diperoleh siswa.</li></ul>

### 3.3 Kesamaan Matriks

No.	Deskripsi Kegiatan
<b>1. Kegiatan Pendahuluan</b>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Pembelajaran dimulai dengan salam dan doa.</li><li>• Tumbuhkan motivasi internal dalam diri siswa melalui menunjukkan manfaat mempelajari matriks dalam kehidupan siswa.</li></ul>
<b>2. Kegiatan Inti</b>	<p><i>Mengamati</i></p> <ul style="list-style-type: none"><li>• Berikan siswabentuk-bentuk matriks.</li></ul> <p><i>Menanya</i></p> <ul style="list-style-type: none"><li>• Siswa diupayakan untuk bertanya tentang bentuk matriks yang sama.</li></ul> <p><i>Menalar</i></p> <ul style="list-style-type: none"><li>• Untuk mendapatkan penalaran terhadap jenis-jenis matriks, guru memberikan kesempatan siswa untuk membentuk matriks lainnya.</li><li>• Berikan bentuk matriks lain untuk mendapatkan hubungan antarmatriks dengan memberikan contoh 3.2, yaitu:</li></ul> <p><b>CONTOH 3.2</b></p> <p>Tentukan nilai <math>a</math>, <math>b</math>, <math>c</math>, dan <math>d</math> yang memenuhi matriks <math>P=Q</math>, dengan</p> $P = \begin{bmatrix} 2a-4 & 3b \\ d+2a & 2c \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \text{ dan } Q = \begin{bmatrix} b-5 & 3a-c & 4 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ <p><i>Mengomunikasikan</i></p> <ul style="list-style-type: none"><li>• Mintalah siswa untuk berbagi hasil diskusi pada teman sebangku.</li><li>• Guru memberikan kesempatan siswa untuk dapat menyatakan sendiri jenis-jenis matriks dengan bahasa dan penyampaiannya sendiri.</li><li>• Guru memastikan siswa dapat memahami konsep kesamaan matriks.</li></ul>



- |           |   |
|-----------|---|
| <b>3.</b> | <b>Kegiatan Penutup</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• Berikan penilaian terhadap proses dan hasil karya siswa dengan menggunakan rubrik penilaian.</li><li>• Guru sebaiknya hanya mengonfirmasi akan kebenaran konsep matriks yang diperoleh siswa.</li></ul> |
|-----------|---|

## Penilaian

### 1. Prosedur Penilaian:

No	Aspek yang dinilai	Teknik Penilaian	Waktu Penilaian
1.	Bekerja sama	Pengamatan	Kegiatan Inti
2.	Tanggung jawab	Pengamatan	Kegiatan Inti
3.	Konsep	Tes tertulis	Kegiatan penutup

### 2. Instrumen Pengamatan

#### Indikator perkembangan sikap bekerja sama:

1. Kurang baik jika sama sekali tidak mau bekerja sama dalam proses pembelajaran.
2. Baik jika menunjukkan sudah ada usaha mau bekerja sama dalam proses pembelajaran.
3. Sangat baik jika menunjukkan adanya kerja sama dalam proses pembelajaran secara terus menerus dan konsisten.

#### Indikator perkembangan sikap tanggung jawab (dalam kelompok)

1. Kurang baik jika menunjukkan sama sekali tidak ambil bagian dalam melaksanakan tugas kelompok.
2. Baik jika menunjukkan sudah ada usaha ambil bagian dalam melaksanakan tugas kelompok tetapi belum konsisten.
3. Sangat baik jika menunjukkan sudah ambil bagian dalam menyelesaikan tugas kelompok secara terus menerus dan konsisten.

Bubuhkan tanda  $\surd$  pada kolom-kolom sesuai hasil pengamatan.

No.	Nama	Bekerja Sama			Tanggung Jawab		
		SB	B	KB	SB	B	KB
1.							



No.	Nama	Bekerja Sama			Tanggung Jawab		
		SB	B	KB	SB	B	KB
2.							
3.							
...							
29							
30							

SB = Sangat Baik B = Baik KB = Kurang Baik

### 3. Instrumen Penilaian Pengetahuan dan Keterampilan:

Petunjuk:

- Kerjakan soal berikut secara individu, dilarang bekerja sama dan dilarang menyontek.
- Selesaikanlah soal-soal berikut ini.

**Soal:**

- Buatlah matriks yang terdiri dari 5 baris dan 3 kolom, dengan elemennya adalah 15 bilangan prima yang pertama.
- Untuk matriks-matriks berikut, tentukan pasangan-pasangan matriks yang sama.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}^t, \quad D = \begin{bmatrix} p & q & r \\ s & t & u \end{bmatrix}$$

### Pedoman Penilaian Pengetahuan dan Keterampilan

No. Soal	Aspek Penilaian	Rubrik Penilaian	Skor	Skor Maksimal
1.	Keterampilan membentuk model dan menyelesaikan masalah	Dijawab benar	25	25
		Dijawab salah	5	
		Tidak ada jawaban	0	



No. Soal	Aspek Penilaian	Rubrik Penilaian	Skor	Skor Maksimal
2.	Ketelitian dalam konsep	Dijawab benar	20	25
		Dijawab salah	5	
		Tidak ada jawaban	0	
		Skor maksimal =	50	50
		Skor minimal =	0	0

### 3.4 Operasi pada Matriks

Sebelum Pelaksanaan Kegiatan

1. Pastikan siswa sudah paham dengan konsep matriks dan elemen matriks.
2. Berikan motivasi pada siswa akan pentingnya belajar operasi matriks.
3. Pilih dan rancang masalah sederhana untuk membelajarkan operasi matriks.

No.	Deskripsi Kegiatan
1.	<b>Kegiatan Pendahuluan</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• <i>Apersepsi</i></li></ul>
2.	<b>Kegiatan Inti</b> <i>Pengantar Pembelajaran</i> <ul style="list-style-type: none"><li>• Tumbuhkan motivasi internal dalam diri siswa dengan memaparkan manfaat mempelajari operasi matriks dalam kehidupan siswa.</li><li>• Ajaklah siswa untuk memperhatikan dan memahami masalah pada buku siswa.</li><li>• Himbaulah siswa untuk memperhatikan masalah yang ada di sekitarnya yang dapat dimodelkan dalam bentuk matriks.</li></ul> <i>Mengamati</i> <ul style="list-style-type: none"><li>• Arahkan siswa mengamati setiap masalah-masalah yang berkaitan pada tiap-tiap operasi matriks, yaitu:</li></ul>



## 1. Penjumlahan

### Masalah 3.3

Toko kue berkonsep waralaba ingin mengembangkan usaha di dua kota yang berbeda. Manager produksi ingin mendapatkan data biaya untuk masing-masing kue seperti pada tabel berikut:

	<i>Brownies</i>	Bika Ambon
Bahan kue	1.000.000	1.200.000
Juru masak/ <i>Chef</i>	2.000.000	3.000.000

	<i>Brownies</i>	Bika Ambon
Bahan kue	1.500.000	1.700.000
Juru masak/ <i>chef</i>	3.000.000	3.500.000

Berapa total biaya yang diperlukan oleh kedua toko kue?

## 2. Pengurangan

### Masalah 3.4

Sebuah pabrik tekstil hendak menyusun tabel aktiva mesin dan penyusutan mesin selama 1 tahun yang dinilai sama dengan 10% dari harga perolehan sebagai berikut.

Jenis Aktiva	Harga perolehan (Rp)	Penyusutan tahun I (Rp)	Harga baku (Rp)
Mesin A	25.000.000	2.500.000	
Mesin B	65.000.000	6.500.000	
Mesin C	48.000.000	4.800.000	

## 3. Operasi Perkalian Skalar pada Matriks

### Contoh 3.5

a) Jika  $H = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ , maka  $2.H = \begin{bmatrix} 2 \times 2 & 2 \times 3 \\ 2 \times 4 & 2 \times 5 \\ 2 \times 1 & 2 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 10 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ .



$$\begin{aligned} \text{b) Jika } L &= \begin{bmatrix} 12 & 30 & 15 \\ 0 & 24 & 18 \\ 3 & -3 & -12 \end{bmatrix}, \text{ maka } \frac{1}{3} \cdot L = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \times 12 & \frac{1}{3} \times 30 & \frac{1}{3} \times 15 \\ \frac{1}{3} \times 0 & \frac{1}{3} \times 24 & \frac{1}{3} \times 18 \\ \frac{1}{3} \times 3 & \frac{1}{3} \times (-3) & \frac{1}{3} \times (-12) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 10 & 5 \\ 0 & 8 & 6 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) Jika } M &= \begin{bmatrix} 12 & 24 & 36 \\ 48 & 60 & 72 \end{bmatrix}, \text{ maka} \\ \frac{1}{4}M + \frac{3}{4}M &= \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \times 12 & \frac{1}{4} \times 24 & \frac{1}{4} \times 36 \\ \frac{1}{4} \times 48 & \frac{1}{4} \times 60 & \frac{1}{4} \times 72 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \times 12 & \frac{3}{4} \times 24 & \frac{3}{4} \times 36 \\ \frac{3}{4} \times 48 & \frac{3}{4} \times 60 & \frac{3}{4} \times 72 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & 15 & 18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 18 & 27 \\ 36 & 45 & 54 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 24 & 36 \\ 48 & 60 & 72 \end{bmatrix} = M. \end{aligned}$$

#### 4. Operasi Perkalian Dua Matriks

##### Masalah 3.5

Suatu perusahaan yang bergerak pada bidang jasa akan membuka tiga cabang besar di pulau Sumatera, yaitu cabang 1 di kota Palembang, cabang 2 di kota Padang, dan cabang 3 di kota Pekanbaru. Untuk itu, diperlukan beberapa peralatan untuk membantu kelancaran usaha jasa tersebut, yaitu *handphone*, komputer, dan sepeda motor. Di sisi lain, pihak perusahaan mempertimbangkan harga per satuan peralatan tersebut. Lengkapnya, rincian data tersebut disajikan sebagai berikut.

	<i>Handphone</i> (unit)	Komputer (unit)	Sepeda Motor (unit)
Cabang 1	7	8	3
Cabang 2	5	6	2
Cabang 3	4	5	2

Harga <i>Handphone</i> (juta)	2
Harga Komputer (juta)	5
Harga Sepeda Motor (juta)	15



Perusahaan ingin mengetahui total biaya pengadaan peralatan tersebut di setiap cabang.

Guru memberikan kesempatan siswa untuk merancang model matriks dari setiap permasalahan yang ada.

## 5. Tranpos Matriks

### Contoh 3.7

a) Jika  $A = \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ 30 & 25 \end{bmatrix}$ , maka  $A' = \begin{bmatrix} 15 & 30 \\ 5 & 25 \end{bmatrix}$

b) Jika  $S = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 14 \\ 18 & 12 & 8 \\ 22 & 6 & 17 \end{bmatrix}$ , maka transpos matriks  $S$ ,

adalah  $S' = \begin{bmatrix} 10 & 18 & 22 \\ 20 & 12 & 6 \\ 14 & 8 & 17 \end{bmatrix}$ .

Jika  $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 3 \\ 14 & 9 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 8 & 6 \\ 3 & 7 & 12 & 4 \end{bmatrix}$ , maka  $C' = \begin{bmatrix} 1 & 14 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & 5 & 7 \\ 5 & 4 & 8 & 12 \\ 3 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$ .

- Berilah kesempatan kepada siswa untuk mendiskusikan penyelesaian sederhana dari tiap operasi matriks tersebut.

### Menanya

- Siswa diupayakan untuk bertanya tentang solusi alternatif yang dapat ditemukan.
- Guru memastikan kelompok dapat bekerja sama dalam merumuskan konsep yang akan dicapai dengan melemparkan ataupun merangsang siswa untuk bertanya.

### Menalar

- Ajaklah siswa untuk mendiskusikan permasalahan yang terdapat pada setiap buku siswa sehingga diperoleh solusi-solusi untuk mengoperasikan matriks.
- Berikan contoh-contoh pada tiap-tiap operasi untuk lebih memahami tiap operasi matriks.



### *Mengomunikasikan*

- Mintalah siswa untuk *sharing* hasil karyanya pada teman dan pastikan semua siswa memahami proses dalam operasi matriks.
- Guru memberikan kesempatan kepada siswa untuk dapat menyatakan sendiri proses operasi matriks dengan bahasa dan penyampaiannya sendiri.
- Guru memastikan siswa dapat menjelaskan jenis-jenis operasi matriks.
- Guru memastikan siswa dapat memahami mana saja matriks yang tidak dapat dioperasikan.

### 3. Kegiatan Penutup

- Mintalah siswa untuk melakukan refleksi dan menuliskan hal penting dari yang dipelajarinya.
- Berikan penilaian terhadap proses dan hasil karya siswa dengan menggunakan rubrik penilaian.
- Jika dipandang perlu, berilah siswa latihan untuk dikerjakan di rumah.

## Penilaian

### 1. Prosedur Penilaian:

No	Aspek yang dinilai	Teknik Penilaian	Waktu Penilaian
1.	Berpikir Logis	Pengamatan	Kegiatan inti
2.	Kritis	Pengamatan	Kegiatan inti
3.	Konsep	Tes tertulis	Kegiatan penutup

### 2. Instrumen Pengamatan Sikap:

#### Berpikir Logis

1. Kurang baik jika sama sekali tidak berusaha mengajukan ide-ide logis dalam proses pembelajaran.
2. Baik jika menunjukkan sudah ada usaha untuk mengajukan ide-ide logis dalam proses pembelajaran.
3. Sangat baik jika mengajukan ide-ide logis dalam proses pembelajaran dalam proses pembelajaran secara terus menerus dan ajeg/konsisten.



### Kritis

1. Kurang baik jika sama sekali tidak berusaha mengajukan ide-ide logis dengan kritis atau pertanyaan menantang dalam proses pembelajaran.
2. Baik jika menunjukkan sudah ada usaha untuk mengajukan ide-ide logis dengan kritis atau pertanyaan menantang dalam proses pembelajaran.
3. Sangat baik jika mengajukan ide-ide logis dengan kritis atau pertanyaan menantang dalam proses pembelajaran secara terus menerus dan ajeg/konsisten.

Bubuhkan tanda  $\surd$  pada kolom-kolom sesuai hasil pengamatan.

No.	Nama	Berpikir			Tanggung jawab		
		SB	B	KB	SB	B	KB
1.							
2.							
3.							
...							
30							

SB = Sangat Baik    B = Baik    KB = Kurang Baik

### 3. Instrumen Penilaian Pengetahuan dan Keterampilan:

Petunjuk:

- a. Kerjakan soal berikut secara individu, dilarang bekerja sama dan dilarang menyontek.
- b. Selesaikanlah soal-soal berikut ini:

**Soal:**

1) Hasil penjumlahan matriks  $\begin{pmatrix} p+2 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & 6 \\ 6 & q+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$ . Tentukan nilai  $p$  dan  $q$ !

2) Diketahui matriks-matriks  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ ,  $C = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ,

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}' \text{ dan } F = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}'.$$



Dari semua matriks di atas, pasangan matriks manakah yang dapat dijumlahkan dan dikurangkan. Kemudian selesaikanlah!

- 3) Jika  $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ -4 & 10 & 9 \end{bmatrix}$ , dan  $X$  suatu matriks berordo  $2 \times 3$  serta memenuhi persamaan  $A + X = B$ .

Tentukan matriks  $X$ !

- 4) Tentukanlah hasil perkalian matriks-matriks berikut!

a.  $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & -4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot 15$

b.  $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 8 & 8 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

c.  $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d.  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

- 5) Diketahui matriks  $G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ , dan lima matriks yang dapat dipilih untuk dikalikan terhadap matriks  $G$ , yaitu:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \text{ dan } L = G^t.$$

Matriks yang manakah dapat dikalikan terhadap matriks  $G$ ? Kemudian tentukan hasilnya!

### Pedoman Penilaian

No. Soal	Aspek Penilaian	Rubrik Penilaian	Skor	Skor Maksimal
1.	Keterampilan menghitung	Dijawab benar	20	20
		Dijawab Salah	5	
		Tidak ada jawaban	0	



No. Soal	Aspek Penilaian	Rubrik Penilaian	Skor	Skor Maksimal
2.	Pemahaman konsep	Dijawab benar	20	20
		Dijawab Salah	5	
		Tidak ada jawaban	0	
3.	Keterampilan dan ketelitian menghitung	Dijawab benar	20	20
		Dijawab Salah	10	
		Tidak ada jawaban	0	
4.	Keterampilan dan ketelitian menghitung	Dijawab benar	20	20
		Dijawab Salah	10	
		Tidak ada jawaban	0	
5.	Pemahaman konsep	Dijawab benar	20	20
		Dijawab salah	10	
		Tidak ada jawaban	0	
		Skor maksimal =	100	100
		Skor minimal =	0	0

### 3.5 Determinan dan Invers Matriks

Sebelum Pelaksanaan Kegiatan

1. Pastikan siswa sudah paham dengan konsep matriks dan elemen matriks serta operasi matriks sebagai prasyarat, kemudian siswa juga dapat memahami determinan dan invers matriks.
2. Berikan motivasi pada siswa akan pentingnya belajar determinan dan invers matriks.
3. Pilih dan rancang masalah sederhana untuk membelajarkan determinan dan invers matriks.



No.	Deskripsi Kegiatan
1.	<b>Kegiatan Pendahuluan</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• <i>Apersepsi</i><ol style="list-style-type: none"><li>a. Memberi motivasi pentingnya materi ini.</li><li>b. Memberi informasi tentang kompetensi yang akan dicapai.</li></ol></li></ul>
2.	<b>Kegiatan Inti</b> <p>Sebelum melakukan kegiatan inti sebaiknya guru:</p> <ul style="list-style-type: none"><li>• Mengingatkan kembali tentang pengertian matriks dan elemen matriks.</li><li>• Mengingatkan kembali tentang operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan transpos matriks.</li><li>• Ajak siswa untuk mengamati dan mendiskusikan beberapa contoh dan masalah yang diberikan.</li></ul> <p><i>Mengamati</i></p> <ul style="list-style-type: none"><li>• Arahkan siswa siswa mengamati setiap masalah-masalah pada buku siswa yang berkaitan dengan determinan dan invers matriks, seperti:<ol style="list-style-type: none"><li>1. <b>Determinan</b><p><b>Masalah 3.6</b></p><p>Siti dan teman-temannya makan disebuah warung. Mereka memesan 3 ayam penyet dan 2 gelas es jeruk di kantin sekolahnya. Tak lama kemudian, Beni dan teman-temannya datang memesan 5 porsi ayam penyet dan 3 gelas es jeruk. Siti menantang Amir menentukan harga satu porsi ayam penyet dan harga es jeruk per gelas, jika Siti harus membayar Rp.70.000,00 untuk semua pesannya dan Beni harus membayar Rp.115.000,00 untuk semua pesannya.</p><p><b>Masalah 3.7</b></p><p>Sebuah perusahaan penerbangan menawarkan perjalanan wisata ke negara A, perusahaan tersebut mempunyai tiga jenis pesawat yaitu Airbus 100, Airbus 200, dan Airbus 300. Setiap pesawat dilengkapi dengan kursi penumpang untuk kelas turis, ekonomi, dan VIP.</p></li></ol></li></ul>



Jumlah kursi penumpang dari tiga jenis pesawat tersebut disajikan pada tabel berikut.

<b>Kategori</b>	<b>Airbus 100</b>	<b>Airbus 200</b>	<b>Airbus 300</b>
Kelas Turis	50	75	40
Kelas Ekonomi	30	45	25
Kelas VIP	32	50	30

Perusahaan telah mendaftarkan jumlah penumpang yang mengikuti perjalanan wisata ke negara A seperti pada tabel berikut.

<b>Kategori</b>	<b>Jumlah Penumpang</b>
Kelas Turis	305
Kelas Ekonomi	185
Kelas VIP	206

Berapa banyak pesawat yang harus dipersiapkan untuk perjalanan tersebut?

- Guru memberikan kesempatan siswa untuk merancang model determinan matriks dari setiap permasalahan yang ada.
- Berilah kesempatan kepada siswa untuk mendiskusikan penyelesaian sederhana dari model determinan matriks tersebut.

#### *Menanya*

- Siswa diupayakan untuk bertanya tentang solusi alternatif yang dapat ditemukan.
- Guru memastikan kelompok dapat bekerja sama dalam merumuskan konsep yang akan dicapai dengan melemparkan ataupun merangsang siswa untuk bertanya.

#### *Menalar*

- Ajaklah siswa untuk mendiskusikan permasalahan yang terdapat pada setiap buku siswa sehingga diperoleh penyelesaian yang berkaitan dengan determinan matriks.

#### *Mengomunikasikan*

- Mintalah siswa untuk berbagi hasil karyanya pada teman dan pastikan semua siswa memahami prosedur penyelesaian determinan matriks.
- Guru memberikan kesempatan siswa untuk dapat menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan matriks.



	<ul style="list-style-type: none"><li>Guru memastikan siswa menemukan solusi-solusi alternatif dari aplikasi matriks.</li></ul>
<b>3. Kegiatan Penutup</b>	<ul style="list-style-type: none"><li>Mintalah siswa untuk melakukan refleksi dan menuliskan hal penting dari yang dipelajarinya.</li><li>Berikan penilaian terhadap proses dan hasil karya siswa dengan menggunakan rubrik penilaian.</li><li>Jika dipandang perlu, berilah siswa Uji Kompetensi 3.2 untuk dikerjakan di rumah.</li><li>Doa dan salam.</li></ul>

## Penilaian

### 1. Prosedur Penilaian:

No	Aspek yang dinilai	Teknik Penilaian	Waktu Penilaian
1.	Logis	Pengamatan	Kegiatan Ayo Kita Amati dan Bertanya
2.	Kreatif	Pengamatan	Kegiatan Ayo Kita Mencoba dan Berbagi
3.	Pemahaman Konsep	Tes Tertulis	Kegiatan Penutup

### 2. Instrumen Pengamatan Sikap:

#### Berpikir Logis

- Kurang baik jika sama sekali tidak berusaha mengajukan ide-ide logis dalam proses pembelajaran.
- Baik jika menunjukkan sudah ada usaha untuk mengajukan ide-ide logis dalam proses pembelajaran.
- Sangat baik jika mengajukan ide-ide logis dalam proses pembelajaran dalam proses pembelajaran secara terus menerus dan ajeg/konsisten.

#### Kritis

- Kurang baik jika sama sekali tidak berusaha mengajukan ide-ide logis dengan kritis atau pertanyaan menantang dalam proses pembelajaran.
- Baik jika menunjukkan sudah ada usaha untuk mengajukan ide-ide logis dengan kritis atau pertanyaan menantang dalam proses pembelajaran.



3. Sangat baik jika mengajukan ide-ide logis kritis atau pertanyaan menantang dalam proses pembelajaran secara terus menerus dan ajeg/konsisten.

Bubuhkan tanda  $\checkmark$  pada kolom-kolom sesuai hasil pengamatan.

No.	Nama	Berpikir Logis			Kritis		
		SB	B	KB	SB	B	KB
1.							
2.							
3.							
...							
30							

SB = Sangat Baik B = Baik KB = Kurang Baik

### 3. Instrumen penilaian:

Petunjuk:

- Kerjakan soal berikut secara individu, dilarang bekerja sama dan dilarang menyontek.
- Selesaikanlah soal-soal berikut ini:

**Soal:**

- Misalkan  $A$  matriks persegi. Jika pertukaran elemen-elemen sebarang dua baris atau dua kolom dari matriks  $A$ , maka buktikan bahwa nilai determinannya berubah tanda.
- Jika  $B$  matriks persegi dengan  $\det B \neq 0$ , tunjukkan bahwa  $[B^t]^{-1} = [B^{-1}]^t$ .
- Selidiki bahwa  $\det(C + D) = \det C + \det D$  untuk setiap matriks persegi  $C$  dan  $D$ .
- Masalah alokasi sumber daya.  
Agen perjalanan menawarkan paket perjalanan ke Bali. Paket I terdiri atas 4 malam menginap, 3 tempat wisata, dan 5 kali makan. Paket II dengan 3 malam menginap, 4 tempat wisata, dan 7 kali makan. Paket III dengan 5 malam menginap, 4 tempat wisata, dan tidak ada makan. Sewa hotel Rp 400.000,00 per malam, transportasi ke tiap tempat wisata Rp80.000,00, dan makan di restoran yang ditunjuk Rp90.000,00.



- a. Nyatakan matriks harga sewa hotel, transportasi dan makan.
  - b. Nyatakan matriks paket yang ditawarkan.
  - c. Dengan menggunakan perkalian matriks, tentukan matriks biaya untuk tiap paket.
  - d. Paket mana yang menawarkan biaya termurah?
5. Dengan menggunakan matriks persegi, tunjukkan bahwa  $(B^{-1})^{-1} = B$ .

### Pedoman Penilaian

No. Soal	Aspek Penilaian	Rubrik Penilaian	Skor	Skor Maksimal
1.	Pemahaman konsep	Benar	20	20
		Salah	10	
		Tidak ada jawaban	0	
2.	Keterampilan menguraikan	Benar	20	20
		Salah	10	
		Tidak ada jawaban	0	
3.	Keterampilan menguraikan	Benar	20	20
		Salah	7	
		Tidak ada jawaban	0	
4.	Keterampilan dan ketelitian menghitung	Benar	20	20
		Salah	10	
		Tidak ada jawaban	0	
5.	Keterampilan dan ketelitian menguraikan	Benar	20	20
		Salah	10	
		Tidak ada jawaban	0	
		Skor maksimal =	100	100
		Skor minimal =	0	0



## F. Pengayaan

Pengayaan merupakan kegiatan yang diberikan kepada siswa yang memiliki akselerasi pencapaian KD yang cepat (nilai maksimal) agar potensinya berkembang optimal dengan memanfaatkan sisa waktu yang dimilikinya. Guru sebaiknya merancang kegiatan pembelajaran lanjut yang terkait dengan matriks pada siswa.

## G. Remedial

Remedial merupakan perbaikan proses pembelajaran yang bertujuan pada pencapaian kompetensi dasar siswa. Guru memberikan perbaikan pembelajaran baik pada model, metode, serta strategi pembelajaran. Jika guru melakukan pembelajaran dengan pola yang sama tidaklah maksimal sehingga disarankan guru memilih tindakan pembelajaran yang tepat sehingga siswa mampu memenuhi KD yang diharapkan.

Perlu dipahami oleh guru, bahwa remedial bukan mengulang tes (ulangan harian) dengan materi yang sama, tetapi guru memberikan perbaikan pembelajaran pada KD yang belum dikuasai oleh peserta didik melalui upaya tertentu. Setelah perbaikan pembelajaran dilakukan, guru melakukan tes untuk mengetahui apakah peserta didik telah memenuhi kompetensi minimal dari KD yang diremedialkan.

## H. Penyelesaian Soal-Soal Uji Kompetensi

### UJI KOMPETENSI – 3.1

- 18, 16, 8
  - 14, 8, 17
  - 22
  - 14
  - ordo matriks
- 
- Matriks yang dapat dibentuk antara lain:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 11 & 13 \\ 17 & 19 & 23 \\ 29 & 31 & 37 \\ 39 & 41 & 43 \end{bmatrix}$$



4. -
5.  $p = -3$  dan  $q = -3$
6. -
7.  $p = 1$  dan  $q = 12$
8. -
9.  $X = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -6 & 6 & 3 \end{bmatrix}$
10. -
11. Gunakan prinsip perkalian dua matriks.
12. -
13. a.  $T = \begin{bmatrix} -2a & b+c & e-2d \\ a-2b & 3d+c & e-3f \end{bmatrix}$ 
  - b.  $a = -4; b = -3; c = 7; d = 1; e = 2; \text{ dan } f = \frac{1}{3}$
14. -
15. a. Paket I : Rp1.120.000,00  
Paket II : Rp1.775.000,00  
Paket III : Rp820.000,00
  - b. Paket III adalah paket dengan harga termurah.

### UJI KOMPETENSI – 3.2

1. a. 68
  - b.  $34x$
  - c. 3
  - d. 4
2. -
3. Nilai  $z = 0$  atau  $z = -1$
4. -
5.  $z = -3$
6. -
7. Determinan = 0
8. -
9. -
10. -



- 11.
12. –
- 13.
14. –
- 15.

## I. Rangkuman

Setelah selesai membahas materi matriks di atas, ada beberapa hal penting sebagai kesimpulan yang dijadikan pegangan dalam mendalami dan membahas materi lebih lanjut, antara lain:

1. Matriks adalah susunan bilangan-bilangan dalam baris dan kolom.
2. Sebuah matriks  $A$  ditransposkan menghasilkan matriks  $A'$  dengan elemen baris matriks  $A$  berubah menjadi elemen kolom matriks  $A'$ . Dengan demikian matriks  $A'$  ditransposkan kembali, hasilnya menjadi matriks  $A$  atau  $(A')^t = A$ .
3. Penjumlahan sebarang matriks dengan matriks identitas penjumlahan hasilnya matriks itu sendiri. Matriks identitas penjumlahan adalah matriks nol.
4. Hasil kali sebuah matriks dengan suatu skalar atau suatu bilangan real  $k$  akan menghasilkan sebuah matriks baru yang berordo sama dan memiliki elemen-elemen  $k$  kali elemen-elemen matriks semula.
5. Dua buah matriks hanya dapat dikalikan apabila banyaknya kolom matriks yang dikali sama dengan banyaknya baris matriks pengalinya.
6. Hasil perkalian matriks  $A$  dengan matriks identitas perkalian, adalah matriks  $A$ .
7. Hasil kali dua buah matriks menghasilkan sebuah matriks baru, yang elemen-elemennya merupakan hasil kali elemen baris matriks  $A$  dan elemen kolom matriks  $B$ . Misal jika  $A_{p \times q}$  dan  $B_{q \times r}$  adalah dua matriks, maka berlaku  $A_{p \times q} \times B_{q \times r} = C_{p \times r}$ .
8. Matriks yang memiliki invers adalah matriks persegi dengan nilai determinannya tidak nol (0).



# BAB 4

## Transformasi

### A. Kompetensi Inti

<b>Sikap</b>	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Menghargai dan menghayati ajaran agama yang dianutnya.</li><li>2. Menghayati dan mengamalkan perilaku jujur, disiplin, tanggung jawab, peduli (gotong royong, kerja sama, toleran, damai), santun, responsif dan pro-aktif dan menunjukkan sikap sebagai bagian dari solusi atas berbagai permasalahan dalam berinteraksi secara efektif dengan lingkungan sosial dan alam serta dalam menempatkan diri sebagai cerminan bangsa dalam pergaulan dunia.</li></ol>
<b>Pengetahuan</b>	<ol style="list-style-type: none"><li>3. Memahami, menerapkan, menganalisis pengetahuan faktual, konseptual, prosedural berdasarkan rasa ingin tahunya tentang ilmu pengetahuan, teknologi, seni, budaya, dan humaniora dengan wawasan kemanusiaan, kebangsaan, kenegaraan, dan peradaban terkait penyebab fenomena dan kejadian, serta menerapkan pengetahuan prosedural pada bidang kajian yang spesifik sesuai dengan bakat dan minatnya untuk memecahkan masalah.</li></ol>
<b>Keterampilan</b>	<ol style="list-style-type: none"><li>4. Mengolah, menalar, dan menyaji dalam ranah konkret dan ranah abstrak terkait dengan pengembangan dari yang dipelajarinya di sekolah secara mandiri, dan mampu menggunakan metode sesuai kaidah keilmuan.</li></ol>

### B. Kompetensi Dasar dan Indikator

Indikator pencapaian kompetensi pada pembelajaran dapat dikembangkan guru sendiri berdasarkan kondisi peserta didik masing-masing di tempat guru mengajar.

Berikut ini dipaparkan contoh Indikator Pencapaian Kompetensi Pembelajaran yang dapat dijabarkan dari KD 3.5 dan KD 4.5.



Kompetensi Dasar	Indikator Pencapaian Kompetensi
3.5 Menganalisis dan membandingkan transformasi dan komposisi transformasi dengan menggunakan matriks.	3.5.1 Menyebutkan contoh translasi, refleksi, rotasi, dan dilatasi dalam kehidupan sehari-hari. 3.5.2 Menemukan sifat-sifat translasi, refleksi, rotasi, dan dilatasi berdasarkan pengamatan pada masalah kontekstual dan pengamatan objek pada bidang koordinat. 3.5.3 Menemukan konsep translasi dengan kaitannya dengan konsep matriks. 3.5.4 Menemukan konsep refleksi terhadap titik $O(0, 0)$ dengan kaitannya dengan konsep matriks. 3.5.5 Menemukan konsep refleksi terhadap sumbu $x$ dengan kaitannya dengan konsep matriks. 3.5.6 Menemukan konsep refleksi terhadap sumbu $y$ dengan kaitannya dengan konsep matriks. 3.5.7 Menemukan konsep refleksi terhadap garis $y = x$ dengan kaitannya dengan konsep matriks. 3.5.8 Menemukan konsep refleksi terhadap garis $y = -x$ dengan kaitannya dengan konsep matriks. 3.5.9 Menemukan konsep rotasi pada suatu sudut dan pusat $O(0,0)$ dengan kaitannya dengan konsep matriks. 3.5.10 Menemukan konsep rotasi pada suatu sudut dan pusat $P(p,q)$ dengan kaitannya dengan konsep matriks. 3.5.11 Menemukan konsep dilatasi pada faktor skala $k$ dan pusat $O(0,0)$ dengan kaitannya dengan konsep matriks. 3.5.12 Menemukan konsep dilatasi pada faktor skala $k$ dan pusat $P(p,q)$ dengan kaitannya dengan konsep matriks. 3.5.13 Membandingkan keempat jenis transformasi dengan menyebutkan perbedaannya. 3.5.14 Menemukan konsep komposisi transformasi (translasi, refleksi, rotasi, dan dilatasi).



Kompetensi Dasar	Indikator Pencapaian Kompetensi
4.5 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan matriks transformasi geometri (translasi, refleksi, dilatasi, dan rotasi).	4.5.1 Menemukan matriks transformasi (translasi, refleksi, rotasi, dan dilatasi) dengan pengamatan terhadap titik-titik dan bayangannya. 4.5.2 Menggunakan konsep transformasi (translasi, refleksi, rotasi, dan dilatasi) dengan kaitannya dengan konsep matriks dalam menemukan koordinat titik atau fungsi setelah ditransformasi. 4.5.3 Membandingkan proses transformasi (translasi, refleksi, rotasi, dan dilatasi).

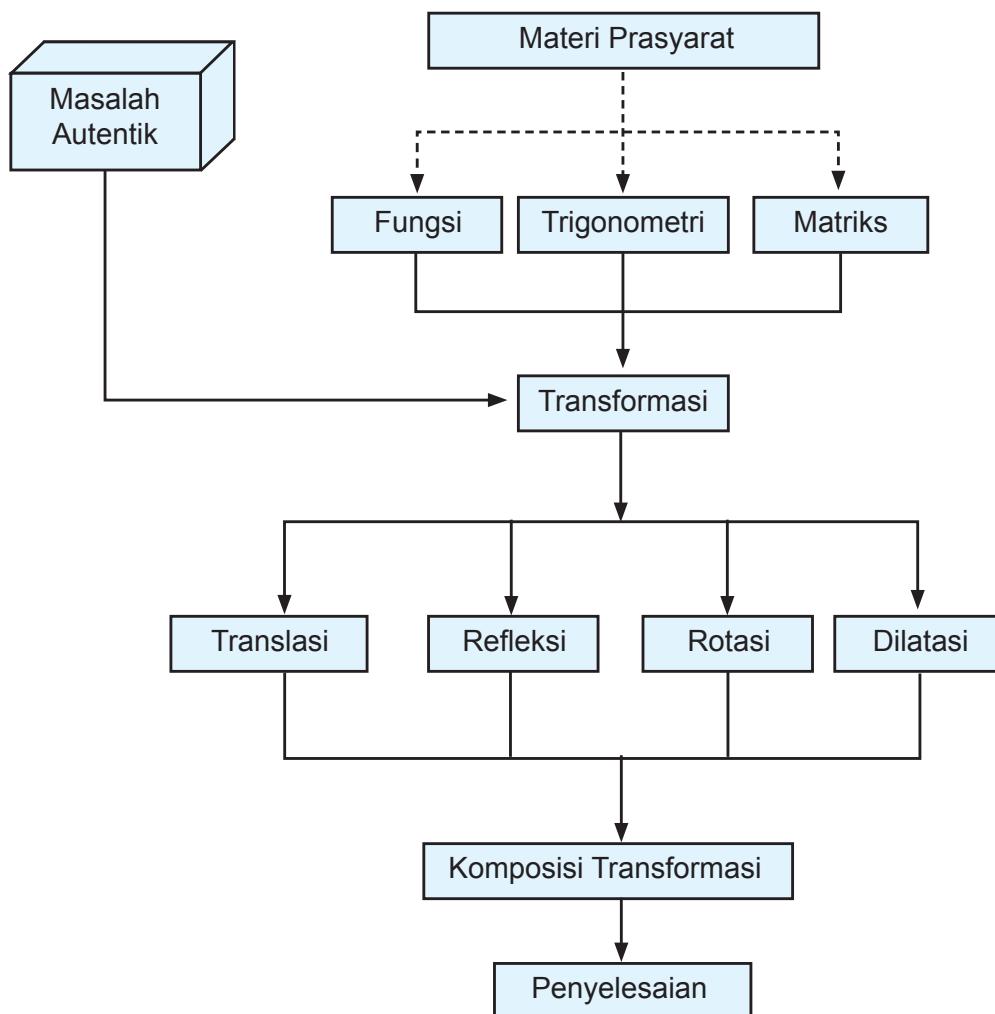
### C. Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari konsep transformasi melalui pengamatan, menalar, tanya jawab, mencoba menyelesaikan persoalan, penugasan individu dan kelompok, diskusi kelompok, dan mengomunikasikan pendapatnya, siswa mampu:

1. Menumbuhkan sikap perilaku jujur, disiplin, tanggung jawab, peduli (gotong royong, kerja sama, toleran, damai), santun, responsif dan proaktif, berani bertanya, berpendapat, dan menghargai pendapat orang lain dalam aktivitas sehari-hari.
2. Menunjukkan rasa ingin tahu dalam memahami konsep dan menyelesaikan masalah.
3. Menyebutkan contoh transformasi (translasi, refleksi, rotasi, dan dilatasi) dalam kehidupan sehari-hari.
4. Menemukan sifat-sifat translasi, refleksi, rotasi, dan dilatasi berdasarkan pengamatan pada masalah kontekstual dan pengamatan objek pada bidang koordinat.
5. Menemukan konsep translasi dengan kaitannya dengan konsep matriks.
6. Menemukan konsep refleksi (terhadap titik  $O(0, 0)$ , sumbu  $x$ , sumbu  $y$ , garis  $y = x$ , dan garis  $y = -x$ ) dengan kaitannya pada konsep matriks.
7. Menemukan konsep rotasi pada suatu sudut dan pusat  $O(0, 0)$  atau pusat  $P(p, q)$  dengan kaitannya dengan konsep matriks.
8. Menemukan konsep dilatasi pada suatu faktor skala dan pusat  $O(0, 0)$  atau pusat  $P(p, q)$  dengan kaitannya dengan konsep matriks.
9. Menemukan koordinat titik dan persamaan garis oleh transformasi (translasi, refleksi, rotasi, dan dilatasi).



#### D. Diagram Alir





## E. Proses Pembelajaran

### 4.1 Menemukan Konsep Translasi (Pergeseran)

Sebelum Pelaksanaan Kegiatan

1. Bentuk kelompok kecil siswa (3–4 orang) yang heterogen. Perhatikan karakteristik siswa dalam satu kelompok sehingga mendukung pembelajaran yang efisien dan efektif.
2. Informasikan tujuan pembelajaran dan tata cara penilaian selama proses pembelajaran.
3. Persiapkan semua fasilitas yang mendukung selama proses pembelajaran. Sebaiknya dipersiapkan papan tulis berpetak untuk media bidang koordinat.

No.	Deskripsi Kegiatan
1.	<b>Kegiatan Pendahuluan</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• Salam dari guru dan doa dipimpin oleh salah satu siswa.</li><li>• <i>Apersepsi</i><ol style="list-style-type: none"><li>1. Motivasi siswa mempelajari transformasi.</li><li>2. Ingatkan kembali siswa materi transformasi di tingkat SMP/MTs.</li><li>3. Informasikan kepada siswa bahwa konsep transformasi ini dikaji dengan pendekatan koordinat dan hubungannya dengan konsep matriks.</li><li>4. Ingatkan kembali siswa materi matriks.</li></ol></li></ul>
2.	<b>Kegiatan Inti</b> <i>Ayo Mengamati</i> <ul style="list-style-type: none"><li>• Ajak siswa mengamati benda-benda yang bergerak atau bergeser dalam kehidupan sehari-hari.</li><li>• Beri kesempatan kepada siswa untuk memahami sifat pergeseran dengan mengamati benda-benda yang bergerak di lingkungan sekitar tersebut. Arahkan siswa fokus pada bentuk dan ukuran benda-benda yang bergerak tersebut.</li><li>• Guru dapat memperagakan pergeseran benda-benda di depan kelas sebagai media.</li></ul>



### *Ayo Mengomunikasikan*

- Guru memberikan kesempatan kepada siswa untuk mengomunikasikan pendapatnya tentang pergeseran benda-benda setelah diamati.
- Arahkan jawaban siswa fokus pada bentuk dan ukuran benda setelah pergeseran.

### *Masalah 4.1*

- Minta siswa membaca Masalah 4.1 dan memandu mereka memahami alternatif penyelesaian Masalah 4.1.
- Minta siswa menunjukkan pergeseran titik pada bidang koordinat kartesius di depan kelas dan membaca koordinat perubahannya setelah bergeser.
- Guru dan siswa menyepakati arah pergeseran ke kiri (sebagai sumbu  $x$  negatif), ke kanan (sebagai sumbu  $x$  positif), ke atas (sebagai sumbu  $y$  positif) dan ke bawah (sebagai sumbu  $y$  negatif) pada sumbu koordinat.
- Bantu siswa memahami konsep pergeseran ke bentuk matriks pada alternatif penyelesaian Masalah 4.1 di buku siswa.
- Guru memastikan kelompok dapat bekerja sama dalam merumuskan konsep yang akan dicapai dengan melemparkan ataupun merangsang siswa untuk bertanya.

### *Ayo mengomunikasikan*

- Guru meminta seorang siswa untuk mengomunikasikan pendapatnya tentang pergeseran pada Masalah 4.1.
- Guru memantau pendapat siswa tersebut serta memperbaiki jika ada pendapat yang tidak sesuai konsep. Guru dapat memberikan kesempatan kepada siswa untuk bertanya atau memberikan pendapat lainnya.
- Guru menilai keaktifan siswa serta memantau siswa yang tidak atau kurang aktif serta memberikan umpan balik untuk menumbuhkan keaktifan belajarnya.

### *Masalah 4.2*

- Perkuat pemahaman siswa tentang pergeseran dengan mengajukan Masalah 4.2 untuk dibaca dan dipahami serta memberi komentar.
- Arahkan siswa ke sesi tanya jawab di antara siswa. Guru memantau kebenaran pendapat-pendapat siswa.



### Ayo mengamati

- Guru memerintahkan siswa untuk mengamati kembali pergeseran objek (titik, garis, dan bidang) pada bidang koordinat kartesius pada Gambar 4.2.
- Arahkan siswa mengamati posisi, bentuk, dan ukuran objek sebelum dan sesudah pergeseran, adakah perubahan?
- Minta siswa mengomunikasikan pendapatnya tentang mengamati posisi, bentuk, dan ukuran objek sebelum dan sesudah pergeseran. Arahkan siswa membangun dan memahami Sifat 4.1.

#### Sifat 4.1:

Bangun yang digeser (translasi) tidak mengalami perubahan bentuk dan ukuran

### Ayo mencoba

- Setelah siswa mempelajari Masalah 4.1 dan Masalah 4.2, minta siswa mengamati Gambar 4.3 dan menuliskan koordinat titik yang diminta pada Tabel 4.1
- Tabel 4.1 telah terisi sebagai berikut!

Tabel 4.1: Translasi titik

Titik awal	Titik akhir	Proses	Translasi
$A(-10, -4)$	$A(-6, -2)$	$\begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 \\ -4 \end{pmatrix}$	$T_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$
$C(-6, -2)$	$C(9, -5)$	$\begin{pmatrix} 9 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$	$T_2 \begin{pmatrix} 15 \\ -3 \end{pmatrix}$
$C(9, -5)$	$D(4, -1)$	$\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \end{pmatrix}$	$T_3 \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$
$D(4, -1)$	$E(7, 4)$	$\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$	$T_4 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$
$E(7, 4)$	$F(-8, 5)$	$\begin{pmatrix} -8 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$	$T_5 \begin{pmatrix} -15 \\ 1 \end{pmatrix}$



### Ayo mengamati

- Pandu siswa untuk menemukan konsep translasi melalui pengamatan terhadap koordinat titik pada Tabel 4.1.
- Arahkan siswa menemukan konsep translasi berikut:

Titik  $A(x,y)$  ditranslasi oleh  $T(a,b)$  menghasilkan bayangan  $A'(x',y')$ , ditulis dengan:

$$A(x, y) \xrightarrow{T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}} A'(x', y') \text{ atau } \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

### Ayo menalar

- Pandu siswa memahami persoalan pada Contoh 4.1 dan Contoh 4.2 dengan menggunakan konsep translasi yang telah ditemukan.
- Guru dapat mendemonstrasikan kembali alternatif penyelesaian pada Contoh 4.1 dan Contoh 4.2, atau dapat membuat contoh-contoh lainnya.
- Untuk mendapatkan tingkat pemahaman siswa akan konsep translasi, minta siswa menyelesaikan Latihan 4.1 berdasarkan pemahaman konsep dan contoh-contoh yang telah dipelajari, atau guru dapat memberikan soal-soal translasi lainnya sebagai tugas kelompok atau pribadi.
- Berikut adalah alternatif penyelesaian Latihan 4.1 sesuai buku siswa.

### Latihan 4.1

- Titik  $P(a, b + 2)$  digeser dengan  $T(3, 2b - a)$  sehingga hasil pergeseran menjadi  $Q(3a + b, -3)$ . Tentukan posisi pergeseran titik  $R(2, 4)$  oleh translasi  $T$  di atas.

Alternatif penyelesaian:

Coba ikuti panduan berikut:

Langkah 1:

$$P(a, b + 2) \xrightarrow{T(3, 2b - a)} Q(3a + b, -3)$$

$$\begin{pmatrix} 3a + b \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2b - a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b + 2 \end{pmatrix}$$

$$3a + b = a + 3 \text{ atau } a = \frac{-b + 3}{2} \text{ (persamaan 1)}$$

$$-3 = 3b - a + 2 \text{ (persamaan 2)}$$



	<p>Langkah 2:</p> <p>Dengan mensubstitusi <math>a = \frac{-b+3}{2}</math> ke persamaan (2) maka diperoleh nilai atau <math>-3 = 3b - \left(\frac{-b+3}{2}\right) + 2</math> sehingga diperoleh <math>b = -1</math> dan <math>a = 2</math></p> <p>Dengan demikian, translasi yang dimaksud adalah <math>T(3, 2b - a) = T(3, -4)</math>.</p> <p>Langkah 3:</p> <p>Pergeseran titik <math>R(2, 4)</math> oleh translasi <math>T(3, -4)</math> adalah:</p> $R(2,4) \xrightarrow{T(3,-4)} R'(x, y)$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ <p>Jadi, koordinat pergeseran titik <math>R</math> adalah <math>R'(5, 0)</math>.</p>
<b>3.</b>	<b>Kegiatan Penutup</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• Minta siswa mengomunikasikan kembali konsep-konsep materi yang telah diketahui setelah pembelajaran.</li><li>• Siswa dan guru bersama-sama melakukan refleksi dan merangkum semua konsep dan sifat translasi dari yang dipelajari.</li><li>• Berikan penilaian terhadap proses dan hasil karya siswa dengan menggunakan rubrik penilaian. Hasil kerja kelompok dikumpulkan oleh guru.</li><li>• Beri tugas kepada siswa sebagai latihan di rumah. Guru dapat memerintahkan siswa mengerjakan soal-soal pada Uji Kompetensi 4.1 atau soal-soal lainnya sesuai dengan konsep yang dipelajari.</li><li>• Informasikan materi yang akan dipelajari pada pertemuan berikutnya.</li></ul>

#### 4.2 Menemukan Konsep Refleksi (Pencerminan)

Sebelum Pelaksanaan Kegiatan

1. Bentuk kelompok kecil siswa (3–4 orang) yang heterogen. Perhatikan karakteristik siswa dalam satu kelompok sehingga mendukung pembelajaran yang efisien dan efektif.
2. Informasikan tujuan pembelajaran dan tata cara penilaian selama proses pembelajaran.
3. Siapkan semua fasilitas yang mendukung selama proses pembelajaran
4. Siapkan RPP dan form penilaian.



No.	Deskripsi Kegiatan
1.	<p><b>Kegiatan Pendahuluan</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>• Salam dari guru dan doa dipimpin oleh salah satu siswa.</li><li>• <i>Apersepsi</i><ol style="list-style-type: none"><li>1. Motivasi siswa mempelajari konsep refleksi (pencerminan).</li><li>2. Ingatkan kembali siswa materi pencerminan di tingkat SMP/MTs.</li><li>3. Informasikan kepada siswa bahwa konsep refleksi (pencerminan) ini dikaji dengan pendekatan koordinat dan hubungannya dengan konsep matriks.</li></ol></li></ul>
2.	<p><b>Kegiatan Inti</b></p> <p><i>Ayo Menalar</i></p> <ul style="list-style-type: none"><li>• Berikan ilustrasi yang menanamkan konsep pencerminan kepada siswa. Arahkan siswa memahami sifat "jarak objek terhadap cermin sama dengan jarak bayangan terhadap cermin". Informasikan cermin yang dimaksud adalah cermin datar.</li><li>• Informasikan bahwa konsep pencerminan yang dipelajari adalah pencerminan dengan pendekatan koordinat. Cermin pada bidang koordinat adalah titik <math>O(0, 0)</math>, sumbu <math>x</math>, sumbu <math>y</math>, garis <math>y = x</math> dan garis <math>y = -x</math>.</li></ul> <p><i>Ayo Mengamati</i></p> <p><b>Masalah 4.3</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>• Minta siswa berdiskusi secara berpasangan atau berkelompok tentang Masalah 4.3. Minta siswa mengamati Gambar 4.4.</li><li>• Arahkan siswa fokus berdiskusi pada jarak, bentuk dan ukuran antara objek dan bayangannya oleh pencerminan pada Gambar 4.4.</li></ul> <p><i>Ayo mengomunikasikan</i></p> <ul style="list-style-type: none"><li>• Minta siswa memberi pendapatnya tentang Masalah 4.3 dan Gambar 4.4.</li><li>• Guru dapat memberikan media atau gambar lainnya pada bidang koordinat untuk memperkuat pemahaman akan konsep pencerminan.</li><li>• Guru bersama-sama dengan siswa membangun sifat pencerminan.</li></ul> <div data-bbox="346 1479 1176 1711" style="border: 1px solid black; border-radius: 15px; padding: 10px;"><p>Sifat 4.2: Bangun yang dicerminkan (refleksi) dengan cermin datar tidak mengalami perubahan bentuk dan ukuran. Jarak bangun dengan cermin (cermin datar) adalah sama dengan jarak bayangan dengan cermin tersebut.</p></div>



#### 4.2.1 Pencerminan terhadap Titik $O(0,0)$

##### Ayo Mengamati

- Minta siswa membaca dan memahami Gambar 4.5. Pandu siswa memahami pencerminan terhadap titik  $O(0, 0)$  melalui gambar tersebut.
- Arahkan siswa memperhatikan koordinat objek dan bayangannya oleh pencerminan terhadap titik  $O(0, 0)$  pada Gambar 4.5, kemudian minta siswa melengkapi Tabel 4.2.
- Tabel 4.2 telah terisi sebagai berikut.

Tabel 4.2: Koordinat Pencerminan Titik terhadap Titik  $O(0, 0)$

Titik	Bayangan
$A(6, 3)$	$A'(-6, -3)$
$B(-2, 2)$	$B'(2, -2)$
$C(7, -2)$	$C'(-7, 2)$
$D(1, -3)$	$D'(-1, 3)$
$E(2, 3)$	$E'(-2, -3)$

##### Ayo menalar

- Pandu siswa memanfaatkan titik-titik koordinat objek dan bayangannya pada Tabel 4.2 untuk menemukan matriks pencerminan terhadap cermin titik  $O(0, 0)$ .
- Demonstrasikan kembali kepada siswa proses menemukan matriks pencerminan terhadap titik  $O(0, 0)$  seperti pada buku siswa. Ingatkan siswa kembali tentang materi perkalian dan kesamaan dua matriks.
- Guru dan siswa bersama-sama membangun konsep pencerminan terhadap titik  $O(0, 0)$ .

Titik  $A(x, y)$  dicerminkan terhadap titik  $O(0, 0)$  menghasilkan bayangan  $A'(x', y')$ , ditulis dengan:

$$A(x, y) \xrightarrow{C_{O(0,0)}} A'(x', y') \text{ atau } \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

##### Ayo mencoba

- Demonstrasikan penyelesaian Contoh 4.3 dan Contoh 4.4 dengan menggunakan matriks pencerminan terhadap titik  $O(0, 0)$  yang telah ditemukan.



- Minta siswa menggambar pencerminan tersebut pada bidang koordinat kartesius.
- Untuk memperdalam pemahaman siswa tentang pencerminan terhadap titik  $O(0, 0)$ , minta siswa mengerjakan Latihan 4.2 berdasarkan langkah-langkah yang telah disediakan.
- Berikut adalah alternatif penyelesaian Latihan 4.2 sesuai buku siswa.

### *Ayo menalar*

#### *Latihan 4.2*

Titik  $A(2, -3)$  ditranslasikan dengan  $T(-4, -5)$  kemudian dicerminkan terhadap titik  $O$ . Tentukan bayangan titik  $A$  tersebut.

#### *Alternatif Penyelesaian:*

$$A(2, -3) \xrightarrow{T(-4, -5)} A'(x', y') \xrightarrow{C_{O(0,0)}} A''(x'', y'')$$

Langkah 1 (Proses Translasi)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Langkah 2 (Proses Refleksi)

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Jadi, koordinat bayangan titik  $A$  adalah  $A''(2, 8)$ .

#### *4.2.2 Pencerminan terhadap Sumbu x*

##### *Ayo Mengamati*

- Minta siswa membaca dan memahami Gambar 4.6. Pandu siswa memahami pencerminan terhadap sumbu x melalui Gambar 4.6.
- Arahkan siswa memperhatikan koordinat objek dan bayangannya oleh pencerminan terhadap sumbu x, kemudian siswa melengkapi Tabel 4.3.
- Tabel 4.3 telah terisi sebagai berikut.

Tabel 4.3: Koordinat Pencerminan Titik terhadap Sumbu x

Titik	Bayangan
$A(1,1)$	$A'(1, -1)$
$B(3,2)$	$B'(3, -2)$
$C(6,3)$	$C'(6, -3)$
$D(-2, -2)$	$D'(-2, 2)$
$E(-4,4)$	$E'(-4, -4)$
$F(-7, -5)$	$F'(-7, 5)$



### Ayo Menalar

- Pandu siswa memanfaatkan titik koordinat objek dan bayangannya pada Tabel 4.3 untuk menemukan matriks pencerminan terhadap sumbu  $x$ . Minta siswa mendemonstrasikan kembali proses menemukan matriks pencerminan terhadap cermin sumbu  $x$  tersebut.
- Guru dengan siswa bersama-sama membangun konsep pencerminan terhadap sumbu  $x$ .

Titik  $A(x, y)$  dicerminkan terhadap sumbu  $x$  menghasilkan bayangan  $A'(x', y')$ , ditulis dengan:

$$A(x, y) \xrightarrow{C_{\text{sumbu } x}} A'(x', y') \text{ atau } \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

### Ayo Menalar

- Demonstrasikan proses penyelesaian Contoh 4.5 dan Contoh 4.6 dengan menggunakan konsep yang telah ditemukan.
- Minta siswa menggambar pencerminan tersebut pada bidang koordinat kartesius.
- Ingatkan siswa kembali konsep persamaan garis dan sketsanya.

### Ayo Mengomunikasikan

- Untuk memperdalam pemahaman siswa tentang pencerminan terhadap sumbu  $x$ , minta siswa mengerjakan Latihan 4.3 berdasarkan langkah-langkah yang disediakan.
- Perintahkan siswa menyajikan jawabannya di depan kelas.
- Berikut adalah alternatif penyelesaian Latihan 4.3 sesuai buku siswa.

### Ayo Menalar

#### Latihan 4.3

Titik  $A(-2, -5)$  dicerminkan terhadap titik  $O(0, 0)$  kemudian dilanjutkan dengan pencerminan terhadap sumbu  $x$ . Tentukan bayangan titik  $A$  tersebut.

#### Alternatif Penyelesaian

$$A(-2, -5) \xrightarrow{C_{O(0,0)}} A'(x', y') \xrightarrow{C_{\text{sumbu } x}} A''(x'', y'')$$

Langkah 1 (Proses Refleksi terhadap titik  $O(0,0)$ )

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$



Langkah 2 (Proses Refleksi terhadap sumbu  $x$ )

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan titik  $A$  adalah  $A''(2, -5)$ .

#### 4.2.3 Pencerminan terhadap Sumbu $y$

##### Ayo Mengamati

- Minta siswa membaca dan memahami Gambar 4.7 dan memandu siswa memahami pencerminan terhadap sumbu  $y$  melalui Gambar 4.7.
- Arahkan siswa memperhatikan koordinat objek dan bayangannya oleh pencerminan terhadap sumbu  $y$ , kemudian siswa melengkapi Tabel 4.4.
- Tabel 4.4 telah terisi sebagai berikut.

Tabel 4.4: Koordinat Pencerminan Titik terhadap Sumbu  $y$

Titik	Bayangan
$A(-10, -5)$	$A'(10, -5)$
$B(-8, -3)$	$B'(8, -3)$
$C(-6, -1)$	$C'(6, -1)$
$D(4, 1)$	$D'(-4, 1)$
$E(2, 3)$	$E'(-2, 3)$
$F(1, 4)$	$F'(-1, 4)$

##### Ayo Menalar

- Pandu siswa memanfaatkan koordinat objek dan bayangannya pada Tabel 4.4 untuk menemukan matriks pencerminan terhadap sumbu  $y$ .
- Berdasarkan pemahaman siswa dalam menemukan matriks pencerminan terhadap titik  $O(0, 0)$  dan sumbu  $x$  maka minta siswa mendemonstrasikan proses menemukan matriks pencerminan terhadap sumbu  $y$  dengan panduan pada buku siswa.
- Berikut proses menemukan matriks pencerminan terhadap sumbu  $y$ .

##### Menemukan Matriks Pencerminan terhadap Sumbu $y$

Berdasarkan pengamatan pada tabel, secara umum jika titik  $A(x, y)$  dicerminkan terhadap sumbu  $y$  akan mempunyai koordinat bayangan  $A'(-x, y)$ , bukan? Mari kita tentukan matriks pencerminan terhadap sumbu  $y$ .

Misalkan matriks transformasinya adalah  $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  sehingga:



$$A(x, y) \xrightarrow{C_{\text{sumbu } y}} A'(-x, y)$$

$$\begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

Ini berarti bahwa:

$$-x = ax + by \Leftrightarrow a = -1, \text{ dan } b = 0$$

$$y = cx + dy \Leftrightarrow c = 0, \text{ dan } d = 1$$

Dengan demikian, matriks pencerminan terhadap sumbu  $y$  adalah  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Guru dan siswa bersama-sama membangun konsep pencerminan terhadap sumbu  $y$ .

Titik  $A(x, y)$  dicerminkan terhadap sumbu  $y$  menghasilkan bayangan  $A'(x', y')$ , ditulis dengan,

$$A(x, y) \xrightarrow{C_{\text{sumbu } y}} A'(x', y') \text{ atau } \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

#### **Ayo Mencoba**

- Demonstrasikan penyelesaian Contoh 4.7 dan Contoh 4.8 dengan menggunakan konsep yang telah ditemukan.
- Minta siswa menggambar pencerminan tersebut pada bidang koordinat kartesius.
- Ingatkan siswa konsep persamaan garis dan sketsanya.
- Untuk memperdalam pemahaman siswa tentang pencerminan terhadap sumbu  $y$ , minta siswa mengerjakan Latihan 4.4.

#### **Ayo Mengomunikasikan**

- Perintahkan siswa menyajikan hasil kerjanya di depan kelas.
- Berikut adalah alternatif penyelesaian Latihan 4.4 sesuai buku siswa.

#### **Ayo Menalar**

##### **Latihan 4.4**

Garis  $2x - y + 5 = 0$  dicerminkan terhadap titik  $O(0, 0)$ , kemudian dilanjutkan dengan pencerminan terhadap sumbu  $y$ . Tentukan persamaan bayangan garis tersebut.



### Alternatif Penyelesaian

Misalkan titik  $A(x,y)$  terletak pada garis tersebut, sehingga:

$$A(x,y) \xrightarrow{C_{O(0,0)}} A'(x',y') \xrightarrow{C_{sumbu\ y}} A''(x'',y'')$$

Langkah 1 (Proses pencerminan terhadap titik  $O(0,0)$ )

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

Langkah 2 (Proses pencerminan terhadap sumbu  $y$ )

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

sehingga:

$$x'' = x \text{ dan } y'' = -y$$

Langkah 4 (Proses menentukan persamaan bayangan)

Tentukan  $x$  dan  $y$  dalam bentuk  $x''$  dan  $y''$

$$x'' = x \text{ dan } y'' = -y$$

Langkah 5 (Proses menentukan persamaan bayangan)

Substitusi  $x$  dan  $y$  ke  $2x - y + 5 = 0$  sehingga diperoleh persamaan bayangan.

$$2(x) - (-y) + 5 = 0 \text{ atau } 2x + y + 5 = 0$$

#### 4.2.4 Pencerminan terhadap Garis $y = x$

##### Ayo Mengamati

- Minta siswa membaca dan memahami Gambar 4.8. Pandu siswa memahami pencerminan terhadap sumbu  $y = x$  melalui Gambar 4.8.
- Minta siswa memperhatikan koordinat objek dan bayangannya oleh pencerminan terhadap garis  $y = x$  pada Gambar 4.8, kemudian minta siswa melengkapi Tabel 4.5.
- Tabel 4.5 telah terisi sebagai berikut!

Tabel 4.5: Koordinat Pencerminan Titik terhadap Garis  $y = x$

Titik	Bayangan
$A(-1, -5)$	$A'(-5, -1)$
$B(3, -5)$	$B'(-5, 3)$
$C(-2, 3)$	$C'(3, -2)$
$D(0, 4)$	$D'(4, 0)$
$E(2, 4)$	$E'(4, 2)$



### Ayo Menalar

- Pandu siswa memanfaatkan titik koordinat objek dan bayangannya pada Tabel 4.5 untuk menemukan matriks pencerminan terhadap garis  $y = x$ .
- Perintahkan siswa mendemonstrasikan kembali proses menemukan matriks pencerminan terhadap garis  $y = x$  dengan cara yang sama pada konsep-konsep pencerminan di atas. Guru dengan siswa bersama-sama membangun konsep pencerminan terhadap garis  $y = x$ .

Titik  $A(x, y)$  dicerminkan terhadap garis  $y = x$  menghasilkan bayangan  $A'(x', y')$ , ditulis dengan:

$$A(x, y) \xrightarrow{C_{y=x}} A'(x', y') \text{ atau } \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

### Ayo Mencoba

- Demonstrasikan penyelesaian Contoh 4.9 dan Contoh 4.10 dengan menggunakan konsep yang telah ditemukan. Minta siswa menggambar pencerminan pada bidang koordinat kartesius.
- Ingatkan siswa konsep persamaan garis dan sketsanya.
- Untuk memperdalam pemahaman siswa tentang pencerminan terhadap garis  $y = x$ , minta siswa mengerjakan Latihan 4.5 berdasarkan langkah-langkah yang telah disediakan.
- Berikut alternatif penyelesaian Latihan 4.5 sesuai buku siswa.

### Ayo Menalar

#### Latihan 4.5

Titik  $A(-1, -3)$  dicerminkan terhadap titik  $O(0, 0)$  kemudian dilanjutkan dengan pencerminan terhadap sumbu  $y$  dan dilanjutkan lagi dengan pencerminan terhadap garis  $y = x$ . Tentukan bayangan titik  $A$  tersebut.

#### Alternatif Penyelesaian

$$A(-1, -3) \xrightarrow{C_{O(0,0)}} A'(x', y') \xrightarrow{C_{sumbu y}} A''(x'', y'') \xrightarrow{C_{y=x}} A'''(x''', y''')$$

Langkah 1 (Proses pencerminan terhadap titik  $O(0, 0)$ )

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$



Langkah 2 (Proses pencerminan terhadap sumbu  $y$ )

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Langkah 3 (Proses pencerminan terhadap garis  $y = x$ )

$$\begin{pmatrix} x''' \\ y''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan titik  $A$  adalah  $A''(3, -1)$ .

#### 4.2.5 Pencerminan terhadap Garis $y = -x$

##### Ayo Mengamati

- Minta siswa membaca dan memahami Gambar 4.9 dan memandu siswa memahami pencerminan terhadap sumbu  $y = -x$  melalui Gambar 4.9.
- Arahkan siswa untuk memperhatikan koordinat objek dan bayangannya oleh pencerminan terhadap garis  $y = -x$ , kemudian minta siswa melengkapi Tabel 4.6.
- Tabel 4.6 telah terisi sebagai berikut.

Tabel 4.6: Koordinat Pencerminan Titik terhadap Garis  $y = -x$

Titik	Bayangan
$A(1, -4)$	$A'(4, -1)$
$B(-2, -3)$	$B'(3, 2)$
$C(-5, -3)$	$C'(3, 5)$
$D(-1, 5)$	$D'(-5, 1)$
$E(-3, 5)$	$E'(-5, 3)$

##### Ayo Menalar

- Pandu siswa memanfaatkan titik koordinat objek dan bayangannya pada Tabel 4.6 untuk menemukan matriks pencerminan terhadap garis  $y = -x$ .
- Minta siswa mendemonstrasikan kembali proses menemukan matriks pencerminan terhadap garis  $y = -x$  sesuai dengan langkah-langkah yang telah diberikan atau dengan cara yang sama pada pencerminan sebelumnya.
- Demonstrasikan proses menemukan matriks pencerminan terhadap garis  $y = -x$ .



### Ayo Menalar

#### Menemukan Matriks Pencerminan terhadap Garis $y = -x$ .

Berdasarkan pengamatan pada tabel, secara umum, jika titik  $A(x, y)$  dicerminkan terhadap garis  $y = -x$  akan mempunyai koordinat bayangan  $A'(-y, -x)$ , bukan? Mari kita tentukan matriks pencerminan terhadap garis

$y = -x$ . Misalkan matriks transformasinya adalah  $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  sehingga:

$$A(x, y) \xrightarrow{C_{y=-x}} A'(-y, -x)$$

$$\begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

Ini berarti bahwa:

$$-y = ax + by \Leftrightarrow a = 0, \text{ dan } b = -1$$

$$-x = cx + dy \Leftrightarrow c = -1, \text{ dan } d = 0$$

Dengan demikian, matriks pencerminan terhadap garis  $y = -x$  adalah

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Guru dan siswa bersama-sama membangun konsep pencerminan terhadap garis  $y = -x$

Titik  $A(x, y)$  dicerminkan terhadap garis  $y = -x$  menghasilkan bayangan  $A'(x', y')$ , ditulis dengan,

$$A(x, y) \xrightarrow{C_{y=-x}} A'(x', y') \text{ atau } \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

### Ayo Mencoba

- Demonstrasikan penyelesaian Contoh 4.11 dan Contoh 4.12 dengan menggunakan konsep yang telah ditemukan.
- Minta siswa menggambar pencerminan tersebut pada bidang koordinat kartesius. Ingatkan siswa konsep persamaan garis dan sketsanya.

### 3. Kegiatan Penutup

- Minta siswa mengomunikasikan kembali konsep-konsep pada materi yang telah dipelajari.
- Siswa dan guru bersama-sama melakukan refleksi dan merangkumkan semua konsep dan sifat transformasi dari yang dipelajari.



- Berikan penilaian terhadap proses dan hasil karya siswa dengan menggunakan rubrik penilaian. Hasil kerja kelompok dikumpulkan oleh guru.
- Beri tugas kepada siswa sebagai latihan dirumah. Guru dapat memberikan Uji Kompetensi 4.1 atau persoalan lainnya sesuai dengan konsep yang dipelajari.
- Informasikan materi yang akan dipelajari pada pertemuan berikutnya.

### 4.3 Menemukan Konsep Rotasi (Perputaran)

Sebelum Pelaksanaan Kegiatan

1. Bentuk kelompok kecil siswa (3–4 orang) yang heterogen. Perhatikan karakteristik siswa dalam satu kelompok sehingga mendukung pembelajaran yang efisien dan efektif.
2. Informasikan tujuan pembelajaran dan tata cara penilaian selama proses pembelajaran.
3. Siapkan semua fasilitas yang mendukung selama proses pembelajaran
4. Siapkan RPP dan form penilaian.

No.	Deskripsi Kegiatan
1.	<b>Kegiatan Pendahuluan</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• Salam dari guru dan doa dipimpin oleh salah satu siswa.</li><li>• <i>Apersepsi</i><ol style="list-style-type: none"><li>1. Motivasi siswa mempelajari konsep rotasi (perkalian).</li><li>2. Ingatkan kembali siswa materi rotasi di tingkat SMP/MTs dan konsep matriks.</li><li>3. Informasikan kepada siswa bahwa konsep rotasi (perkalian) ini dikaji dengan pendekatan koordinat dan hubungannya dengan konsep matriks.</li><li>4. Informasikan tujuan pembelajaran dan cara penilaian.</li></ol></li></ul>
2.	<b>Kegiatan Inti</b> <i>Pengantar</i> <ul style="list-style-type: none"><li>• Guru memberikan contoh-contoh objek yang bergerak berputar di lingkungan sekitar (seperti kipas, kincir angin, roda, dan lain-lain). Siswa memberikan contoh-contoh lainnya.</li></ul>



- Motivasi siswa untuk mempelajari konsep transformasi ketiga yaitu rotasi dengan pendekatan koordinat dan kaitannya dengan konsep matriks.

#### *Masalah 4.4*

#### *Ayo Mengamati*

- Minta siswa memahami Masalah 4.4 dan memandu siswa mengamati dan menalar perputaran segitiga jika titik pusat pemutaran berada pada bidang segitiga, berada di salah satu titik sudut segitiga, dan berada di luar segitiga (lihat Gambar 4.10). Minta siswa memberi komentar dan arahkan ke sesi tanya-jawab.
- Pandu siswa bahwa gerak rotasi objek dipengaruhi oleh titik pusat rotasi. Minta siswa membandingkan kembali Gambar 4.10: A, B, dan C.
- Arahkan pengamatan siswa fokus pada bentuk, posisi, dan ukuran objek sebelum dan sesudah rotasi.
- Guru dan siswa menemukan sifat rotasi berdasarkan pengamatan perputaran objek di lingkungan sekitar dan pada bidang kartesius seperti pada Gambar 4.10 dan Gambar 4.11.

Sifat 4.3:

Bangun yang diputar (rotasi) tidak mengalami perubahan bentuk dan ukuran.

#### *Ayo Menalar*

- Demonstrasikan proses menemukan matriks rotasi pada pusat  $O(0, 0)$  melalui Gambar 4.12. Ingatkan siswa konsep trigonometri serta kesamaan matriks.
- Pandu siswa kembali melakukan percobaan untuk menemukan konsep rotasi pada pusat  $P(a, b)$  dengan melakukan: (1) translasi titik dengan  $T(-a, -b)$  sehingga pusat rotasi menjadi  $O(0, 0)$ . Dengan demikian, matriks rotasi dengan pusat  $O(0, 0)$  dapat digunakan, kemudian (2) hasil rotasi pada langkah (1) ditranslasi kembali dengan  $T(a, b)$ .
- Guru dan siswa bersama-sama menyimpulkan atau membangun konsep rotasi yang diputar dengan sudut dan pusat  $P(p, q)$ .



Titik  $A(x, y)$  diputar dengan pusat  $P(p, q)$  dan sudut  $\alpha$  menghasilkan bayangan  $A'(x', y')$ , ditulis dengan:

$$A(x, y) \xrightarrow{R_{[P(p,q), \alpha]}} A'(x', y')$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - p \\ y - q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

### *Ayo Mencoba*

- Uji pemahaman siswa kembali dengan mengajukan Contoh 4.13 dan Contoh 4.14. Minta siswa kembali mendemonstrasikan proses dan menjelaskannya di depan kelas.
- Guru memberikan persoalan lainnya sesuai konsep yang dipelajari untuk dikerjakan siswa secara berkelompok.

### **3. Kegiatan Penutup**

- Minta siswa untuk mengomunikasikan konsep-konsep materi yang telah diketahui setelah pembelajaran.
- Siswa dan guru bersama-sama melakukan refleksi dan merangkumkan semua konsep dan sifat dari yang dipelajari.
- Berikan penilaian terhadap proses dan hasil karya siswa dengan menggunakan rubrik penilaian.
- Beri tugas kepada siswa sebagai latihan di rumah. Guru dapat memberikan Uji Kompetensi 4.2 atau persoalan lainnya sesuai konsep yang dipelajari.
- Informasikan materi yang akan dipelajari pada pertemuan berikutnya.

## **4.4 Menemukan Konsep Dilatasi (Perkalian)**

Sebelum Pelaksanaan Kegiatan

1. Bentuk kelompok kecil siswa (3–4 orang) yang heterogen. Perhatikan karakteristik siswa dalam satu kelompok sehingga mendukung pembelajaran yang efisien dan efektif.
2. Informasikan tujuan pembelajaran dan tata cara penilaian selama proses pembelajaran.
3. Siapkan semua fasilitas yang mendukung selama proses pembelajaran
4. Siapkan RPP dan form penilaian.



No.	Deskripsi Kegiatan
1.	<p><b>Kegiatan Pendahuluan</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>• Salam dari guru dan doa dipimpin oleh salah satu siswa.</li><li>• <i>Apersepsi</i><ol style="list-style-type: none"><li>1. Motivasi siswa mempelajari konsep dilatasi (perkalian).</li><li>2. Ingatkan kembali siswa materi dilatasi di tingkat SMP/MTs.</li><li>3. Informasikan kepada siswa bahwa konsep dilatasi (perkalian) ini dikaji dengan pendekatan koordinat dan hubungannya dengan konsep matriks.</li><li>4. Informasikan tujuan pembelajaran dan cara penilaian.</li></ol></li></ul>
2.	<p><b>Kegiatan Inti</b></p> <p><i>Pengantar</i></p> <ul style="list-style-type: none"><li>• Pandu siswa memberikan contoh dilatasi atau perkalian yang terjadi dalam kehidupan sehari-hari. Arahkan siswa memahami perkalian atau dilatasi dengan pendekatan koordinat.</li></ul> <p><i>Masalah 4.5</i></p> <p><i>Ayo Mencoba</i></p> <ul style="list-style-type: none"><li>• Dengan kelompok berdiskusi, siswa diajak mengamati, tanya-jawab, dan mengomunikasikan pendapatnya akan Masalah 4.5.</li><li>• Minta siswa memahami Masalah 4.5 dan mengamati Gambar 4.13. Arahkan siswa fokus mengamati pada jarak <math>OA</math> dengan <math>OA_2</math> atau <math>OB</math> dengan <math>OB_2</math> atau <math>OC</math> dengan <math>OC_2</math>. Arahkan siswa kembali mengamati jarak <math>OA</math> dengan <math>OA_1</math> atau <math>OB</math> dengan <math>OB_1</math> atau <math>OC</math> dengan <math>OC_1</math>.</li></ul> <p><i>Ayo Mengomunikasikan</i></p> <ul style="list-style-type: none"><li>• Berikan kesempatan kepada siswa untuk berdiskusi dan tunjuk salah satu kelompok untuk mengomunikasikan pendapat mereka “apa itu dilatasi?” melalui pengamatan jarak pada Gambar 4.13.</li><li>• Minta siswa secara berkelompok membuat contoh lain mengenai dilatasi titik, garis dan bidang secara gambar. Kemudian menyajikannya di depan kelas.</li></ul> <p><i>Ayo Menanya</i></p> <ul style="list-style-type: none"><li>• Tanya siswa, yang manakah pusat dilatasi dan faktor skala dilatasi pada Gambar 4.13?</li><li>• Arahkan kembali siswa konsentrasi pada ukuran objek dengan dilatasinya. Minta siswa memperhatikan ukuran, ukuran dilatasinya dengan faktor skala dilatasi.</li></ul>



- Minta atau tunjuk seorang siswa untuk menyampaikan pendapatnya.

#### *Ayo Menalar*

- Arahkan bernalar dan memberikan komentar atau pendapatnya kembali akan gambar dengan dilatasi  $k$ , di mana  $k > 0$ ,  $k = 0$  dan  $k < 0$ .
- Dengan kegiatan pengamatan pada contoh-contoh perkalian/dilatasi di lingkungan sekitar dan pengamatan dilatasi objek pada bidang koordinat maka arahkan siswa memahami Sifat 4.4.

#### Sifat 4.4:

Bangun yang diperbesar atau diperkecil (dilatasi) dengan skala  $k$  dapat mengubah ukuran atau tetap ukurannya tetapi tidak mengubah bentuk.

- Jika  $k > 1$  maka bangun akan diperbesar dan terletak searah terhadap pusat dilatasi dengan bangun semula.
- Jika  $k = 1$  maka bangun tidak mengalami perubahan ukuran dan letak.
- Jika  $0 < k < 1$  maka bangun akan diperkecil dan terletak searah terhadap pusat dilatasi dengan bangun semula.
- Jika  $-1 < k < 0$  maka bangun akan diperkecil dan terletak berlawanan arah terhadap pusat dilatasi dengan bangun semula.
- Jika  $k = -1$  maka bangun tidak akan mengalami perubahan ukuran, tetapi letaknya berlawanan arah terhadap pusat dilatasi dengan bangun semula.
- Jika  $k < -1$  maka bangun akan diperbesar dan terletak berlawanan arah terhadap pusat dilatasi dengan bangun semula.

#### *Ayo Mengamati*

- Arahkan kembali siswa mengamati Gambar 4.14 dengan konsentrasi pada pusat dilatasi setiap objek (A, B, C, D dan E)?
- Minta siswa mengamati koordinat objek tersebut, koordinat hasil dilatasi, koordinat pusat dilatasi serta jarak objek ke pusat dilatasi dan jarak hasil dilatasi ke pusat dilatasi.
- Perintahkan siswa melengkapi Tabel 4.7 dengan melihat panduan pada sel yang telah terisi. Pandu siswa melengkapi sel.



- Tabel 4.7 telah terisi sebagai berikut.

### Ayo Mencoba

No.	Pusat	Obyek	Hasil	Pola
1	2	3	4	5
1	$P(0, 0)$	$A(2, 2)$	$A'(6, 6)$	$\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
2	$P(0, 0)$	$B(-2, 2)$	$B'(2, -2)$	$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = -1 \left( \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
3	$P(9, 0)$	$C(9, 2)$	$C'(9, -4)$	$\begin{pmatrix} 9 \\ -4 \end{pmatrix} = -2 \left( \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix}$
4	$P(-10, 1)$	$D(-8, 2)$	$D'(-2, 5)$	$\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = 4 \left( \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \end{pmatrix}$
5	$P(-8, -3)$	$E(-7, -3)$	$E(-3, -3)$	$\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix} = 5 \left( \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -8 \\ -3 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} -8 \\ -3 \end{pmatrix}$

### Ayo Mengamati

- Arahkan dan pandu siswa melihat pola perhitungan pada Tabel 4.7. Lihat kolom 5.
- Berdasarkan pengamatan dan bentuk pola yang ditemukan, guru dan siswa menuliskan konsep dilatasi pada pusat  $P(p, q)$  dan skala  $k$ .

Titik  $A(x, y)$  didilatasi dengan pusat  $P(p, q)$  dan skala  $k$  menghasilkan bayangan  $A'(x', y')$ , ditulis dengan,

$$A(x, y) \xrightarrow{R_{[P(p, q), k]}} A'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x - p \\ y - q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

### Ayo Menalar

- Uji pemahaman siswa kembali akan konsep dilatasi dengan mengajukan Contoh 4.15 dan Contoh 4.16. Minta siswa mendemonstrasikan proses dan menunjukkan gambarnya.



<b>3.</b>	<b>Kegiatan Penutup</b>
	<ul style="list-style-type: none"><li>• Minta siswa mengomunikasikan kembali konsep-konsep materi yang telah diketahui setelah pembelajaran.</li><li>• Siswa dan guru bersama-sama melakukan refleksi dan merangkumkan semua konsep dan sifat transformasi dari yang dipelajari.</li><li>• Berikan penilaian terhadap proses dan hasil karya siswa dengan menggunakan rubrik penilaian. Hasil kerja kelompok dikumpulkan oleh guru.</li><li>• Beri tugas kepada siswa sebagai latihan di rumah.</li><li>• Informasikan materi yang akan dipelajari pada pertemuan berikutnya.</li></ul>

#### 4.5 Komposisi Transformasi

Sebelum Pelaksanaan Kegiatan

1. Bentuk kelompok kecil siswa (3–4 orang) yang heterogen. Perhatikan karakteristik siswa dalam satu kelompok sehingga mendukung pembelajaran yang efisien dan efektif.
2. Informasikan tujuan pembelajaran dan tata cara penilaian selama proses pembelajaran.
3. Siapkan semua fasilitas yang mendukung selama proses pembelajaran
4. Siapkan RPP dan form penilaian.

No.	Deskripsi Kegiatan
<b>1.</b>	<b>Kegiatan Pendahuluan</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• Salam dari guru dan doa dipimpin oleh salah satu siswa.</li><li>• <i>Apersepsi</i><ol style="list-style-type: none"><li>1. Motivasi siswa mempelajari konsep komposisi transformasi meliputi komposisi translasi, komposisi refleksi, komposisi rotasi, dan komposisi dilatasi.</li><li>2. Ingatkan kembali siswa materi transformasi (translasi, refleksi, rotasi dan dilatasi) pada sub-bab sebelumnya dan konsep fungsi komposisi di kelas X.</li><li>3. Informasikan kepada siswa bahwa konsep ini dikaji dengan pendekatan koordinat dan hubungannya dengan konsep matriks.</li><li>4. Informasikan tujuan pembelajaran dan cara penilaian.</li></ol></li></ul>



## 2. Kegiatan Inti

### *Ayo Mengamati*

- Guru mengingatkan kembali konsep-konsep transformasi (translasi, refleksi, rotasi dan dilatasi) secara umum.
- Guru mendemonstrasikan proses penyelesaian pada Masalah 4.6 sehingga siswa memahami proses transformasi bertahap.
- Setelah siswa memahami proses bertahap, guru menerangkan komposisi translasi dengan menunjukkan keterkaitannya dengan komposisi fungsi secara umum.
- Arahkan siswa memahami Skema 4.1.
- Motivasi siswa untuk lebih memahami konsep komposisi translasi secara umum.
- Guru menerangkan proses penyelesaian Contoh 4.17 dan menunjukkan keterkaitan konsep komposisi translasi.
- Minta siswa menunjukkan Contoh 4.17 dengan gambar pada bidang koordinat kartesius.

### *Ayo Mencoba dan Mengomunikasikan*

- Guru memberikan contoh komposisi translasi lainnya untuk dikerjakan siswa secara mandiri atau berkelompok. Hasil kerja siswa dipresentasikan di depan kelas. Arahkan siswa untuk bertanya-jawab.
- Guru menjadi fasilitator, memantau kebenaran jawaban dan konsep serta memberikan penilaian.

### *Masalah 4.7*

### *Ayo Mengamati*

- Minta siswa memahami Masalah 4.7 dan memandu siswa mengamati dan menalar bentuk pencerminan yang diceritakan pada Masalah 4.7. Minta siswa memberi komentar dan arahkan ke sesi tanya-jawab.
- Pandu siswa memahami konsep komposisi refleksi secara umum. Informasikan bahwa konsep ini sama halnya dengan komposisi fungsi pada umumnya atau konsep komposisi translasi.
- Arahkan siswa memahami perbedaan komposisi translasi dengan komposisi refleksi. Minta siswa memberikan komentar tentang perbedaan kedua komposisi transformasi.
- Arahkan siswa fokus pada proses refleksi bertahap sehingga terbentuk komposisi refleksi.
- Guru dan siswa bersama-sama menemukan konsep komposisi refleksi. Minta siswa memberikan pendapat tentang Skema 4.2.



#### *Ayo Menalar, Mencoba dan Mengomunikasikan*

- Pandu siswa memahami konsep komposisi refleksi secara umum.
- Minta siswa memahami Contoh 4.17 kemudian guru memberikan persoalan lainnya untuk dikerjakan siswa secara mandiri atau berkelompok.
- Siswa mempresentasikan hasil kerjanya di depan kelas. Arahkan siswa untuk bertanya-jawab. Guru menjadi fasilitator dan menjaga keadaan kelas tetap terarah pada pembelajaran. Guru mengamati kebenaran jawaban dan konsep. Guru melakukan penilaian.

#### *Ayo Mengamati*

- Berikan informasi kepada siswa kembali tentang translasi bertahap, refleksi bertahap, dan keterkaitannya dengan komposisinya.
- Berikan beberapa persoalan yang berkaitan dengan rotasi bertahap dan dilatasi bertahap sederhana dengan pusat rotasi atau pusat dilatasi yang sama.

#### *Ayo Mencoba dan mengomunikasikan*

- Minta siswa mencoba mengerjakan persoalan rotasi bertahap dan dilatasi bertahap serta mempresentasikan hasil kerjanya di depan kelas. Guru memantau kebenaran jawaban.

#### *Ayo Mengamati*

- Guru mendemonstrasikan proses penyelesaian Contoh 4.18, dan Contoh 4.19.
- Guru memberikan contoh persoalan lainnya untuk dikerjakan siswa,
- Minta siswa kembali mendemonstrasikan proses dan menjelaskannya proses penyelesaian Contoh 4.20 dan Contoh 4.21 di depan kelas.
- Guru memberikan persoalan lainnya sesuai konsep yang dipelajari untuk dikerjakan siswa secara berkelompok.

### **3. Kegiatan Penutup**

- Minta siswa untuk mengomunikasikan konsep-konsep materi yang telah diketahui setelah pembelajaran.
- Siswa dan guru bersama-sama melakukan refleksi dan merangkumkan semua konsep yang dipelajari.
- Berikan penilaian terhadap proses, dan hasil karya siswa dengan menggunakan rubrik penilaian.
- Beri tugas kepada siswa sebagai latihan di rumah.
- Beri tugas kepada siswa sebagai latihan di rumah. Guru dapat memberikan Uji Kompetensi 4.3 atau persoalan lainnya sesuai konsep yang dipelajari.
- Informasikan materi yang akan dipelajari pada pertemuan berikutnya.



## F. Penilaian

### Prosedur Penilaian:

No	Aspek yang dinilai	Teknik Penilaian	Waktu Penilaian
1.	Berani bertanya	Pengamatan	Kegiatan Inti
2.	Berpendapat	Pengamatan	Kegiatan Inti
3.	Mau mendengarkan orang lain	Pengamatan	Kegiatan Inti
4.	Bekerja sama	Pengamatan	Kegiatan Inti
5.	Konsep	Tes tertulis	Kegiatan penutup

### 1 Instrumen Penilaian Sikap

(Sikap Kinerja dalam Menyelesaikan Tugas Kelompok)

No.	Nama Peserta Didik	Aspek				Jumlah	Nilai
		Kerja sama	Keaktifan	Menghargai Pendapat Teman	Tanggung Jawab		
1.							
2.							
3.							
4.							
5.							

#### Keterangan Skor:

- 1 = (belum terlihat), apabila peserta didik belum memperlihatkan tanda-tanda awal perilaku sikap yang dinyatakan dalam indikator.
- 2 = (mulai terlihat), apabila peserta didik mulai memperlihatkan adanya tanda-tanda awal perilaku yang dinyatakan dalam indikator tetapi belum konsisten.
- 3 = (mulai berkembang), apabila peserta didik sudah memperlihatkan tanda perilaku yang dinyatakan dalam indikator dan mulai konsisten.
- 4 = (membudaya), apabila peserta didik terus-menerus memperlihatkan perilaku yang dinyatakan dalam indikator secara konsisten.

Skor Maksimal = 16

$$\text{Nilai} = \frac{\text{Skor Perolehan}}{\text{Skor Maksimal}} \times 100\%$$



## 2. Instrumen Penilaian Pengetahuan

Contoh rubrik penilaian hasil penyelesaian soal oleh siswa. Dengan mempertimbangkan langkah-langkah penyelesaian soal yang dilakukan oleh siswa terhadap soal-soal yang diajukan guru maka dapat disusun rubrik penilaiannya. Alternatif pedoman penskorannya sebagai berikut.

No.	Aspek Penilaian	Rubrik Penilaian	Skor
1.	Pemahaman terhadap konsep transformasi	Penyelesaian dihubungkan dengan konsep transformasi	5
		Sudah menghubungkan penyelesaian dengan konsep transformasi namun belum benar	3
		Penyelesaian sama sekali tidak dihubungkan dengan konsep transformasi	1
		Tidak ada respons jawaban	0
2.	Kebenaran jawaban akhir soal	Jawab benar	5
		Jawab hampir benar	3
		Jawaban Salah	1
		Tidak ada respons jawaban	0
3.	Proses perhitungan	Proses perhitungan benar	5
		Proses perhitungan sebagian besar benar	3
		Proses perhitungan sebagian kecil saja yang benar	2
		Proses perhitungan sama sekali salah	1
		Tidak ada respons jawaban	0
4.	Membuat sketsa	Sketsa objek dan bayangan oleh transformasi benar	5
		Sketsa objek dan bayangan oleh transformasi benar tapi kurang lengkap	3
		Sketsa objek dan bayangan oleh transformasi tidak benar	2



No.	Aspek Penilaian	Rubrik Penilaian	Skor
		Tidak ada sketsa	0
		Skor maksimal =	20
		Skor minimal =	0

### 3. Instrumen Penilaian Pengetahuan

(Penilaian kinerja dalam menyelesaikan tugas presentasi)

No.	Nama Peserta didik	Aspek					Jumlah Skor	Nilai
		Komunikasi	Sistematika Penyampaian	Penguasaan Materi	Keberanian	Antusias		
1.								
2.								
3.								
4.								
5.								
6.								

SB = Sangat Baik    B = Baik    KB = Kurang Baik

#### Keterangan Skor:

##### Komunikasi:

- 1 = Tidak dapat berkomunikasi
- 2 = Komunikasi agak lancar, tetapi sulit dimengerti
- 3 = Komunikasi lancar tetapi kurang jelas dimengerti
- 4 = Komunikasi sangat lancar, benar, dan jelas

##### Wawasan:

- 1 = Tidak menunjukkan pengetahuan/materi
- 2 = Sedikit memiliki pengetahuan/materi
- 3 = Memiliki pengetahuan/materi tetapi kurang luas
- 4 = Memiliki pengetahuan/materi yang luas

##### Antusias:

- 1 = Tidak antusias
- 2 = Kurang antusias
- 3 = Antusias tetapi kurang kontrol
- 4 = Antusias dan terkontrol

**Sistematika Penyampaian:**

- 1 = Tidak sistematis
- 2 = Sistematis
- 3 = Sistematis, uraian cukup
- 4 = Sistematis, uraian luas, dan jelas

**Keberanian:**

- 1 = Tidak ada keberanian
- 2 = Kurang berani
- 3 = Berani
- 4 = Sangat berani

Skor Maksimal = 20

$$\text{Nilai} = \frac{\text{Skor Perolehan}}{\text{Skor Maksimal}} \times 100\%$$

**G. Pengayaan**

Bentuk pembelajaran pengayaan adalah pemberian asesmen portofolio tambahan yang memuat asesmen masalah autentik, proyek, keterampilan proses, *check up* diri, dan asesmen kerja sama kelompok. Sebelum asesmen ini dikembangkan terlebih dahulu dilakukan identifikasi kemampuan belajar berdasarkan jenis serta tingkat kelebihan belajar peserta didik. Misalnya, belajar lebih cepat, menyimpan informasi lebih mudah, keingintahuan lebih tinggi, berpikir mandiri, superior dan berpikir abstrak, dan memiliki banyak minat. Pembelajaran pengayaan dapat dilaksanakan melalui belajar kelompok, belajar mandiri, bimbingan khusus dari guru dan para ahli (mentor).

Materi pembahasan pada pembelajaran pengayaan bertumpu pada pengembangan kompetensi dasar wajib tertera pada Kurikulum Matematika 2013, termasuk pengembangan kompetensi dasar peminatan. Materi pembahasan dituangkan dalam asesmen masalah autentik, proyek, keterampilan proses, *check up* diri, dan asesmen kerja sama kelompok. Keterampilan yang dibangun melalui materi matematika yang dipelajari adalah kemampuan berpikir tingkat tinggi (berpikir kreatif dan kritis) serta kemampuan adaptif terhadap perubahan, penggunaan teknologi, dan membangun kerja sama antar siswa dan orang lain yang lebih memahami masalah yang diajukan dalam asesmen.



## H. Remedial

Pembelajaran remedial membantu peserta didik yang mengalami kesulitan dalam belajar. Pembelajaran remedial adalah tindakan perbaikan pembelajaran bagi peserta didik yang belum mencapai kompetensi. Remedial bukan mengulang tes (ulangan harian) dengan materi yang sama, tetapi guru memberikan perbaikan pembelajaran pada KD yang belum dikuasai oleh peserta didik melalui upaya tertentu.

Bentuk pembelajaran remedial tergantung pada jumlah peserta didik yang mengalami kegagalan mencapai kompetensi dasar yang ditetapkan. Beberapa alternatif bentuk pelaksanaan pembelajaran remedial di sekolah.

- a. Jika jumlah peserta didik yang mengikuti remedial lebih dari 50%, maka tindakan yang dilakukan adalah pemberian pembelajaran ulang dengan model dan strategi pembelajaran yang lebih inovatif berbasis pada berbagai kesulitan belajar yang dialami peserta didik yang berdampak pada peningkatan kemampuan untuk mencapai kompetensi dasar tertentu.
- b. Jika jumlah peserta didik yang mengikuti remedial lebih dari 20% tetapi kurang dari 50%, maka tindakan yang dilakukan adalah pemberian tugas terstruktur baik secara berkelompok dan tugas mandiri. Tugas yang diberikan berbasis pada berbagai kesulitan belajar yang dialami peserta didik yang berdampak pada peningkatan kemampuan untuk mencapai kompetensi dasar tertentu.
- c. Jika jumlah peserta didik yang mengikuti remedial maksimal 20%, maka tindakan yang dilakukan adalah pemberian bimbingan secara khusus, misalnya bimbingan perorangan oleh guru dan tutor sebaya.



## I. Rangkuman

Setelah kita membahas materi transformasi, kita membuat kesimpulan sebagai hasil pengamatan pada berbagai konsep dan aturan transformasi sebagai berikut:

1. Transformasi yang dikaji terdiri dari translasi (pergeseran), refleksi (pencerminan), rotasi (perputaran) dan dilatasi (perkalian).
2. Matriks transformasi yang diperoleh adalah:

No.	Transformasi	Matrik Transformasi
1.	Translasi $(a, b)$	$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$
2.	Refleksi Titik $O(0, 0)$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
3.	Refleksi Sumbu $x$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
4.	Refleksi Sumbu $y$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
5.	Refleksi garis $y = x$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
6.	Refleksi garis $y = -x$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
7.	Rotasi $[\alpha, P(a, b)]$	$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$



No.	Transformasi	Matrik Transformasi
8.	Dilatasi $[k, P(a, b)]$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

3. Transformasi mempunyai sifat-sifat sebagai berikut:

**Translasi**

Bangun yang digeser (translasi) tidak mengalami perubahan bentuk dan ukuran.

**Refleksi**

Bangun yang dicerminkan (refleksi) dengan cermin datar tidak mengalami perubahan bentuk dan ukuran. Jarak bangun dengan cermin (cermin datar) adalah sama dengan jarak bayangan dengan cermin tersebut.

**Rotasi**

Bangun yang diputar (rotasi) tidak mengalami perubahan bentuk dan ukuran.

**Dilatasi**

Bangun yang diperbesar atau diperkecil (dilatasi) dengan skala  $k$  dapat mengubah ukuran atau tetap ukurannya tetapi tidak mengubah bentuk.

- Jika  $k > 1$  maka bangun akan diperbesar dan terletak searah terhadap pusat dilatasi dengan bangun semula.
- Jika  $k = 1$  maka bangun tidak mengalami perubahan ukuran dan letak.
- Jika  $0 < k < 1$  maka bangun akan diperkecil dan terletak searah terhadap pusat dilatasi dengan bangun semula.
- Jika  $-1 < k < 0$  maka bangun akan diperkecil dan terletak berlawanan arah terhadap pusat dilatasi dengan bangun semula.
- Jika  $k = -1$  maka bangun tidak akan mengalami perubahan bentuk dan ukuran dan terletak berlawanan arah terhadap pusat dilatasi dengan bangun semula.
- Jika  $k < -1$  maka bangun akan diperbesar dan terletak berlawanan arah terhadap pusat dilatasi dengan bangun semula.



Selanjutnya, kita akan membahas tentang materi barisan dan deret. Materi prasyarat yang harus kamu kuasai adalah himpunan, fungsi, dan operasi hitung bilangan. Hal ini sangat berguna dalam penentuan fungsi dari barisan tersebut. Semua apa yang kamu sudah pelajari sangat berguna untuk melanjutkan bahasan berikutnya dan seluruh konsep dan aturan-aturan matematika dibangun dari situasi nyata dan diterapkan dalam pemecahan masalah kehidupan.



# BAB 5

## Barisan

### A. Kompetensi Inti

<b>Sikap</b>	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Menghargai dan menghayati ajaran agama yang dianutnya.</li><li>2. Menghayati dan mengamalkan perilaku jujur, disiplin, tanggung jawab, peduli (gotong royong, kerja sama, toleran, damai), santun, responsif dan pro-aktif dan menunjukkan sikap sebagai bagian dari solusi atas berbagai permasalahan dalam berinteraksi secara efektif dengan lingkungan sosial dan alam serta dalam menempatkan diri sebagai cerminan bangsa dalam pergaulan dunia.</li></ol>
<b>Pengetahuan</b>	<ol style="list-style-type: none"><li>3. Memahami, menerapkan, menganalisis pengetahuan faktual, konseptual, prosedural berdasarkan rasa ingin tahunya tentang ilmu pengetahuan, teknologi, seni, budaya, dan humaniora dengan wawasan kemanusiaan, kebangsaan, kenegaraan, dan peradaban terkait penyebab fenomena dan kejadian, serta menerapkan pengetahuan prosedural pada bidang kajian yang spesifik sesuai dengan bakat dan minatnya untuk memecahkan masalah.</li></ol>
<b>Keterampilan</b>	<ol style="list-style-type: none"><li>4. Mengolah, menalar, dan menyaji dalam ranah konkret dan ranah abstrak terkait dengan pengembangan dari yang dipelajarinya di sekolah secara mandiri, dan mampu menggunakan metode sesuai kaidah keilmuan.</li></ol>



## B. Kompetensi Dasar dan Indikator

Indikator Pencapaian Kompetensi pada kegiatan pembelajaran dapat dikembangkan oleh guru yang disesuaikan dari kondisi peserta didik dan lingkungan di tempat guru mengajar. Berikut ini dipaparkan contoh Indikator Pencapaian Kompetensi yang dapat dijabarkan dari KD pengetahuan 3.8 dan KD Keterampilan 4.8.

No.	Kompetensi Dasar	Indikator Pencapaian Kompetensi
1.	3.6 Menggeneralisasi pola bilangan dan jumlah pada barisan Aritmetika dan Geometri.	3.6.1 Mendefinisikan barisan 3.6.2 Menyatakan pola
2.	4.6 Menggunakan pola barisan aritmetika atau geometri untuk menyajikan dan menyelesaikan masalah kontekstual (termasuk pertumbuhan, peluruhan, bunga majemuk, dan anuitas)	4.6.1 Menyajikan model matematika dari suatu masalah nyata yang berkaitan dengan barisan. 4.6.2 Masalah kontekstual berkaitan dengan pertumbuhan, peluruhan, bunga majemuk, dan anuitas.

## C. Tujuan Pembelajaran

Pembelajaran materi barisan melalui pengamatan, tanya jawab, penugasan individu dan kelompok, diskusi kelompok, dan penemuan (*discovery*) diharapkan siswa dapat:

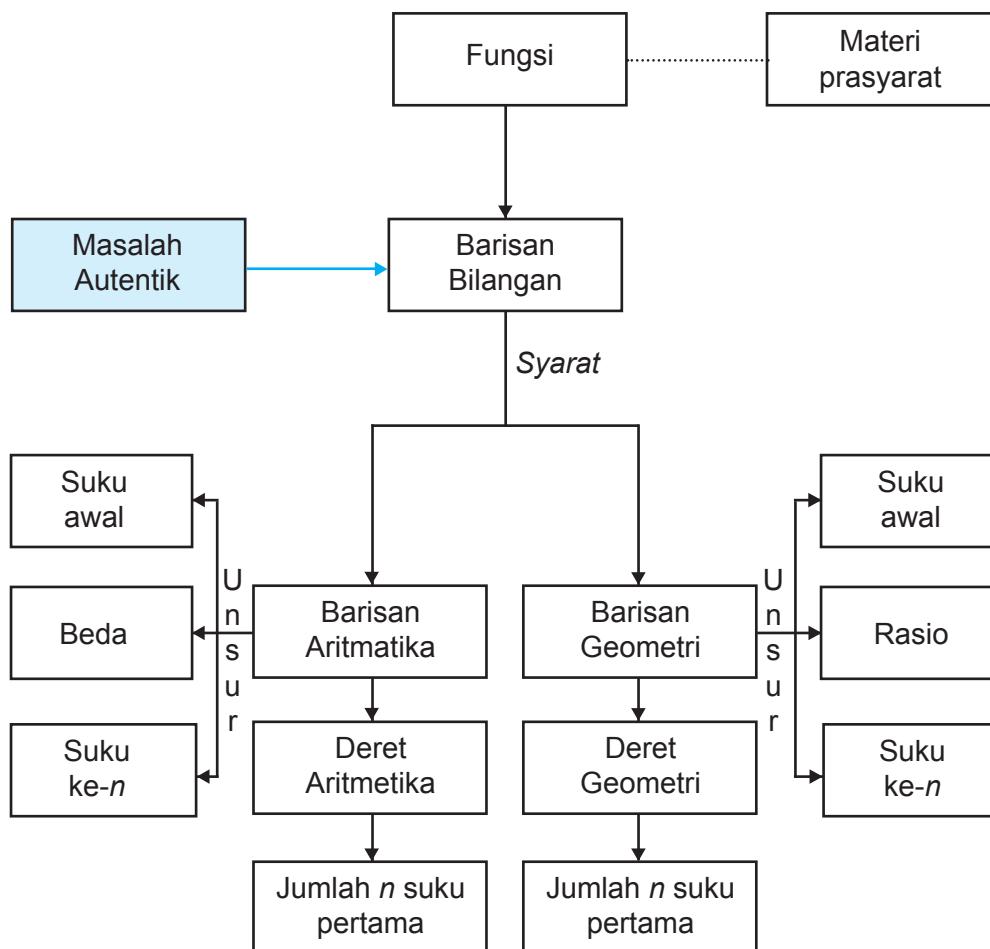
1. Melatih sikap sosial berani bertanya, berpendapat, mau mendengar orang lain, bekerja sama dalam diskusi di kelompok sehingga terbiasa berani bertanya, berpendapat, mau mendengar orang lain, bekerja sama dalam aktivitas sehari-hari
2. Menunjukkan ingin tahu selama mengikuti proses pembelajaran
3. Bertanggung jawab terhadap kelompoknya dalam menyelesaikan tugasnya
4. Menjelaskan pengertian barisan



5. Menjelaskan dengan kata-kata dan menyatakan masalah dalam sehari-hari yang berkaitan dengan barisan
6. Menunjukkan pola barisan
7. Menyajikan model matematika berdasarkan masalah nyata berkaitan dengan barisan



## D. Diagram Alir





## E. Proses Pembelajaran

### 5.1, 5.2 Membangun Konsep Barisan dan Barisan Aritmatika

Sebelum Pelaksanaan Kegiatan

1. Siswa diharapkan sudah membawa perlengkapan alat-alat tulis untuk pembelajaran.
2. Bentuklah kelompok kecil siswa yang memungkinkan belajar secara efektif dan efisien.
3. Sediakan tabel-tabel yang diperlukan bagi siswa untuk mengisikan hasil kerjanya pada tiap kegiatan yang dilaksanakan.

No.	Deskripsi Kegiatan
1.	<b>Kegiatan Pendahuluan</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• Pembelajaran dimulai dengan salam dan doa</li><li>• <i>Apersepsi</i><ol style="list-style-type: none"><li>1. Para siswa diperkenalkan dengan informasi berbagai bentuk baik susunan benda dan susunan angka.</li><li>2. Informasikan kepada siswa bahwa informasi seperti, susunan barang, susunan angka dapat dibentuk menjadi beberapa susunan angka yang sederhana.</li><li>3. Berilah kesempatan kepada siswa untuk memikirkan bentuk susunan angka yang dibentuk.</li><li>4. Kemudian ajaklah siswa untuk memahami salah satu bentuk yang dapat dibuat seperti yang telah diuraikan pada buku siswa.</li><li>5. Berdasarkan masalah dan kegiatan yang diberikan pada buku siswa, instruksikan siswa agar mampu menemukan konsep barisan.</li><li>6. Berilah penilaian kepada siswa yang sedang melakukan aktivitas membuat susunan barisan.</li></ol></li></ul>



## 2. Kegiatan Inti

### *Pengantar Pembelajaran*

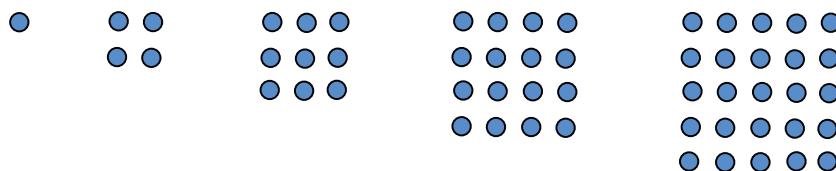
- Tumbuhkan motivasi internal dalam diri siswa melalui menunjukkan manfaat mempelajari barisan dalam kehidupan siswa
- Ajaklah siswa untuk memperhatikan dan memahami masalah pada buku siswa
- Himbaulah siswa untuk melakukan kegiatan yang ada pada buku siswa
- Himbaulah siswa untuk memerhatikan masalah yang ada juga disekitar sesuai dengan konsep barisan yang akan ditemukan

### *Mengamati*

- Arahkan siswa menemukan konsep barisan dari berbagai situasi nyata yang dekat dengan kehidupan siswa.
- Guru memberikan kesempatan pada siswa untuk mengamati masalah serta contoh yang ada pada buku antara lain:

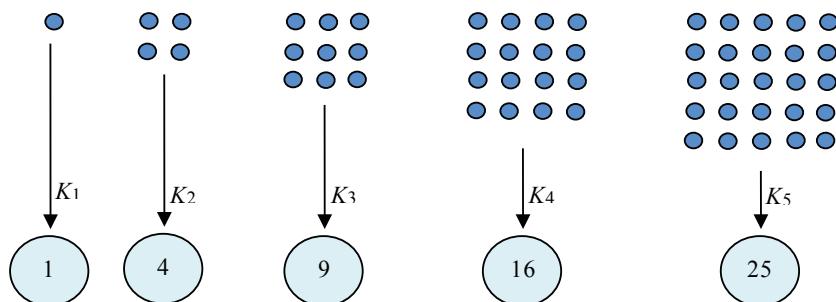
### *Masalah 5.1*

- Beberapa kelereng dikelompokkan dan disusun sehingga setiap kelompok tersusun dalam bentuk persegi sebagai berikut:



**Gambar 5.1:** Susunan Kelereng

Kelereng dihitung pada setiap kelompok dan diperoleh barisan: 1, 4, 9, 16, 25



**Gambar 5.1:** Jumlah Kelereng pada Setiap Kelompok



### **Permasalahan**

- Dapatkah kamu temukan bilangan berikutnya pada barisan tersebut? Dapatkah kamu temukan pola barisan tersebut? Tentukan banyak kelereng pada kelompok ke-15?.

### **Contoh 5.1**

Perhatikan barisan huruf berikut:

ABBCCDDDDABBCCDDDDABBCCDDDD . . . .

Amatilah barisan huruf tersebut terlebih dahulu! Tentukanlah huruf pada urutan  $2^5 \times 3^3$ !

### **Contoh 5.2**

Sebuah barisan bilangan asli dituliskan sebagai berikut: 12345678910 11121314151617181920212223242526 . . . sehingga suku ke-10 = 1, suku ke-11 = 0, suku ke-12 = 1 dan seterusnya. Dapatkah kamu temukan angka yang menempati suku ke-2004?

### **Contoh 5.4**

Suatu barisan dengan pola  $s_n = 2n^3 - 3n^2$ . Tentukan pola barisan tersebut kemudian tentukanlah suku ke-10.

### **Masalah 5.2**



Perhatikan gambar tumpukan jeruk di samping ini! Bagaimana cara menentukan atau menduga banyak jeruk dalam satu tumpukan?

**Gambar 5.3:** Tumpukan Buah Jeruk

- Guru memberikan kesempatan siswa untuk mengikuti instruksi pada kegiatan.
- Berilah kesempatan kepada siswa untuk mendiskusikan tentang hubungan antara data terhadap konsep barisan yang diperoleh untuk membangun persepsi awal.

### **Menanya**

- Siswa diupayakan untuk bertanya tentang hubungan susunan benda ataupun angka terhadap konsep barisan dan barisan aritmatika
- Guru memastikan kelompok dapat bekerja sama dalam merumuskan konsep yang akan dicapai dengan melemparkan ataupun merangsang siswa untuk bertanya.



	<p><b>Menalar</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>• Guru memberikan kesempatan siswa untuk merancang model barisan dan barisan aritmetika dari setiap permasalahan yang ada</li><li>• Ajaklah siswa untuk mendiskusikan permasalahan yang terdapat pada setiap buku siswa sehingga diperoleh keterkaitan masalah yang membentuk asumsi awal terhadap konsep barisan dan barisan aritmetika.</li></ul> <p><b>Mengomunikasikan</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>• Mintalah siswa untuk berbagi hasil karyanya ke teman sebangkunya, dan pastikan temannya yang menerima hasil karya tersebut memahami apa yang harus dilakukan.</li><li>• Guru memberikan kesempatan siswa untuk dapat menyatakan sendiri konsep barisan dengan bahasa dan penyampaiannya sendiri.</li><li>• Guru memastikan siswa dapat menjelaskan pola barisan dan barisan aritmetika secara iteratif.</li><li>• Guru memastikan siswa dapat memahami pola barisan dan barisan aritmatika secara rekursif.</li></ul>
3.	<p><b>Kegiatan Penutup</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>• Periksalah apakah semua kelompok sudah mengumpulkan tugas-tugasnya dan apakah identitas kelompok sudah jelas</li><li>• Berikan penilaian terhadap proses dan hasil karya siswa dengan menggunakan rubrik penilaian</li><li>• Guru sebaiknya hanya mengkonfirmasi akan kebenaran konsep barisan yang diperoleh siswa.</li></ul>

## Penilaian

### 1. Prosedur Penilaian

No.	Aspek yang dinilai	Teknik Penilaian	Waktu Penilaian
1.	Berani bertanya	Pengamatan	Kegiatan inti
2.	Berpendapat	Pengamatan	Kegiatan inti
3.	Mau mendengar orang lain	Pengamatan	Kegiatan inti
4.	Bekerja sama	Pengamatan	Kegiatan inti
5.	Pemahaman konsep	Tes Tertulis	Kegiatan penutup



## 2. Instrumen Pengamatan Sikap

### Rasa ingin tahu

1. Kurang baik jika sama sekali tidak berusaha untuk mencoba atau bertanya atau acuh tak acuh (tidak mau tau) dalam proses pembelajaran
2. Baik jika menunjukkan sudah ada usaha untuk mencoba atau bertanya dalam proses pembelajaran tetapi masih belum konsisten
3. Sangat baik jika menunjukkan adanya usaha untuk mencoba atau bertanya dalam proses pembelajaran secara kontinu dan konsisten

### Indikator perkembangan sikap tanggung jawab (dalam kelompok)

1. Kurang baik jika menunjukkan sama sekali tidak ambil bagian dalam melaksanakan tugas kelompok.
2. Baik jika menunjukkan sudah ada usaha ambil bagian dalam melaksanakan tugas kelompok tetapi belum konsisten.
3. Sangat baik jika menunjukkan sudah ambil bagian dalam menyelesaikan tugas kelompok secara kontinu dan konsisten.

Bubuhkan tanda ✓ pada kolom-kolom sesuai hasil pengamatan.

No.	Nama	Rasa Ingin Tahu			Tanggung Jawab		
		SB	B	KB	SB	B	KB
1.							
2.							
3.							
...							
...							
...							
29.							
30.							

SB = Sangat Baik

B = Baik

KB = Kurang Baik



### 3. Instrumen penilaian 1:

#### Petunjuk:

1. Kerjakan soal berikut secara individu, dilarang bekerja sama dan dilarang menyontek.
2. Selesaikanlah soal-soal berikut ini:

#### Soal:

1. Bila  $a$ ,  $b$ ,  $c$  merupakan suku berurutan yang membentuk barisan aritmetika, buktikan bahwa ketiga suku berurutan berikut ini juga membentuk barisan aritmetika  $\frac{1}{bc}$ ,  $\frac{1}{ca}$ ,  $\frac{1}{ab}$
2. Tentukan banyak bilangan asli yang kurang dari 999 yang tidak habis dibagi 3 atau 5 adalah . . . .
3. Diketahui barisan yang dibentuk oleh semua bilangan asli 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 . . . .  
Angka berapakah yang terletak pada bilangan ke 2004? (bilangan ke-12 adalah angka 1 dan bilangan ke-15 adalah angka 2).
4. Pola ABBCCDDDDABBBCCDDDDABBBCCDDDD . . . berulang sampai tak hingga. Huruf apakah yang menempati urutan  $2^6 3^4$ ?
5. Diketahui barisan yang dibentuk oleh semua bilangan asli 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 . . . .  
Angka berapakah yang terletak pada bilangan ke 2013? (bilangan ke-12 adalah angka 1 dan bilangan ke-15 adalah angka 2).

#### Pedoman Penilaian

No. Soal	Aspek Penilaian	Rubrik Penilaian	Skor	Skor Maksimal
1.	Keterampilan menghitung	Dijawab benar	20	20
		Dijawab salah	5	
		Tidak ada jawaban	0	
2.	Pemahaman konsep	Dijawab benar	20	20
		Dijawab salah	5	
		Tidak ada jawaban	0	
3.	Keterampilan dan ketelitian menghitung	Dijawab benar	20	20
		Dijawab salah	10	
			0	



No. Soal	Aspek Penilaian	Rubrik Penilaian	Skor	Skor Maksimal
4.	Keterampilan dan ketelitian menghitung	Dijawab benar	20	20
		Dijawab salah	10	
		Tidak ada jawaban	0	
5.	Pemahaman konsep	Dijawab benar	20	20
		Dijawab salah	10	
			0	
Skor maksimal =			100	100
Skor minimal =			0	0

### 5.3 Menemukan Konsep Barisan Geometri

Sebelum Pelaksanaan Kegiatan

1. Pastikan siswa sudah paham dengan konsep dan pola barisan.
2. Berikan motivasi pada siswa akan pentingnya belajar barisan geometri.
3. Pilih dan rancang masalah sederhana untuk membelajarkan barisan geometri.

No.	Deskripsi Kegiatan
1.	<b>Kegiatan Pendahuluan</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• <i>Apersepsi</i><ol style="list-style-type: none"><li>a. Memberi motivasi pentingnya materi ini.</li><li>b. Memberi informasi tentang kompetensi yang akan dicapai.</li></ol></li></ul>
2.	<b>Kegiatan Inti</b> <b>Pengantar</b> <p>Sebelum melakukan kegiatan inti sebaiknya guru:</p> <ol style="list-style-type: none"><li>1. Mengingat kembali tentang pengertian barisan dan pola barisan.</li><li>2. Ajak siswa untuk mengamati dan mendiskusikan beberapa contoh dan masalah yang diberikan.</li></ol>

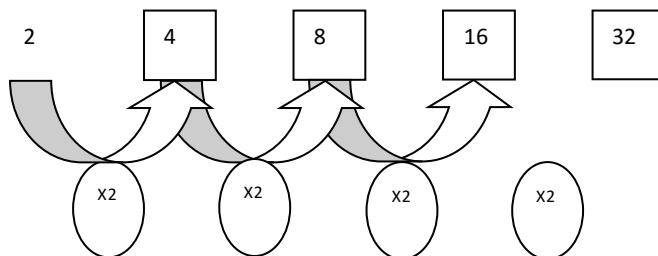


### Mengamati

- Arahkan siswa siswa mengamati setiap contoh-contoh yang berkaitan dengan barisan geometri

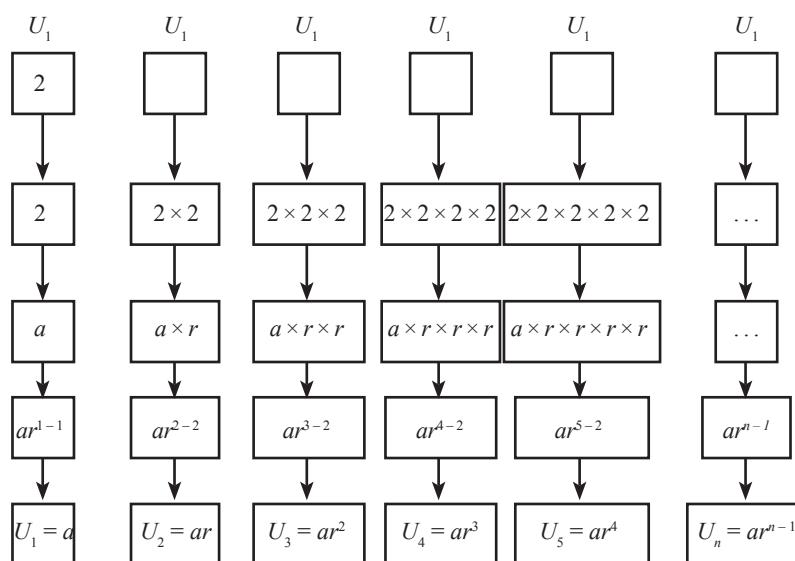
### Contoh 5.6

Perhatikan barisan bilangan 2, 4, 8, 16, ...



Nilai perbandingan  $\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = \dots = \frac{u_n}{u_{n-1}} = 2$ . Jika nilai perbandingan dua suku berurutan dimisalkan  $r$  dan nilai suku pertama adalah  $a$ , maka susunan bilangan tersebut dapat dinyatakan dengan  $2, 2 \times 2, \dots$

Perhatikan gambar berikut ini!



dari pola di atas dapat disimpulkan bahwa  $u_n = ar^{n-1}$

- Berilah kesempatan kepada siswa untuk mendiskusikan penyelesaian sederhana dari model barisan geometri tersebut.



	<p><b><i>Menanya</i></b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>• Siswa diupayakan untuk bertanya tentang solusi alternatif yang dapat ditemukan</li><li>• Guru memastikan kelompok dapat bekerja sama dalam merumuskan konsep yang akan dicapai dengan melemparkan ataupun merangsang siswa untuk bertanya.</li></ul> <p><b><i>Menalar</i></b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>• Ajaklah siswa untuk mendiskusikan permasalahan yang terdapat pada setiap buku siswa sehingga diperoleh penyelesaian barisan geometri</li><li>• Guru memberikan kesempatan siswa untuk merancang model barisan aritmatika dari setiap permasalahan yang ada</li></ul> <p><b><i>Mengomunikasikan</i></b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>• Mintalah siswa untuk berbagi hasil karyanya pada teman dan pastikan semua siswa memahami konsep dan penyelesaian barisan geometri.</li><li>• Guru memberikan kesempatan siswa untuk dapat menyatakan sendiri konsep barisan geometri dengan bahasa dan penyampaiannya sendiri.</li><li>• Guru memastikan siswa dapat memahami pola barisan geometri secara iteratif.</li><li>• Guru memastikan siswa dapat memahami pola barisan geometri secara rekursif.</li><li>• Guru memastikan siswa menemukan solusi alternatif dari barisan geometri.</li></ul>
3.	<p><b>Kegiatan Penutup</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>• Mintalah siswa untuk melakukan refleksi dan menuliskan hal penting dari yang dipelajarinya</li><li>• Berikan penilaian terhadap proses dan hasil karya siswa dengan menggunakan rubrik penilaian</li><li>• Jika dipandang perlu, berilah siswa latihan untuk dikerjakan di rumah</li></ul>



## Penilaian

### 1. Prosedur Penilaian

No.	Aspek yang dinilai	Teknik Penilaian	Waktu Penilaian
1.	Berani bertanya	Pengamatan	Kegiatan Ayo Kita Amati dan Bertanya
2.	Berpendapat	Pengamatan	Kegiatan Ayo Kita Mencoba dan Berbagi
3.	Mau mendengar orang lain	Pengamatan	Kegiatan Ayo Kita Berbagi
4.	Bekerja sama	Pengamatan	Kegiatan Ayo Kita Menggali Informasi dan Bernalar
5.	Pemahaman konsep	Tes Tertulis	Kegiatan Penutup

### 2. Instrumen Pengamatan Sikap:

#### Rasa ingin tahu

1. Kurang baik jika sama sekali tidak berusaha untuk mencoba atau bertanya atau acuh tak acuh (tidak mau tahu) dalam proses pembelajaran
2. Baik jika menunjukkan sudah ada usaha untuk mencoba atau bertanya dalam proses pembelajaran tetapi masih belum konsisten
3. Sangat baik jika menunjukkan adanya usaha untuk mencoba atau bertanya dalam proses pembelajaran secara kontinu dan konsisten

#### Indikator perkembangan sikap tanggung jawab (dalam kelompok)

1. Kurang baik jika menunjukkan sama sekali tidak ambil bagian dalam melaksanakan tugas kelompok.
2. Baik jika menunjukkan sudah ada usaha ambil bagian dalam melaksanakan tugas kelompok tetapi belum konsisten.
3. Sangat baik jika menunjukkan sudah ambil bagian dalam menyelesaikan tugas kelompok secara kontinu dan konsisten.



Bubuhkan tanda  $\surd$  pada kolom-kolom sesuai hasil pengamatan.

No.	Nama	Rasa Ingin Tahu			Tanggung Jawab		
		SB	B	KB	SB	B	KB
1.							
2.							
3.							
...							
...							
...							
29.							
30.							

SB = Sangat Baik

B = Baik

KB = Kurang Baik

### 3. Instrumen Penilaian:

#### Petunjuk:

1. Kerjakan soal berikut secara individu, dilarang bekerja sama dan dilarang menyontek.
2. Selesaikanlah soal-soal berikut ini:

#### Soal:

1. Tentukan rumus suku ke- $n$  dan suku ke-10 dari barisan bilangan di bawah ini!
  - a) 1, 4, 16, 24, ...
  - b) 5, 10, 20, 40, ...
  - c) 9, 27, 81, 243, ...
  - d)  $\frac{1}{25}, \frac{1}{5}, 1, 5, \dots$
  - e) 81, 27, 9, 3, ...
2. Tentukan rasio dan suku pertama dari barisan geometri di bawah ini!
  - a) Suku ke-4 = 8 dan suku ke-6 = 729
  - b) Suku ke-2 = 6 dan suku ke-5 = 162
  - c)  $U_3 = 10$  dan  $U_6 = 1,25$



3. Selesaikan barisan geometri di bawah ini!
  - a) Suku ke-4 = 27 dan suku ke-6 = 243, tentukan suku ke-8
  - b)  $U_2 = 10$  dan  $U_6 = 10$ , tentukan  $U_9$
  - c)  $U_2 = 2\sqrt{2}$  dan  $U_5 = 8$ , tentukan  $U_{10}$
4. Tentukan hasil dari jumlah bilangan di bawah ini !
  - a)  $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots$  (sampai 10 suku)
  - b)  $54 + 18 + 6 + 2 + \dots$  (sampai 9 suku)
  - c)  $5 - 15 + 45 - 135 + \dots$  (sampai 8 suku)
  - d)  $1 + 1 + 3 + 2 + 9 + 4 + 27 + 8 + \dots$  (sampai 19 suku)
  - e)  $8 + 7 + 9 + 3 + \dots + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} = \dots$
5. Tiga bilangan membentuk barisan aritmetika. Jika suku ketiga ditambah 3 dan suku kedua dikurangi 1, diperoleh barisan geometri. Jika suku ketiga barisan aritmetika ditambah 8, maka hasilnya menjadi 5 kali suku pertama. Tentukan beda dari barisan aritmetika tersebut!

#### Pedoman Penilaian

No. Soal	Aspek Penilaian	Rubrik Penilaian	Skor	Skor Maksimal
1.	Keterampilan menghitung	Dijawab benar	20	20
		Dijawab salah	5	
		Tidak ada jawaban	0	
2.	Keterampilan menghitung	Dijawab benar	20	20
		Dijawab salah	5	
		Tidak ada jawaban	0	
3.	Keterampilan menghitung	Dijawab benar	20	20
		Dijawab salah	5	
		Tidak ada jawaban	0	



No. Soal	Aspek Penilaian	Rubrik Penilaian	Skor	Skor Maksimal
4.	Keterampilan menghitung	Dijawab benar	20	20
		Dijawab salah	10	
		Tidak ada jawaban	0	
5.	Keterampilan menguraikan	Dijawab benar	20	20
		Dijawab salah	10	
		Tidak ada jawaban	0	
Skor maksimal =			100	100
Skor minimal =			0	0

#### 5.4 Aplikasi Barisan

Sebelum Pelaksanaan Kegiatan

1. Pastikan siswa sudah paham dengan konsep dan pola barisan.
2. Berikan motivasi pada siswa akan pentingnya belajar barisan geometri.
3. Pilih dan rancang masalah sederhana untuk membelajarkan barisan geometri.

No.	Deskripsi Kegiatan
1.	<b>Kegiatan Pendahuluan</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• <i>Apersepsi</i><ol style="list-style-type: none"><li>a. Memberi motivasi pentingnya materi ini.</li><li>b. Memberi informasi tentang kompetensi yang akan dicapai.</li></ol></li></ul>
2.	<b>Kegiatan Inti Pengantar</b> <p>Sebelum melakukan kegiatan inti sebaiknya guru:</p> <ol style="list-style-type: none"><li>1. Mengingatkan kembali tentang pengertian barisan, barisan aritmetika dan geometri.</li><li>2. Ajak siswa untuk mengamati dan mendiskusikan beberapa contoh dan masalah yang diberikan.</li></ol>



### **Mengamati**

- Arahkan siswa siswa mengamati setiap masalah dan contoh yang berkaitan dengan barisan
- Guru memberikan kesempatan siswa untuk merancang model barisan dari setiap permasalahan yang berkaitan dengan barisan antara lain pertumbuhan, peluruhan, bunga majemuk, dan anuitas.

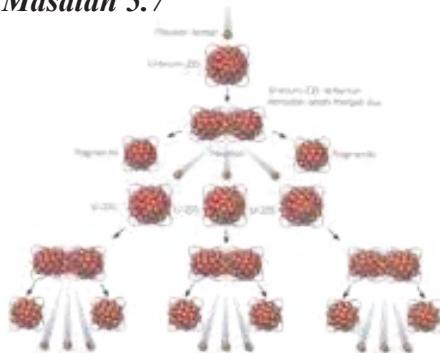
### **Masalah 5.6**

- Seorang peneliti mengamati perkembangan koloni bakteri yang terbentuk setiap jam. Apabila jumlah koloni bakteri mula-mula 100 dan setiap bakteri membelah menjadi dua setiap jam. Peneliti ingin mengetahui jumlah koloni bakteri yang terbentuk dalam waktu 50 jam dan buatlah grafik dari model persamaan yang ditemukan!

### **Contoh 5.9**

- Penduduk suatu kota metropolitan tercatat 3,25 juta jiwa pada tahun 2008, diperkirakan menjadi 4,5 jiwa pada tahun 2013. Jika tahun 2008 dianggap tahun dasar, berapa persen pertumbuhannya? Berapa Jumlah penduduknya pada tahun 2015?

### **Masalah 5.7**



**Gambar 5.12:** Peluruhan Atom

Suatu neutron dapat pecah mendadak menjadi suatu proton dan elektron dan ini terjadi sedemikian sehingga jika kita memiliki 1.000.000 neutron, kira-kira 5 % dari padanya akan berubah pada akhir satu menit. Berapa neutron yang masih ada setelah  $n$  menit dan 10 menit?



### Masalah 5.8

Ovano menerima uang warisan sebesar Rp. 70.000.000,- dari orang tuanya dan berniat untuk menginvestasikan dalam bentuk tabungan di bank selama 5 tahun. Dia menjajaki dua bank yang memiliki sistim pembungaan yang berbeda. Bank BCL menggunakan bunga tunggal sebesar 10 % per tahun dan Bank PHP menggunakan majemuk sebesar 9% per tahun. Dari hasil perhitungan pihak bank ia memperoleh ilustrasi investasi sebagai berikut:

Tahun	BANK BCL		BANK PHP	
	Bunga	Saldo Uang	Bunga2	Saldo Uang2
0	0	Rp 70,000,000.00	0	Rp 70,000,000.00
1	Rp 7,000,000.00	Rp 77,000,000.00	Rp 6,300,000.00	Rp 76,300,000.00
2	Rp 7,000,000.00	Rp 84,000,000.00	Rp 6,867,000.00	Rp 83,167,000.00
3	Rp 7,000,000.00	Rp 91,000,000.00	Rp 7,485,030.00	Rp 90,652,030.00
4	Rp 7,000,000.00	Rp 98,000,000.00	Rp 8,158,682.70	Rp 98,810,712.70
5	Rp 7,000,000.00	Rp 105,000,000.00	Rp 8,892,964.14	Rp 107,703,676.84
	<b>Total investasi</b>	<b>Rp 105,000,000.00</b>		<b>Rp 107,703,676.84</b>

Dari ilustrasi investasi di atas diperoleh kesimpulan bahwa walaupun Bank PHP menawarkan bunga majemuk yang lebih kecil daripada bunga tunggal Bank BCL namun hasil investasi yang dihasilkan adalah lebih besar.

- Berilah kesempatan kepada siswa untuk mendiskusikan penyelesaian sederhana dari model barisan tersebut

### Menanya

- Siswa diupayakan untuk bertanya tentang solusi alternatif yang dapat ditemukan.
- Guru memastikan kelompok dapat bekerja sama dalam merumuskan konsep yang akan dicapai dengan melemparkan ataupun merangsang siswa untuk bertanya.

### Menalar

- Ajaklah siswa untuk mendiskusikan permasalahan yang terdapat pada setiap buku siswa sehingga diperoleh penyelesaian barisan yang berkaitan dengan pertumbuhan, peluruhan, bunga majemuk, dan anuitas.



	<p><b>Mengomunikasikan</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>• Mintalah siswa untuk berbagi hasil karyanya pada teman dan pastikan semua siswa memahami prosedur penyelesaian barisan</li><li>• Guru memberikan kesempatan siswa untuk dapat menyelesaikan masalah barisan yang berkaitan dengan pertumbuhan, peluruhan, bunga majemuk, dan anuitas.</li><li>• Guru memastikan siswa menemukan solusi-solusi alternatif dari aplikasi barisan.</li></ul>
<b>3.</b>	<p><b>Kegiatan Penutup</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>• Mintalah siswa untuk melakukan refleksi dan menuliskan hal penting dari yang dipelajarinya</li><li>• Berikan penilaian terhadap proses dan hasil karya siswa dengan menggunakan rubrik penilaian</li><li>• Jika dipandang perlu, berilah siswa Uji Kompetensi 5.3 untuk dikerjakan di rumah</li><li>• Doa dan salam</li></ul>

## Penilaian

### 1. Prosedur Penilaian

No.	Aspek yang dinilai	Teknik Penilaian	Waktu Penilaian
1.	Berani bertanya	Pengamatan	Kegiatan Ayo Kita Amati dan Bertanya
2.	Berpendapat	Pengamatan	Kegiatan Ayo Kita Mencoba dan Berbagi
3.	Mau mendengar orang lain	Pengamatan	Kegiatan Ayo Kita Berbagi
4.	Bekerja sama	Pengamatan	Kegiatan Ayo Kita Menggali Informasi dan Bernalar
5.	Pemahaman konsep	Tes Tertulis	Kegiatan Penutup



## 2. Instrumen Pengamatan Sikap:

### Rasa ingin tahu

1. Kurang baik jika sama sekali tidak berusaha untuk mencoba atau bertanya atau acuh tak acuh (tidak mau tau) dalam proses pembelajaran
2. Baik jika menunjukkan sudah ada usaha untuk mencoba atau bertanya dalam proses pembelajaran tetapi masih belum ajeg/konsisten
3. Sangat baik jika menunjukkan adanya usaha untuk mencoba atau bertanya dalam proses pembelajaran secara terus menerus dan ajeg/konsisten

### Indikator perkembangan sikap tanggung jawab (dalam kelompok)

1. Kurang baik jika menunjukkan sama sekali tidak ambil bagian dalam melaksanakan tugas kelompok.
2. Baik jika menunjukkan sudah ada usaha ambil bagian dalam melaksanakan tugas kelompok tetapi belum ajeg/konsesten.
3. Sangat baik jika menunjukkan sudah ambil bagian dalam menyelesaikan tugas kelompok secara kontinu dan konsisten.

Bubuhkan tanda ✓ pada kolom-kolom sesuai hasil pengamatan.

No.	Nama	Rasa Ingin Tahu			Tanggung Jawab		
		SB	B	KB	SB	B	KB
1.							
2.							
3.							
...							
...							
...							
29.							
30.							

SB = Sangat Baik

B = Baik

KB = Kurang Baik



### 3. Instrumen Penilaian:

#### Petunjuk:

1. Kerjakan soal berikut secara individu, tidak boleh menyontek dan tidak boleh bekerja sama.
2. Jawablah pertanyaan/perintah di bawahnya.

#### Soal:

1. Pertumbuhan penduduk biasanya dinyatakan dalam persen. Misalnya, pertumbuhan penduduk adalah 2% per tahun artinya jumlah penduduk bertambah sebesar 2% dari jumlah penduduk tahun sebelumnya. Pertambahan penduduk menjadi dua kali setiap 10 tahun. Jumlah penduduk desa pada awalnya 500 orang, berapakah jumlah penduduknya setelah 70 tahun apabila pertumbuhannya 2,5%?
2. Kultur jaringan terhadap 1.500 bakteri yang diuji di laboratorium menunjukkan bahwa satu bakteri dapat membelah diri dalam waktu 2 jam.
  - a. Tentukan apakah ini termasuk masalah pertumbuhan atau peluruhan, berikan alasanmu?
  - c. Tentukan banyak bakteri setelah 20 jam.
  - d. Tentukan banyak bakteri setelah  $n$  jam.
3. Pada awal bekerja Amat mempunyai gaji Rp. 200 ribu per bulan. Tiap tahun gaji Amat naik sebesar Rp. 15 ribu per bulan. Berapa gaji Amat setelah dia bekerja selama 7 tahun?
4. Seseorang menabung Rp800.000 pada tahun pertama, tiap tahun tabungannya ditambah dengan Rp15.000 lebih banyak daripada tahun sebelumnya. Berapakah jumlah simpanannya pada akhir tahun ke 10?
5. Sebuah mobil seharga Rp600.000.000,00,- mengalami penyusutan harga setiap tahun membentuk barisan geometri dengan rasionya adalah  $\frac{1}{3}$ . Hitunglah harga mobil pada tahun ke- 5?



### Pedoman Penilaian

No. Soal	Aspek Penilaian	Rubrik Penilaian	Skor	Skor Maksimal
1.	Keterampilan menghitung	Dijawab benar	20	20
		Dijawab salah	10	
		Tidak ada jawaban	0	
2.	Keterampilan menghitung	Dijawab benar	20	20
		Dijawab salah	5	
		Tidak ada jawaban	0	
3.	Keterampilan menghitung	Dijawab benar	20	20
		Dijawab salah	5	
		Tidak ada jawaban	0	
4.	Keterampilan menghitung	Dijawab benar	20	20
		Dijawab salah	5	
		Tidak ada jawaban	0	
5.	Keterampilan menguraikan	Dijawab benar	20	20
		Dijawab salah	5	
		Tidak ada jawaban	0	
Skor maksimal =			100	100
Skor minimal =			0	0

### F. Pengayaan

Pengayaan merupakan kegiatan yang diberikan kepada siswa yang memiliki aselerasi pencapaian KD yang cepat (nilai maksimal) agar potensinya berkembang optimal dengan memanfaatkan sisa waktu yang dimilikinya. Guru sebaiknya merancang kegiatan pembelajaran lanjut yang terkait dengan barisan pada siswa.



## G. Remedial

Remedial merupakan perbaikan proses pembelajaran yang bertujuan pada pencapaian kompetensi dasar siswa. Guru memberikan perbaikan pembelajaran baik pada model, metode serta strategi pembelajaran. Jika guru melakukan pembelajaran dengan pola yang sama tidaklah maksimal sehingga disarankan guru memilih tindakan pembelajaran yang tepat sehingga siswa mampu memenuhi KD yang diharapkan.

Perlu dipahami oleh guru, bahwa remedial bukan mengulang tes (ulangan harian) dengan materi yang sama, tetapi guru memberikan perbaikan pembelajaran pada KD yang belum dikuasai oleh peserta didik melalui upaya tertentu. Setelah perbaikan pembelajaran dilakukan, guru melakukan tes untuk mengetahui apakah peserta didik telah memenuhi kompetensi minimal dari KD yang diremedialkan.

## H. Rangkuman

Beberapa hal penting sebagai kesimpulan dari hasil pembahasan materi barisan, disajikan sebagai berikut.

1. Barisan bilangan adalah sebuah fungsi dengan domainnya himpunan bilangan asli dan rangenya suatu himpunan bagian dari himpunan bilangan real.
2. Barisan aritmetika adalah barisan bilangan yang memiliki selisih dua suku berurutan selalu tetap. Selisih dua suku berurutan disebut beda.
3. Barisan geometri adalah barisan bilangan yang memiliki hasil bagi dua suku berurutan adalah tetap. Hasil bagi dua suku berurutan disebut rasio.

Masih banyak jenis barisan yang akan kamu pelajari pada jenjang yang lebih tinggi, seperti barisan naik dan turun, barisan harmonik, barisan Fibonacci, dan lain sebagainya. Kamu dapat menggunakan sumber bacaan lain untuk lebih mendalami sifat-sifat barisan



# BAB 6

## Limit Fungsi

### A. Kompetensi Inti

<b>Sikap</b>	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Menghargai dan menghayati ajaran agama yang dianutnya.</li><li>2. Menghayati dan mengamalkan perilaku jujur, disiplin, tanggung jawab, peduli (gotong royong, kerja sama, toleran, damai), santun, responsif dan pro-aktif dan menunjukkan sikap sebagai bagian dari solusi atas berbagai permasalahan dalam berinteraksi secara efektif dengan lingkungan sosial dan alam serta dalam menempatkan diri sebagai cerminan bangsa dalam pergaulan dunia.</li></ol>
<b>Pengetahuan</b>	<ol style="list-style-type: none"><li>3. Memahami, menerapkan, menganalisis pengetahuan faktual, konseptual, prosedural berdasarkan rasa ingin tahunya tentang ilmu pengetahuan, teknologi, seni, budaya, dan humaniora dengan wawasan kemanusiaan, kebangsaan, kenegaraan, dan peradaban terkait penyebab fenomena dan kejadian, serta menerapkan pengetahuan prosedural pada bidang kajian yang spesifik sesuai dengan bakat dan minatnya untuk memecahkan masalah.</li></ol>
<b>Keterampilan</b>	<ol style="list-style-type: none"><li>4. Mengolah, menalar, dan menyaji dalam ranah konkret dan ranah abstrak terkait dengan pengembangan dari yang dipelajarinya di sekolah secara mandiri, dan mampu menggunakan metode sesuai kaidah keilmuan.</li></ol>



## B. Kompetensi Dasar dan Indikator

Indikator pencapaian kompetensi pada pembelajaran dapat dikembangkan guru sendiri berdasarkan kondisi peserta didik masing-masing di tempat guru mengajar. Berikut ini dipaparkan contoh Indikator Pencapaian Kompetensi Pembelajaran yang dapat dijabarkan dari KD 3.7 dan KD 4.7.

No.	Kompetensi Dasar	Indikator Pencapaian Kompetensi
1.	3.7 Menjelaskan limit fungsi aljabar (fungsi polinom dan fungsi rasional) secara intuitif dan sifat-sifatnya, menentukan eksistensi.	3.7.1 Mengomunikasikan makna batas dalam konsep limit. 3.7.2 Menemukan contoh aplikasi limit fungsi dalam kehidupan sehari-hari. 3.7.3 Menunjukkan limit kiri dan limit kanan pada suatu fungsi. 3.7.4 Menunjukkan limit suatu fungsi secara intuitif berdasarkan gambar. 3.7.5 Menunjukkan bentuk tentu dan tak tentu suatu fungsi pada titik tertentu dan menunjukkan dalam grafik. 3.7.6 Menemukan sifat-sifat limit suatu fungsi. 3.7.7 Menggunakan sifat-sifat suatu fungsi dalam menemukan limit fungsi tersebut. 3.7.8 Menemukan limit suatu fungsi aljabar.
2.	4.7 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan limit fungsi aljabar.	4.7.1 Menggunakan konsep limit dalam menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan limit fungsi aljabar (polinom dan rasional). 4.7.2 Menentukan limit suatu fungsi dengan menggunakan cara pendekatan nilai, memfaktorkan atau dengan pergantian fungsi.



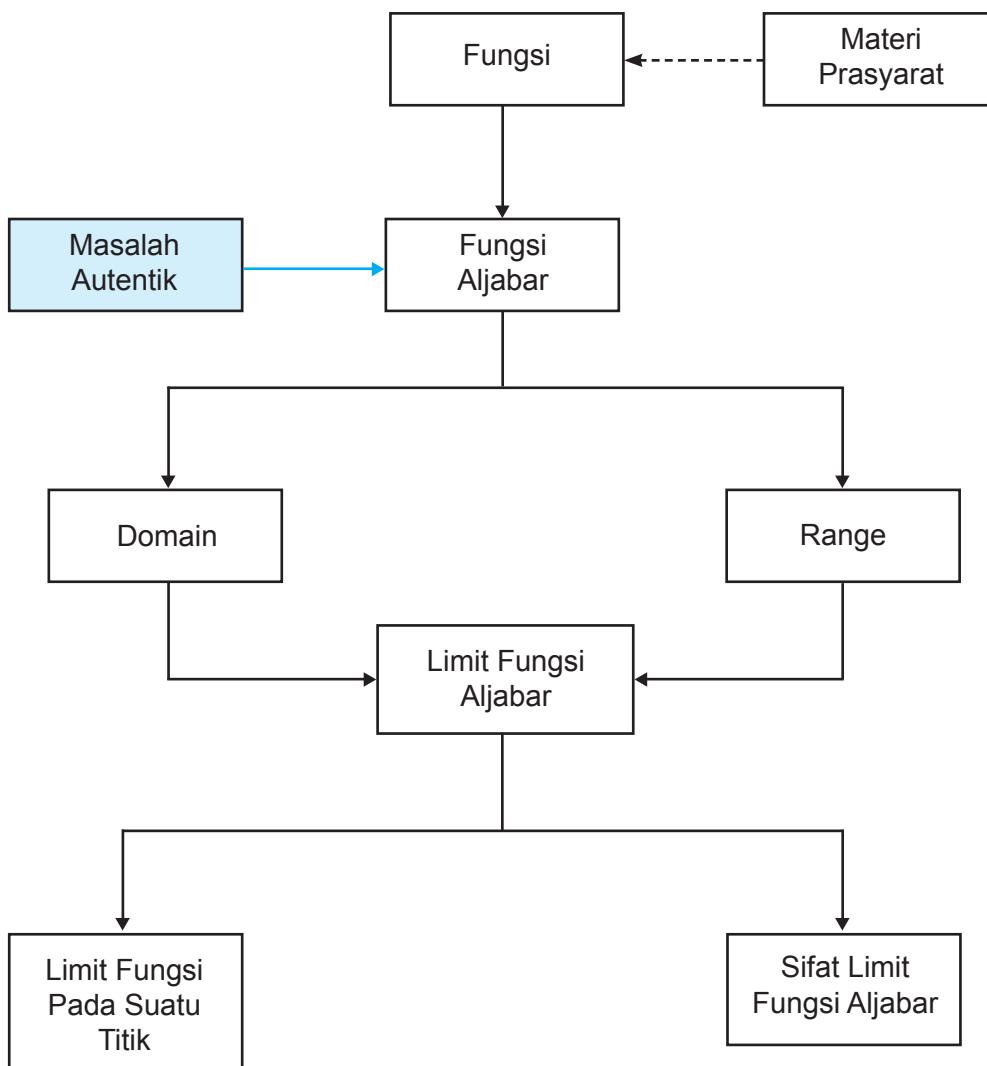
### C. Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari konsep limit fungsi melalui pengamatan, menalar, tanya jawab, mencoba menyelesaikan persoalan, penugasan individu dan kelompok, diskusi kelompok, dan mengomunikasikan pendapatnya, siswa mampu:

1. Melatih siswa menumbuhkan sikap perilaku ur, disiplin, tanggung jawab, peduli (gotong royong, kerja sama, toleran, damai), santun, responsif dan pro-aktif, berani bertanya, berpendapat, dan menghargai pendapat orang lain dalam aktivitas sehari-hari.
2. Menunjukkan rasa ingin tahu dalam memahami konsep dan menyelesaikan masalah.
3. Menyebutkan contoh-contoh aplikasi limit fungsi dalam kehidupan sehari-hari
4. Menunjukkan limit kiri dan limit kanan pada suatu fungsi dengan tabel dan gambar.
5. Menunjukkan limit suatu fungsi secara intuitif berdasarkan gambar.
6. Memberi contoh fungsi yang mempunyai bentuk tentu dan tak tentu pada titik tertentu.
7. Menunjukkan bentuk tentu dan tak tentu suatu fungsi pada titik tertentu dan menunjukkan dalam grafik.
8. Menemukan sifat-sifat limit suatu fungsi dan mengomunikasikannya dengan kata-kata sendiri.
9. Menggunakan sifat-sifat suatu fungsi dalam menemukan limit fungsi tersebut.
10. Menemukan limit suatu fungsi aljabar dengan pendekatan nilai dan manipulasi aljabar.
11. Menggunakan konsep limit dalam menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan limit fungsi aljabar (polinom dan rasional).
12. Menentukan limit suatu fungsi dengan menggunakan cara pendekatan nilai, memfaktorkan atau dengan pergantian fungsi.



#### D. Diagram Alir





## E. Proses Pembelajaran

### 6.1 Konsep Limit Fungsi

Sebelum Pelaksanaan Kegiatan

- Bentuk kelompok kecil siswa (3–4 orang) yang heterogen. Perhatikan karakteristik siswa dalam satu kelompok sehingga mendukung pembelajaran yang efisien dan efektif.
- Informasikan tujuan pembelajaran dan tata cara penilaian selama proses pembelajaran.
- Siapkan semua fasilitas yang mendukung selama proses pembelajaran.
- Siapkan RPP dan form penilaian.

No.	Deskripsi Kegiatan
1.	<b>Kegiatan Pendahuluan</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• Salam dari guru dan Doa dipimpin oleh salah satu siswa.</li><li>• <i>Apersepsi</i><ul style="list-style-type: none"><li>– Ingatkan siswa konsep fungsi (daerah asal, daerah kawan, dan daerah hasil) dan komposisinya.</li><li>– Perkenalkan sekilas materi limit fungsi serta aplikasinya dalam kehidupan sehari-hari.</li><li>– Motivasi siswa untuk semangat mempelajari materi limit fungsi.</li><li>– Informasikan tujuan pembelajaran dan tata cara penilaian.</li></ul></li></ul>
2.	<b>Kegiatan Inti</b> <i>Ayo mengamati</i> <b>Gambar 6.1</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• Arahkan siswa melihat dan memberikan kesempatan mengamati gambar tersebut. Tanya siswa, apakah jika melihat benda yang bergerak semakin jauh maka ukuran objek seakan-akan semakin kecil? Minta siswa untuk memberikan komentar!</li><li>• Informasikan bahwa bukan ukuran benda yang semakin kecil tetapi mata yang mempunyai batas melihat benda-benda yang jauh.</li></ul>



- Bantu siswa memahami hubungan Gambar 6.1 dengan Gambar 6.2. Gambar 6.2 adalah sketsa sederhana visual bentuk badan jalan sesuai dengan Gambar 6.1 dengan posisi memandang di tengah jalan, sehingga tampak lebar jalan seakan-akan menyempit dari kiri dan kanan badan jalan. Tujuannya adalah memberikan ilustrasi pendekatan kiri dan kanan.

### 6.1.1 Menemukan Konsep Limit Fungsi

#### *Ayo Menalar*

##### *Masalah 6.1*

- Minta siswa untuk memahami Masalah 6.1 dalam menemukan konsep limit. Beri kasus yang sama dengan pendekatan ke bilangan yang lain.
- Ajak siswa mencari bilangan bulat yang dekat ke 3. Ajak kembali siswa mencari bilangan real yang dekat ke 3. Pandu siswa memahami dan mencari jawaban dengan Gambar 6.3.
- Berdasarkan Gambar 6.3, misalkan bilangan real yang dekat ke 3 adalah 2,75 atau 3,25. jika interval 2,75 sampai 3,25 diperbesar sehingga diperoleh bahwa ada bilangan real lain yang lebih dekat ke 3, tetapi jika diperbesar kembali interval 2,99 sampai 3,01 maka akan lebih mudah melihat kembali bilangan yang dekat ke 3 dan seterusnya.
- Bantu siswa memahami bahwa banyak bilangan real yang sangat dekat ke 3.
- Bantu siswa memahami pemisalan  $x$  sebagai bilangan-bilangan yang mendekati 3 sehingga tertulis  $x \rightarrow 3$ . Perkenalkan simbol " $x \rightarrow 3$ ". Perkenalkan pendekatan kiri dengan simbol " $x \rightarrow 3^-$ ", serta pendekatan kanan dengan simbol " $x \rightarrow 3^+$ ".
- Berikan contoh kasus yang sama sebagai pembanding agar siswa lebih mudah memahami.

#### *Ayo menalar*

##### *Masalah 6.2*

- Minta siswa untuk memahami Masalah 6.2 dan memahami Gambar 6.4.



- Informasikan maksud gambar bahwa andaikan gerak lintasan bola dan gerak lintasan atlet dimisalkan kurva. Bola dan tangan atlet sama-sama bergerak saling mendekati pada saat dan ketinggian tertentu. Berikan ide-ide secara bebas dan terbuka. Pandu siswa untuk membangun sebuah konsep limit fungsi dan pendefinisian tentang limit fungsi.
- Jelaskan pergerakan bola menuju atlet dan pergerakan atlet menuju bola akan bertemu disuatu saat, misalkan di saat tertentu itu adalah  $x = c$  dan ketinggian di saat tertentu itu adalah  $y = L$ . Arahkan kembali ke Gambar 6.4 (b).

### 6.1.2 Pemahaman Intuitif Limit Fungsi

#### *Ayo Menalar*

#### **Limit Fungsi untuk $f(x) = x + 1$ untuk $x \in R$ .**

- Ingatkan siswa konsep fungsi (daerah asal, daerah kawan, daerah hasil dan sketsanya di bidang koordinat kartesius).
- Pandu siswa memahami limit fungsi secara intuitif, dengan memperkenalkan limit kiri dan limit kanan dengan memperlihatkannya pada gambar. Sepakati bahwa sebelah kiri suatu titik pada garis bilangan horizontal adalah kiri, dan arah sebaliknya adalah kanan.
- Pandu siswa memahami limit secara intuitif pada  $f(x) = x + 1$  untuk  $x \in R$  berdasarkan Tabel 6.1 dan Gambar 6.5.
- Demonstrasikan proses pengisian setiap sel pada Tabel 6.1. Minta siswa mengamati gerakan bilangan dari kiri dan kanan bilangan 2.
- Tunjukkan dan jelaskan pergerakan bilangan dari kiri dan kanan bilangan 2 di sumbu  $x$  akan mempengaruhi gerakan bilangan dari atas dan bawah bilangan 3 di sumbu  $y$ .

#### *Ayo Menanya*

- Arahkan kelas ke sesi tanya-jawab. Guru memberi kesempatan kepada siswa untuk bertanya, dan siswa lainnya memberi komentar sebelum guru memberi tanggapan dan memberi jawaban atas pertanyaan siswa. Guru memperhatikan siswa yang belum berani memberi komentar dan mengarahkannya berkomunikasi.



### ***Ayo Menalar***

- Dengan proses yang sama, perintahkan siswa berdiskusi, menalar limit fungsi untuk  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$  untuk  $x \neq 1, x \in R$ .
- Dengan panduan yang sama untuk  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$  untuk  $x \in R, x \neq 1$ , minta siswa mengamati Gambar 6.6 dan Tabel 6.2. Arahkan siswa fokus mengamati nilai pendekatan ke 2 di sumbu  $x$  dan pendekatan ke 3 di sumbu  $y$  pada Tabel 6.2.
- Arahkan siswa melakukan pengamatan pergerakan bilangan dari kiri dan kanan angka 1 di sumbu  $x$  akan berpengaruh pada pergerakan bilangan dari atas dan bawah angka 2 di sumbu  $y$ .
- Minta siswa mencari nilai  $f(1)$ ? Minta siswa mengamati hubungan Tabel 6.2 dan Gambar 6.6.

### ***Ayo Mengomunikasikan***

- Sesuai dengan hasil diskusi kelompok, minta siswa menyaji pendapat atau memberi komentar mereka akan limit fungsi

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \text{ untuk } x \neq 1, x \in R$$

### ***Ayo menalar***

$$\text{Limit fungsi } f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{jika } x \leq 1 \\ x + 1 & \text{jika } x > 1 \end{cases} \text{ untuk } x \in R.$$

- Jelaskan bentuk fungsi  $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{jika } x \leq 1 \\ x + 1 & \text{jika } x > 1 \end{cases}$  untuk  $x \in R$
- Demonstrasikan proses pengisian setiap sel pada Tabel 6.3. Arahkan siswa mengamati pergerakan bilangan dari kiri dan kanan bilangan 1 pada sumbu  $x$  dan pergerakan hasil  $f(1)$  pada sumbu  $y$ .
- Tunjukkan dan jelaskan gerakan bilangan dari kiri dan kanan bilangan 1 di sumbu  $x$  akan berpengaruh pada gerakan bilangan dari atas dan bawah  $f(1)$  di sumbu  $y$ . Minta siswa mencari nilai  $f(1)$ ? Arahkan siswa memberi komentar tentang nilai  $f(1)$ .



- Perkuat pemahaman siswa tentang limit kiri dan limit kanan dengan menggunakan Gambar 6.7.
- Bantu siswa memahami bahwa fungsi tersebut tidak mempunyai limit di  $x = 1$ . Kenapa? Perkenalkan bentuk tentu dan tak tentu suatu limit pada titik tertentu. Guru memberikan contoh-contoh fungsi yang dimaksud.
- Berikan kesempatan kepada siswa untuk menjelaskan dengan kata-kata sendiri tentang limit kiri dan limit kanan berdasarkan pemahaman pada contoh-contoh di atas.
- Guru dan siswa bersama-sama membangun Definisi 6.1

#### Definisi 6.1

Misalkan  $f$  sebuah fungsi  $f: R \rightarrow R$  dan misalkan  $L$  dan  $c$  anggota himpunan bilangan real.  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$  jika dan hanya jika  $f(x)$  mendekati  $L$  untuk semua  $x$  mendekati  $c$ .

#### Latihan 6.1

- Koordinir siswa untuk berdiskusi mengerjakan Latihan 6.1 dan menjelaskan di depan kelas serta mengumpulkan hasil diskusi.

#### Ayo Menalar

- Arahkan siswa untuk membentuk kelompok diskusi (3–4 orang). Perintahkan siswa menghubungkan definisi limit dengan Gambar 6.8 dan Gambar 6.9.
- Setelah salah satu kelompok menyajikan hasil kerja kelompoknya, arahkan siswa ke sesi tanya-jawab. Dengan demikian, siswa mempunyai kesempatan untuk memberikan komentar dan saling menanggapi. Guru harus memberikan kesimpulan akhir.
- Berikut adalah alternatif penyelesaian Latihan 6.1.

Berdasarkan Gambar 6.8 maka:

Limit di $x = -3$	Limit di $x = 1$	Limit di $x = 4$
$f(-3) = 5$	$f(1) = 3$	$f(4) = \text{tidak tentu}$
$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = 5$	$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$	$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 2$
$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = 5$	$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 5,5$	$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 2$



$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$
Ada limit	Tidak ada limit	Ada limit

Berdasarkan Gambar 6.9 maka:

Gambar A	Gambar B	Gambar C	Gambar D
$f(c) = \text{ada}$	$f(c) = \infty$	$f(c) = \text{tidak tentu}$	$f(c) = \text{ada}$
$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \text{ada}$	$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \text{ada}$	$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \text{ada}$
$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \text{ada}$	$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \text{ada}$	$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \text{ada}$
$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$
Ada limit	Tidak ada limit	Ada limit	Tidak ada limit

### Ayo Menalar

- Minta siswa membaca Contoh 6.1 dan membantu siswa memahami Contoh 6.1 melalui sketsa pada Gambar 6.10. Ingatkan siswa bentuk umum fungsi kuadrat, fungsi linier dan fungsi konstan.
- Tunjukkan pada siswa model fungsi lintasan lebah dan sketsa lintasannya pada Gambar 6.11.
- Bantu siswa memahami Tabel 6.4 dan Tabel 6.5 dengan keterkaitannya pada Gambar 6.11.
- Demonstrasikan proses perhitungan limit kiri dan limit kanan pada Tabel 6.4 dan Tabel 6.5 serta menunjukkan keterkaitannya dengan Gambar 6.11.

### Ayo Mengkomunikasikan

- Minta siswa memberi komentar akan pendekatan  $f(t)$  pada saat  $t$  mendekati 1 dari kiri–kanan, dan pada saat  $t$  mendekati 2 dari kiri–kanan sesuai dengan pemahaman mereka akan limit kiri dan limit kanan pada Contoh 6.1 tersebut.

### 3. Kegiatan Penutup

- Minta siswa mengomunikasikan kembali konsep-konsep materi yang telah diketahui setelah pembelajaran.
- Siswa dan guru bersama-sama melakukan refleksi dan merangkumkan semua konsep dan sifat transformasi dari yang dipelajari.



- Berikan penilaian terhadap proses dan hasil karya siswa dengan menggunakan rubrik penilaian. Hasil kerja kelompok dikumpulkan oleh guru.
- Beri tugas kepada siswa sebagai latihan di rumah.
- Informasikan materi yang akan dipelajari pada pertemuan berikutnya.

## 6.2 Sifat-Sifat Limit Fungsi

Sebelum Pelaksanaan Kegiatan

3.6.1 Bentuk kelompok kecil siswa (3–4 orang) yang heterogen. Perhatikan karakteristik siswa dalam satu kelompok sehingga mendukung pembelajaran yang efisien dan efektif.

3.6.2 Informasikan tujuan pembelajaran dan tata cara penilaian selama proses pembelajaran.

3.6.3 Siapkan semua fasilitas yang mendukung selama proses pembelajaran

No.	Deskripsi Kegiatan
1.	<b>Kegiatan Pendahuluan</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• Salam dari guru dan doa dipimpin oleh salah satu siswa.</li><li>• <i>Apersepsi</i><ul style="list-style-type: none"><li>– Ingatkan siswa akan limit kiri dan limit kanan serta definisi limit fungsi yang telah dipelajari sebelumnya.</li><li>– Informasikan kepada siswa, materi yang akan dipelajari adalah sifat-sifat limit fungsi.</li></ul></li></ul>
2.	<b>Kegiatan Inti</b> <i>Ayo menalar</i> <ul style="list-style-type: none"><li>• Ingatkan siswa materi sebelumnya. Berdasarkan Gambar 6.1, Masalah 6.1, Masalah 6.2, pemahaman limit fungsi secara intuitif serta Definisi 6.1, Arahkan siswa untuk membangun Sifat 6.1.</li><li>• Perkenalkan kepada siswa simbol penulisan limit kiri <math>\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)</math> dan limit kanan <math>\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)</math></li></ul>



**Ayo Menalar**

- Demonstrasikan Contoh 6.2 dan mengamati Tabel 6.6. Dengan menggunakan konsep limit, arahkan siswa membangun Sifat 6.2.

**Sifat 6.1**

Misalkan  $f$  sebuah fungsi  $f: R \rightarrow R$  dan  $L, c$  bilangan real.  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$  jika dan hanya jika  $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ .

**Sifat 6.2**

Misalkan  $f(x) = k$  adalah fungsi yang mempunyai nilai limit pada  $x$  mendekati  $c$ , dengan  $k$  dan  $c$  adalah bilangan real, maka  $\lim_{x \rightarrow c} k = k$ .

- Guru menambahi pemahaman akan Sifat 6.2 dengan menggunakan gambar fungsi  $y = f(x) = k$ .
- Minta siswa mengkomunikasikan Sifat 6.2 dengan kata-kata sendiri.

**Ayo Menalar**

- Demonstrasikan Contoh 6.3 dan mengamati Tabel 6.7. Dengan menggunakan konsep limit, arahkan siswa membangun Sifat 6.3.
- Guru menambahi pemahaman akan Sifat 6.3 dengan menggunakan gambar fungsi  $y = f(x) = k$ .
- Minta siswa mengkomunikasikan Sifat 6.3 dengan kata-kata sendiri.

**Sifat 6.3**

Misalkan  $f(x) = x$ , adalah fungsi yang mempunyai nilai limit pada  $x$  mendekati  $c$ , dengan  $c$  adalah bilangan real, maka  $\lim_{x \rightarrow c} x = c$ .

**Ayo Menalar**

- Demonstrasikan Contoh 6.4 dan mengamati Tabel 6.8. Dengan menggunakan konsep limit, arahkan siswa membangun Sifat 6.4.
- Guru menambahi pemahaman akan Sifat 6.4 dengan menggunakan gambar fungsi  $y = f(x) = kx$  dengan mengambil sembarang nilai  $k$  bilangan real.



- Minta siswa mengkomunikasikan Sifat 6.4 dengan kata-kata sendiri.

#### Sifat 6.4

Misalkan  $f$  adalah fungsi yang mempunyai nilai limit pada  $x$  mendekati  $c$ , dengan  $k$  dan  $c$  adalah bilangan real, maka

$$\lim_{x \rightarrow c} [kf(x)] = k[\lim_{x \rightarrow c} f(x)]$$

#### Ayo Menalar

- Demonstrasikan Contoh 6.5 dan mengamati Tabel 6.9. Dengan menggunakan konsep limit, arahkan siswa membangun Sifat 6.5.
- Guru menambahi pemahaman akan Sifat 6.5 dengan menggunakan gambar fungsi  $y = f(x) = kx^2$  dengan mengambil sembarang nilai  $k$  bilangan real.
- Minta siswa mengkomunikasikan Sifat 6.5 dengan kata-kata sendiri.

#### Sifat 6.5

Misalkan  $f, g$  adalah fungsi yang mempunyai nilai limit pada  $x$  mendekati  $c$ ,  $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)g(x)] = [\lim_{x \rightarrow c} f(x)] [\lim_{x \rightarrow c} g(x)]$

#### Ayo Menalar

- Demonstrasikan Contoh 6.6 dan mengamati Tabel 6.10 dan Tabel 6.11. Dengan menggunakan konsep limit, arahkan siswa membangun Sifat 6.6.
- Guru menambahi pemahaman akan Sifat 6.6 dengan menggunakan gambar fungsi  $f(x) = x^2 - 4x$  dan  $f(x) = x^2 + 4x$ .
- Minta siswa mengkomunikasikan Sifat 6.6 dengan kata-kata sendiri.

#### Sifat 6.6

Misalkan  $f, g$  adalah fungsi yang mempunyai nilai limit pada  $x$  mendekati  $c$ ,  $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \pm g(x)] = [\lim_{x \rightarrow c} f(x)] \pm [\lim_{x \rightarrow c} g(x)]$



### **Ayo Menalar**

- Demonstrasikan Contoh 6.7 dan mengamati Tabel 6.12. Dengan menggunakan konsep limit, arahkan siswa membangun Sifat 6.7.
- Minta siswa mengkomunikasikan Sifat 6.7 dengan kata-kata sendiri.

### **Sifat 6.7**

Misalkan  $f, g$  adalah fungsi yang mempunyai nilai limit pada  $x$

mendekati  $c$ , dengan  $c$  adalah bilangan real, maka  $\lim_{x \rightarrow c} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] =$   
 $\frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} g(x) \neq 0$

### **Ayo Menalar**

- Demonstrasikan Contoh 6.8 dan mengamati Tabel 6.13. Dengan menggunakan konsep limit, arahkan siswa membangun Sifat 6.8.
- Guru menambahi pemahaman akan Sifat 6.8 dengan menggunakan gambar fungsi  $y = f(x) = 8x^3$ .
- Minta siswa mengkomunikasikan Sifat 6.8 dengan kata-kata sendiri.

### **Sifat 6.8**

Misalkan  $f$  adalah fungsi yang mempunyai nilai limit pada  $x$  mendekati  $c$ , dengan  $c$  adalah bilangan real dan  $n$  adalah bilangan

positif maka  $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^n = [\lim_{x \rightarrow c} f(x)]^n$

### **Ayo Menalar**

- Koordinir siswa untuk membentuk kelompok dan mengerjakan Latihan 6.2 dan mendemonstrasikan di depan kelas kerja serta mengumpulkan hasil kerja kelompok.
- Berikut adalah alternatif penyelesaian Latihan 6.2.



### Latihan 6.2

Tunjukkan dengan pendekatan nilai,  $\lim_{x \rightarrow 2} x = \lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt[3]{x})^3$

$x$	1,5	1,7	1,9	1,99	1,999	...	2	...	2,001	2,01	2,1	2,5	2,7
$\sqrt[3]{x}$	1,14	1,19	1,24	1,26	1,26	...	1,26	...	1,26	1,26	1,28	1,36	1,39
$(\sqrt[3]{x})^3$	1,5	1,7	1,9	1,99	1,999	...	2	...	2,001	2,01	2,1	2,5	2,7

### 3. Kegiatan Penutup

- Minta siswa mengkomunikasikan kembali konsep-konsep materi yang telah diketahui setelah pembelajaran.
- Siswa dan guru bersama-sama melakukan refleksi dan merangkumkan semua konsep dan sifat-sifat limit fungsi dari yang dipelajari.
- Berikan penilaian terhadap proses dan hasil karya siswa dengan menggunakan rubrik penilaian. Hasil kerja kelompok dikumpulkan oleh guru.
- Beri tugas kepada siswa sebagai latihan di rumah.
- Informasikan materi yang akan dipelajari pada pertemuan berikutnya.

## 6.3 Menentukan Nilai Limit Fungsi

Sebelum Pelaksanaan Kegiatan

1. Bentuk kelompok kecil siswa (3–4 orang) yang heterogen. Perhatikan karakteristik siswa dalam satu kelompok sehingga mendukung pembelajaran yang efisien dan efektif.
2. Informasikan tujuan pembelajaran dan tata cara penilaian selama proses pembelajaran.
3. Siapkan semua fasilitas yang mendukung selama proses pembelajaran

No.	Deskripsi Kegiatan
1.	<b>Kegiatan Pendahuluan</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Salam dari guru dan doa dipimpin oleh salah satu siswa.</li> <li>• <i>Apersepsi</i> <ul style="list-style-type: none"> <li>– Informasikan kepada siswa tentang tujuan pembelajaran.</li> <li>– Jelaskan kepada siswa bentuk tentu dan bentuk tak tentu suatu fungsi pada titik tertentu. Ingatkan kembali Latihan 6.1.</li> </ul> </li> </ul>



## 2. Kegiatan Inti

### *Ayo Menalar*

- Jelaskan fungsi yang berbentuk tentu dan tak tentu pada titik tertentu serta alasannya. Tunjukkan kepada siswa bentuk tentu dan tak tentu dengan gambar. Minta siswa mencari fungsi lainnya yang mempunyai bentuk tentu dan tak tentu pada titik tertentu dan memaparkan di depan kelas. Ingatkan kembali Latihan 6.1.
- Demonstrasikan kepada siswa proses penyelesaian Contoh 6.9 dan Contoh 6.10.
- Pandu siswa mendapatkan nilai-nilai pada setiap sel pada Tabel 6.14, Tabel 6.15 dan Tabel 6.16.
- Arahkan siswa mengamati pergerakan nilai  $x$  dan  $y$  mendekati 2 dari kiri dan kanan pada Tabel 6.14, mengamati pergerakan nilai  $x$  dan  $y$  mendekati 1 dari kiri dan kanan pada Tabel 6.15, dan mengamati pergerakan nilai  $x$  dan  $y$  mendekati  $-1$  dari kiri dan kanan Tabel 6.16.

### *Ayo Mencoba*

- Guru memberikan permasalahan yang serupa untuk dicoba atau dikerjakan siswa secara pribadi atau berkelompok
- Arahkan siswa berani menyampaikan hasil kerjanya.

### *Ayo Menalar*

- Instruksikan siswa mengerjakan Latihan 6.3 secara individu atau berkelompok dan menyajikannya hasil kerjanya di depan kelas.
- Berikut adalah alternatif penyelesaian Latihan 6.3

### **Latihan 6.3**

Tentukan nilai  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3x-1)^3 - (x+1)^3}{x^3 - 1}$  dengan menunjukkan pendekatan

nilai dan proses pergantian fungsi dengan faktorisasi.

### *Alternatif Penyelesaian*

- Minta siswa menunjukkan nilai limit dengan pengamatan pada tabel.

### **Cara I (Numerik)**

Misalkan  $y = \frac{(3x-1)^3 - (x+1)^3}{x^3 - 1}$  maka pendekatan fungsi pada saat  $x$

mendekati 1 ditunjukkan pada tabel berikut:



**Tabel 6.17** Nilai pendekatan  $f(x) = \frac{(3x-1)^3 - (x+1)^3}{x^3 - 1}$  pada saat  $x$  mendekati 1

$x$	0,5	0,9	0,95	0,99	0,999	...	1	...	1,001	1,01	1,05	1,1	1,5
$y$	3,71	7,18	7,60	7,92	7,99	...	0/0	...	8,01	8,08	8,39	8,78	11,47

Dengan melihat tabel di atas, jika nilai  $x$  mendekati 1 maka akan mendekati 8.

### *Ayo Mengkomunikasikan*

- Minta siswa mendapatkan nilai limit dengan proses aljabar. Minta siswa mempresentasikan hasil kerjanya di depan kelas. Arahkan siswa untuk bertanya-jawab.

### **Cara II (Faktorisasi)**

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3x-1)^3 - (x+1)^3}{x^3 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(27x^3 - 27x^2 + 9x - 1) - (x^3 + 3x^2 + 3x + 1)}{(x-1)(x^2 + x + 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{26x^3 - 30x^2 + 6x - 2}{(x-1)(x^2 + x + 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{26x^3 - 26x^2 - 4x^2 + 4x + 2x - 2}{(x-1)(x^2 + x + 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(26x^2 - 4x + 2)}{(x-1)x^2 + x + 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{26x^2 - 4x + 2}{x^2 + x + 1} \quad \text{karena } x \neq 1 \\
 &= \frac{26 - 4 + 2}{1^2 + 1 + 1} \\
 &= 8
 \end{aligned}$$

### *Ayo Menalar*

- Demonstrasikan proses penyelesaian pada Contoh 6.11. Bantu siswa memahami strategi pemisalan atau pergantian fungsi. Minta siswa memberi komentar akan perubahan  $x \rightarrow 1$  menjadi  $y \rightarrow 1$ . Ingatkan kembali konsep limit.



### ***Ayo Mencoba***

- Guru memberikan permasalahan yang serupa untuk dikerjakan siswa dan mendemonstrasikan prosesnya di papan tulis. Arahkan siswa ke sesi tanya-jawab.
- Bantu siswa memahami Contoh 6.12. Berikan kesempatan kepada siswa untuk mengamati Tabel 6.18 dan mengomunikasikan pemahaman mereka.
- Minta siswa untuk menunjukkan konsep limit pada Tabel 6.18 dengan mengamati nilai-nilai pada setiap sel. Ingatkan siswa konsep limit kiri dan limit kanan.
- Berikan waktu pada siswa menggunakan manipulasi aljabar pada proses limit tersebut. (lihat alternatif penyelesaian 2 dan alternatif penyelesaian 3).
- Berikut adalah alternatif penyelesaian 2 dan alternatif penyelesaian 3 sesuai dengan buku siswa.

### ***Alternatif Penyelesaian 2***

$$f(t) = 0,25t^2 + 0,5t$$

$$f(5) = 0,25(5)^2 + 0,5(5) = 8,75$$

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 5} \frac{f(t) - f(5)}{t - 5} &= \lim_{t \rightarrow 5} \frac{(0,25t^2 + 0,5t) - f(5)}{t - 5} \\ &= \lim_{t \rightarrow 5} \frac{0,25t^2 + 0,5t - 8,75}{t - 5} \\ &= \lim_{t \rightarrow 5} \frac{0,5(0,5t^2 + t - 17,5)}{t - 5} \\ &= \lim_{t \rightarrow 5} \frac{0,5(0,5t + 3,5)(t - 5)}{t - 5} && \text{karena } t \neq 5 \\ &= \lim_{t \rightarrow 5} 0,5(0,5t + 3,5) \\ &= 0,5(0,5 \times 5 + 3,5) \\ &= 3\end{aligned}$$

### ***Alternatif Penyelesaian 3***

Jika  $t$  diganti menjadi  $T + 5$ , maka  $T = t - 5$  dan jika  $t \rightarrow 5$  maka  $T \rightarrow 0$ , sehingga:



	$f(t) = 0,25t^2 + 0,5t$ $f(5) = 0,25(5)^2 + 0,5(5) = 8,75$ $f(T + 5) = 0,25(T + 5)^2 + 0,5(T + 5) = 0,25T^2 + 3T + 8,75$ $\lim_{t \rightarrow 5} \frac{f(t) - f(5)}{t - 5} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{f(T + 5) - f(5)}{T}$ $= \lim_{T \rightarrow 0} \frac{f(0,25T^2 + 3T + 8,75) - 8,75}{T}$ $= \lim_{T \rightarrow 0} \frac{0,25T^2 + 3T}{T}$ $= \lim_{T \rightarrow 0} 0,25T + 3$ $= 3$
3.	<b>Kegiatan Penutup</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• Minta siswa mengkomunikasikan kembali konsep-konsep materi yang telah diketahui setelah pembelajaran.</li><li>• Siswa dan guru bersama-sama melakukan refleksi dan merangkumkan semua konsep dan sifat transformasi dari yang dipelajari.</li><li>• Berikan penilaian terhadap proses dan hasil karya siswa dengan menggunakan rubrik penilaian. Hasil kerja kelompok dikumpulkan oleh guru.</li><li>• Beri tugas kepada siswa sebagai latihan di rumah.</li><li>• Informasikan materi yang akan dipelajari pada pertemuan berikutnya.</li></ul>

## F. Penilaian

### Prosedur Penilaian

No.	Aspek yang dinilai	Teknik Penilaian	Waktu Penilaian
1.	Berani bertanya	Pengamatan	Kegiatan inti
2.	Berpendapat	Pengamatan	Kegiatan inti
3.	Mau mendengar orang lain	Pengamatan	Kegiatan inti
4.	Bekerja sama	Pengamatan	Kegiatan inti
5.	Pemahaman konsep	Tes Tertulis	Kegiatan penutup



## 1. Instrumen Penilaian Sikap

(Sikap Kinerja dalam Menyelesaikan Tugas Kelompok)

No.	Nama Peserta Didik	Aspek				Jumlah	Nilai
		Kerjasama	Keaktifan	Menghargai pendapat teman	Tanggung jawab		
1.							
2.							
3.							
4.							
...							

### Keterangan Skor:

- 1 = (belum terlihat), apabila peserta didik belum memperlihatkan tanda-tanda awal perilaku sikap yang dinyatakan dalam indikator.
- 2 = (mulai terlihat), apabila peserta didik mulai memperlihatkan adanya tanda-tanda awal perilaku yang dinyatakan dalam indikator tetapi belum konsisten.
- 3 = (mulai berkembang), apabila peserta didik sudah memperlihatkan tanda perilaku yang dinyatakan dalam indikator dan mulai konsisten.
- 4 = (membudaya), apabila peserta didik terus-menerus memperlihatkan perilaku yang dinyatakan dalam indikator secara konsisten.

Skor Maksimal = 16

$$\text{Nilai} = \frac{\text{Skor Perolehan}}{\text{Skor Maksimal}} \times 100\%$$

## 2. Instrumen Penilaian Pengetahuan

Contoh rubrik penilaian hasil penyelesaian soal oleh siswa. Dengan mempertimbangkan langkah-langkah penyelesaian soal yang dilakukan oleh siswa terhadap soal-soal yang diajukan guru maka dapat disusun rubrik penilaiannya. Alternatif pedoman penskorannya sebagai berikut.

No.	Aspek Penilaian	Rubrik Penilaian	Skor
1.	Pemahaman terhadap konsep limit fungsi	Penyelesaian dihubungkan dengan konsep limit fungsi	5



No.	Aspek Penilaian	Rubrik Penilaian	Skor
		Sudah menghubungkan penyelesaian dengan konsep limit fungsi namun belum benar	3
		Penyelesaian sama sekali tidak dihubungkan dengan konsep limit fungsi.	1
		Tidak ada respon/jawaban	0
2.	Kebenaran jawaban akhir soal	Jawaban benar	5
		Jawaban hampir benar	3
		Jawaban salah	1
		Tidak ada respon/jawaban	0
3.	Proses perhitungan	Proses perhitungan benar	5
		Proses perhitungan sebagian besar benar	3
		Proses perhitungan sebagian kecil saja yang benar	2
		Proses perhitungan sama sekali salah	1
		Tidak ada respon/jawaban	0
Total		Skor maksimal =	15
		Skor minimal =	0

### 3. Instrumen Penilaian Pengetahuan

(Penilaian kinerja dalam menyelesaikan tugas Presentasi)

No.	Nama Peserta Didik	A s p e k					Jumlah Skor	Nilai
		Komu- nikasi	Siste- matika penyam- paian	Penguasa- an Materi	Kebera- nian	Antu- sias		
1.								
2.								
3.								
4.								
5.								
...								



### **Keterangan Skor:**

#### **Komunikasi:**

- 1 = Tidak dapat berkomunikasi
- 2 = Komunikasi agak lancar, tetapi sulit dimengerti
- 3 = Komunikasi lancar, tetapi kurang jelas dimengerti
- 4 = Komunikasi sangat lancar, benar, dan jelas

#### **Penguasaan Materi:**

- 1 = Tidak menunjukkan pengetahuan/materi
- 2 = Sedikit memiliki pengetahuan/materi
- 3 = Memiliki pengetahuan/materi tetapi kurang luas
- 4 = Memiliki pengetahuan/materi yang luas

#### **Antusias:**

- 1 = Tidak antusias
- 2 = Kurang antusias
- 3 = Antusias tetapi kurang kontrol
- 4 = Antusias dan terkontrol

#### **Sistematika Penyampaian:**

- 1 = Tidak sistematis
- 2 = Sistematis, uraian kurang, tidak jelas
- 3 = Sistematis, uraian cukup
- 4 = Sistematis, uraian luas, jelas

#### **Keberanian:**

- 1 = Tidak ada keberanian
- 2 = Kurang berani
- 3 = Berani
- 4 = Sangat berani

Skor Maksimal = 20

$$\text{Nilai} = \frac{\text{Skor Perolehan}}{\text{Skor Maksimal}} \times 100\%$$

## **G. Pengayaan**

Bentuk pembelajaran pengayaan adalah pemberian asesmen portofolio tambahan yang memuat asesmen masalah autentik, proyek, keterampilan proses, *check up* diri, dan asesmen kerja sama kelompok. Sebelum asesmen ini dikembangkan, terlebih dahulu dilakukan identifikasi kemampuan belajar berdasarkan jenis serta tingkat kelebihan belajar peserta didik. Misalnya, belajar lebih cepat, menyimpan informasi lebih mudah, keingintahuan lebih tinggi, berpikir mandiri, superior dan berpikir abstrak, dan memiliki banyak minat. Pembelajaran pengayaan dapat dilaksanakan melalui belajar kelompok, belajar mandiri, bimbingan khusus dari guru dan para ahli (mentor).



Materi pembahasan pada pembelajaran pengayaan bertumpu pada pengembangan kompetensi dasar wajib tertera pada kurikulum matematika 2013, termasuk pengembangan kompetensi dasar peminatan. Materi pembahasan dituangkan dalam asesmen masalah autentik, proyek, keterampilan proses, check up diri, dan asesmen kerja sama kelompok. Keterampilan yang dibangun melalui materi matematika yang dipelajari adalah kemampuan berpikir tingkat tinggi (berpikir kreatif dan kritis) serta kemampuan adaptif terhadap perubahan, penggunaan teknologi dan membangun kerja sama antar siswa dan orang lain yang lebih memahami masalah yang diajukan dalam asesmen.

## H. Remedial

Pembelajaran remedial membantu peserta didik yang mengalami kesulitan dalam belajar. Pembelajaran remedial adalah tindakan perbaikan pembelajaran bagi peserta didik yang belum mencapai kompetensi. Remedial bukan mengulang tes (ulangan harian) dengan materi yang sama, tetapi guru memberikan perbaikan pembelajaran pada KD yang belum dikuasai oleh peserta didik melalui upaya tertentu.

Bentuk pembelajaran remedial tergantung pada jumlah peserta didik yang mengalami kegagalan mencapai kompetensi dasar yang ditetapkan. Beberapa alternatif bentuk pelaksanaan pembelajaran remedial di sekolah.

- a. Jika jumlah peserta didik yang mengikuti remedial lebih dari 50%, maka tindakan yang dilakukan adalah pemberian pembelajaran ulang dengan model dan strategi pembelajaran yang lebih inovatif berbasis pada berbagai kesulitan belajar yang dialami peserta didik yang berdampak pada peningkatan kemampuan untuk mencapai kompetensi dasar tertentu.
- b. Jika jumlah peserta didik yang mengikuti remedial lebih dari 20% tetapi kurang dari 50%, maka tindakan yang dilakukan adalah pemberian tugas terstruktur baik secara berkelompok dan tugas mandiri. Tugas yang diberikan berbasis pada berbagai kesulitan belajar yang dialami peserta didik yang berdampak pada peningkatan kemampuan untuk mencapai kompetensi dasar tertentu.
- c. Jika jumlah peserta didik yang mengikuti remedial maksimal 20%, maka tindakan yang dilakukan adalah pemberian bimbingan secara khusus, misalnya bimbingan perorangan oleh guru dan tutor sebaya.



## I. Rangkuman

Setelah kita membahas materi limit ini, terdapat beberapa hal penting yang menjadi kesimpulan dari hasil penemuan berbagai konsep dan aturan tentang limit, disajikan sebagai berikut.

1. Penentuan limit suatu fungsi di suatu titik  $c$ , sangat bergantung pada kedudukan titik  $c$  dan domain fungsi tersebut. Dalam pembahasan limit fungsi pada buku ini, yang menjadi domain fungsi adalah himpunan bilangan real dimana fungsi tersebut terdefinisi.
2. Sebuah fungsi  $f$  dikatakan mempunyai limit di titik  $c$  jika dan hanya jika nilai fungsi untuk  $x$  dari kiri dan kanan menuju ke bilangan yang sama.
3. Suatu fungsi  $f$  mempunyai nilai limit di titik  $c$ , apabila nilai limit kiri sama dengan nilai limit kanan dari fungsi tersebut pada titik  $c$ .
4. Tidak semua fungsi mempunyai limit di titik  $c$ . Titik  $c$  tidak harus anggota domain fungsi, tetapi  $c$  anggota himpunan bilangan real.
5. Misalkan  $f$  sebuah fungsi yang terdefinisi pada himpunan bilangan real dan  $c$  dan  $L$  adalah bilangan real, fungsi  $f$  mendekati  $L$  pada saat  $x$  mendekati  $c$  dapat kita tuliskan dengan  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ .
6. Misalkan  $f(x)$ ,  $g(x)$  adalah fungsi yang mempunyai nilai limit pada  $x$  mendekati  $c$ , dengan  $k$  dan  $c$  adalah bilangan real serta  $n$  adalah bilangan bulat positif.
  - a.  $\lim_{x \rightarrow c} k = k$
  - b.  $\lim_{x \rightarrow c} x = c$
  - c.  $\lim_{x \rightarrow c} [kf(x)] = k \left[ \lim_{x \rightarrow c} f(x) \right]$
  - d.  $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \pm g(x)] = \left[ \lim_{x \rightarrow c} f(x) \right] \pm \left[ \lim_{x \rightarrow c} g(x) \right]$
  - e.  $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)g(x)] = \left[ \lim_{x \rightarrow c} f(x) \right] \left[ \lim_{x \rightarrow c} g(x) \right]$
  - f.  $\lim_{x \rightarrow c} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] \neq \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)}$  dengan  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) \neq 0$
  - g.  $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^n = \left[ \lim_{x \rightarrow c} f(x) \right]^n$
  - h.  $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}$



# BAB 7

## Turunan

### A. Kompetensi Inti

<b>Sikap</b>	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Menghargai dan menghayati ajaran agama yang dianutnya.</li><li>2. Menghayati dan mengamalkan perilaku jujur, disiplin, tanggung jawab, peduli (gotong royong, kerja sama, toleran, damai), santun, responsif dan pro-aktif dan menunjukkan sikap sebagai bagian dari solusi atas berbagai permasalahan dalam berinteraksi secara efektif dengan lingkungan sosial dan alam serta dalam menempatkan diri sebagai cerminan bangsa dalam pergaulan dunia.</li></ol>
<b>Pengetahuan</b>	<ol style="list-style-type: none"><li>3. Memahami, menerapkan, menganalisis pengetahuan faktual, konseptual, prosedural berdasarkan rasa ingin tahunya tentang ilmu pengetahuan, teknologi, seni, budaya, dan humaniora dengan wawasan kemanusiaan, kebangsaan, kenegaraan, dan peradaban terkait penyebab fenomena dan kejadian, serta menerapkan pengetahuan prosedural pada bidang kajian yang spesifik sesuai dengan bakat dan minatnya untuk memecahkan masalah.</li></ol>
<b>Keterampilan</b>	<ol style="list-style-type: none"><li>4. Mengolah, menalar, dan menyaji dalam ranah konkret dan ranah abstrak terkait dengan pengembangan dari yang dipelajarinya di sekolah secara mandiri, dan mampu menggunakan metode sesuai kaidah keilmuan.</li></ol>



## B. Kompetensi Dasar dan Indikator

Indikator pencapaian kompetensi pada pembelajaran dapat dikembangkan guru sendiri berdasarkan kondisi peserta didik masing-masing di tempat guru mengajar.

Berikut ini dipaparkan contoh Indikator Pencapaian Kompetensi Pembelajaran yang dapat dijabarkan dari KD 3.8, 3.9 dan KD 4.8, 4.9.

No.	Kompetensi Dasar	Indikator Pencapaian Kompetensi
1.	3.8 Menjelaskan sifat-sifat turunan fungsi aljabar dan menentukan turunan fungsi aljabar menggunakan definisi atau sifat-sifat turunan fungsi.	3.8.1 Menemukan sifat-sifat turunan. 3.8.2 Menentukan turunan suatu fungsi dengan menggunakan sifat-sifat turunan. 3.8.3 Mengomunikasikan hubungan garis sekan, garis singgung, dan garis normal. 3.8.4 Menemukan konsep garis sekan dan garis singgung dengan kaitannya dengan konsep limit fungsi. 3.8.5 Menemukan konsep turunan sebagai limit suatu fungsi. 3.8.6 Menemukan aturan-aturan turunan berdasarkan konsep limit fungsi



	<p>3.9 Menganalisis keberkaitan turunan pertama fungsi dengan nilai maksimum, nilai minimum, dan selang kemonotonan fungsi, serta kemiringan garis singgung kurva.</p>	<p>3.9.1 Menemukan persamaan garis singgung dan persamaan garis normal pada suatu titik.</p> <p>3.9.2 Menunjukkan keberkaitan turunan dalam menentukan titik stasioner serta kecekungan suatu fungsi.</p> <p>3.9.3 Menunjukkan keberkaitan turunan dalam menentukan kemonotonan dan titik belok suatu fungsi.</p> <p>3.9.4 Menyebutkan aplikasi turunan dalam kehidupan sehari-hari</p>
2.	<p>4.8 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan turunan fungsi aljabar.</p> <p>4.9 Menggunakan turunan pertama fungsi untuk menentukan titik maksimum, titik minimum, dan selang kemonotonan fungsi, serta kemiringan garis singgung kurva, persamaan garis singgung, dan garis normal kurva berkaitan dengan masalah kontekstual.</p>	<p>4.8.1 Menentukan turunan suatu fungsi dengan menggunakan konsep limit fungsi.</p> <p>4.8.2 Menyelesaikan masalah kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan konsep turunan</p> <p>4.8.3 Menentukan turunan suatu fungsi dengan menggunakan aturan-aturan turunan.</p> <p>4.9.1 Menentukan gradien suatu garis singgung dengan menggunakan konsep turunan dan menentukan persamaannya.</p> <p>4.9.2 Menentukan persamaan garis singgung dan garis normal suatu fungsi.</p> <p>4.9.3 Menentukan titik stasioner, kecekungan, kemonotonan serta titik belok suatu fungsi dengan menggunakan konsep turunan.</p> <p>4.9.4 Menganalisis sketsa suatu fungsi dengan menggunakan konsep turunan</p>



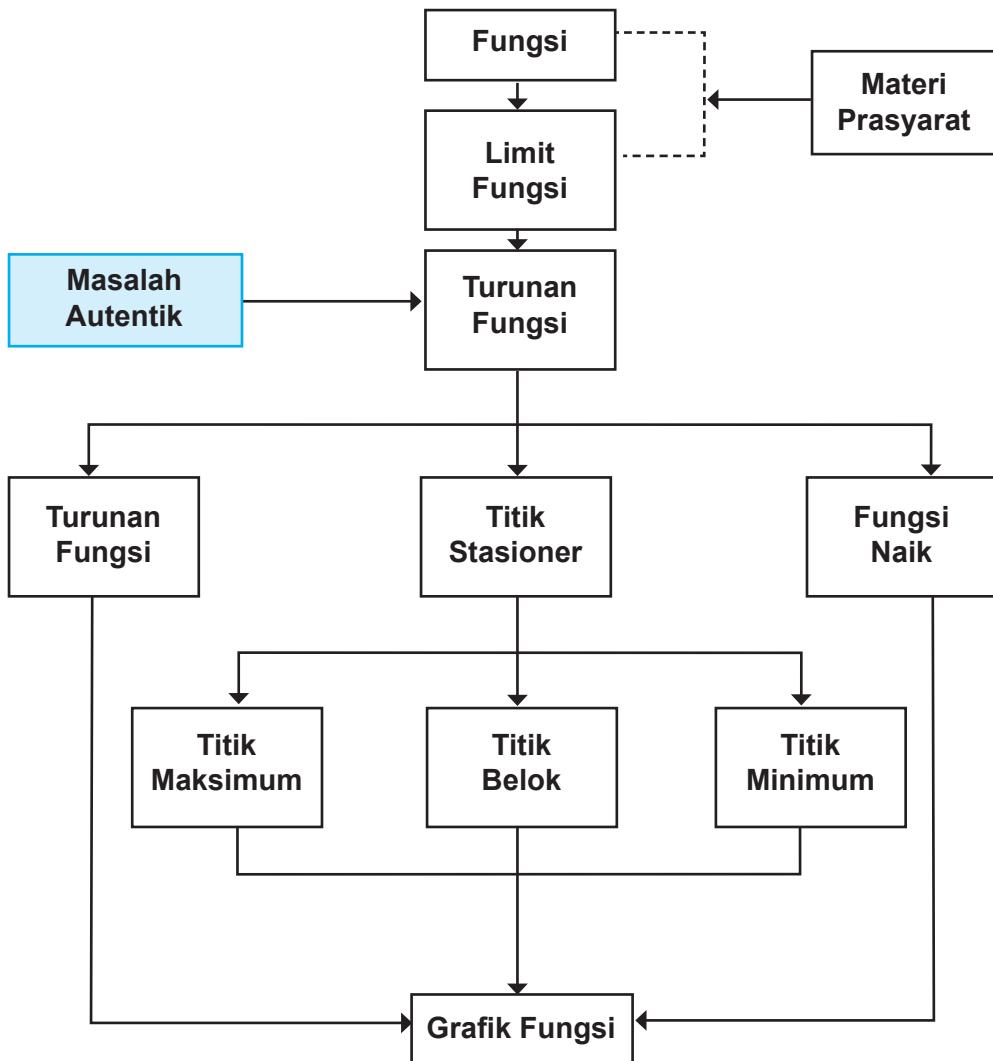
### C. Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari konsep turunan melalui pengamatan, menalar, tanya jawab, mencoba menyelesaikan persoalan, penugasan individu dan kelompok, diskusi kelompok, dan mengomunikasikan pendapatnya, siswa mampu:

1. Melatih siswa menumbuhkan sikap perilaku jujur, disiplin, tanggung jawab, peduli (gotong royong, kerja sama, toleran, damai), santun, responsif dan pro-aktif, berani bertanya, berpendapat, dan menghargai pendapat orang lain dalam aktivitas sehari-hari.
2. Menunjukkan rasa ingin tahu dalam memahami konsep dan menyelesaikan masalah.
3. Mengamati dan menyebutkan contoh penggunaan konsep turunan dalam kehidupan sehari-hari.
4. Menunjukkan garis sekan, garis singgung, garis normal, dan hubungannya pada gambar.
5. Menemukan konsep garis sekan dan garis singgung dengan kaitannya dengan konsep limit fungsi.
6. Menentukan persamaan garis singgung dan persamaan garis normal pada suatu titik.
7. Menemukan konsep turunan sebagai limit suatu fungsi.
8. Menggunakan konsep limit fungsi untuk menemukan turunan suatu fungsi.
9. Menemukan sifat-sifat turunan.
10. Menemukan aturan-aturan turunan berdasarkan konsep limit fungsi.
11. Menggunakan aturan-aturan turunan untuk menemukan turunan suatu fungsi.
12. Menemukan titik stasioner suatu fungsi dan kecekungannya dengan menggunakan konsep turunan.
13. Menemukan interval kemonotonan dan titik belok suatu fungsi dengan menggunakan konsep turunan.
14. Menyelesaikan masalah kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan konsep turunan.
15. Menganalisis dan menggambar sketsa suatu fungsi dengan menggunakan konsep turunan.



#### D. Diagram Alir





## E. Proses Pembelajaran

### 7.1 Menemukan Konsep Turunan Suatu Fungsi

Sebelum Pelaksanaan Kegiatan

1. Bentuklah kelompok kecil siswa (3–4 orang) yang heterogen. Perhatikan karakteristik siswa dalam satu kelompok sehingga mendukung pembelajaran yang efisien dan efektif.
2. Informasikan tujuan pembelajaran dan tata cara penilaian selama proses pembelajaran.
3. Siapkan semua fasilitas yang mendukung selama proses pembelajaran
4. Siapkan RPP dan form penilaian.

No.	Deskripsi Kegiatan
1.	<b>Kegiatan Pendahuluan</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• Salam dari guru dan doa dipimpin oleh salah satu siswa.</li><li>• Apersepsi<ul style="list-style-type: none"><li>❖ Ingatkan kembali siswa konsep fungsi dan konsep limit kiri dan limit kanan suatu fungsi</li><li>❖ Informasikan bahwa ada keterkaitan konsep limit fungsi dengan konsep turunan suatu fungsi</li><li>❖ Informasikan tujuan pembelajaran dan tata cara penilaian</li></ul></li></ul>
2.	<b>Kegiatan Inti</b> <b>7.1.1 Menemukan Konsep garis sekan dan Garis Tangen Pengantar</b> <ul style="list-style-type: none"><li>❖ Informasikan kepada siswa, bahwa turunan adalah materi yang sangat aplikatif dalam kehidupan sehari-hari. Berikan contoh nyata aplikasi turunan dalam kehidupan sehari-hari, seperti masalah kecepatan, percepatan, masalah nilai optimal, dan lain-lain.</li></ul>



## Ayo Menalar

### Masalah 7.1

- ❖ Minta siswa membaca dan memahami Masalah 7.1. Minta siswa memberikan komentar tentang arti menyinggung pada suatu grafik.
- ❖ Informasikan mengenai garis singgung dan garis sekan serta hubungannya.
- ❖ Minta siswa mengamati Gambar 7.2 dan meminta mengajukan berbagai pertanyaan terkait gambar serta menemukan pemaknaan istilah tali busur, garis normal, dan garis singgung pada kurva.
- ❖ Ingatkan kembali konsep gradien suatu garis yang melalui dua titik.
- ❖ Minta siswa mencoba menggambarkan tali busur (garis sekan)  $PQ$ , dengan posisi titik  $Q$  berada pada kurva yang semakin mendekati posisi titik  $P$ . Arahkan siswa menganalisis perubahan gerakan tali busur  $PQ$ . Untuk menemukan pengertian garis sekan arahkan siswa mengamati Gambar 7.3.

## Ayo Mengomunikasikan

- ❖ Arahkan siswa secara kelompok menuliskan ciri-ciri garis sekan dan menuliskan pengertian garis sekan, garis tangen, serta menemukan aturan penentuan gradien garis sekan dan garis tangen. Minta siswa mempresentasikan hasil kerja kelompok dan arahkan ke sesi tanya jawab antara kelompok penyaji, dan siswa pendengar. Guru memantau kebenaran konsep yang disajikan.



- ❖ Guru dan siswa bersama-sama membangun Definisi 7.1.

### Definisi 7.1:

Misalkan  $f : S \rightarrow R$  adalah fungsi kontinu dan titik  $P(x_1, y_1)$  dan  $Q(x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y)$  pada kurva  $f$ . Garis sekan menghubungkan

titik  $P$  dan  $Q$  dengan gradien  $m_{\text{sec}} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$

### Ayo Menalar

- ❖ Pandu siswa memahami Gambar 7.3. Tunjukkan, jika titik  $Q$  mendekati  $P$  maka  $\Delta x \rightarrow 0$  sehingga diperoleh garis singgung di titik  $P$  dengan gradien:

$$m_{\text{PGS}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \quad (\text{Jika limitnya ada}).$$

- ❖ Guru dan siswa bersama-sama membangun Definisi 7.2.

### Definisi 7.2:

Misalkan  $f$  adalah fungsi kontinu bernilai real dan titik  $P(x_1, y_1)$  pada kurva  $f$ . Gradien garis singgung di titik  $P(x_1, y_1)$  adalah limit gradien garis sekan di titik  $P(x_1, y_1)$ , ditulis:  $m_{\text{GS}} =$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} m_{\text{sec}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \quad (\text{Jika limitnya ada})$$

### Ayo Mengamati

- ❖ Guru mengajukan Contoh 7.1 untuk diamati. Guru mendemonstrasikan proses penyelesaian pada Contoh 7.1. Guru memberikan contoh lain untuk dikerjakan siswa secara pribadi atau berkelompok. Ingatkan siswa kembali konsep limit fungsi dan konsep persamaan garis lurus.



### Ayo Menalar

- ❖ Setelah siswa dipandu menyelesaikan Contoh 7.1, minta siswa menyelesaikan Latihan 7.1 dan mendemonstrasikan hasil kerjanya di depan kelas. Pandu dan bantu jika ada proses yang kurang tepat.
- ❖ Berikut adalah alternatif penyelesaian Latihan 7.1.

#### Latihan 7.1

Tentukan persamaan garis singgung di titik dengan absis  $x = -1$  pada kurva  $f(x) = x^4$ .

#### Alternatif Penyelesaian.

Misalkan  $x_1 = -1$  dan  $y_1 = (-1)^4 = 1$  sehingga titik singgung  $P(-1,1)$ .

Gradien garis singgung adalah:  $m_{pgs} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$

$$\Leftrightarrow m_{pgs} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-1 + \Delta x) - f(-1)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow m_{pgs} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(-1 + \Delta x)^4 - (-1)^4}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow m_{pgs} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[(-1 + \Delta x)^2 + (-1)^2][(-1 + \Delta x)^2 - (-1)^2]}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow m_{pgs} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[(-1 + \Delta x)^2 + (-1)^2][(-1 + \Delta x) + (-1)][(-1 + \Delta x) - (-1)]}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow m_{pgs} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[(-1 + \Delta x)^2 + 1](-2 + \Delta x)\Delta x}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow m_{pgs} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [(-1 + \Delta x)^2 + 1](-2 + \Delta x) = -4$$

Jadi, persamaan garis singgung adalah  $y - 1 = -4(x - (-1))$  atau  $y + 4x + 3 = 0$ .



## 7.1.2 Turunan Sebagai Limit Fungsi

### Ayo Menalar

- ❖ Jelaskan tujuan pembelajaran.
- ❖ Minta siswa memahami sub-bab 7.1.2. Informasikan bahwa turunan sebagai limit fungsi. Berdasarkan konsep gradien sebagai limit fungsi pada suatu titik, tunjukkan konsep turunan sebagai limit fungsi. Ingatkan kembali konsep limit fungsi. Arahkan siswa membangun Definisi 7.3 dan Definisi 7.4 serta memahaminya.

### Definisi 7.3

Misalkan fungsi  $f : S \rightarrow R$ ,  $S \subseteq R$  dengan  $(c - \Delta x, c + \Delta x) \subseteq S$ . Fungsi  $f$  dapat diturunkan di titik  $c$  jika dan hanya jika  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$  ada.

### Definisi 7.4

Misalkan  $f : S \rightarrow R$  dengan  $S \subseteq R$ . Fungsi  $f$  dapat diturunkan pada  $S$  jika dan hanya jika fungsi  $f$  dapat diturunkan di setiap titik  $c$  di  $S$ .

### Ayo Mencoba

- ❖ Arahkan siswa memahami langkah-langkah penyelesaian pada Contoh 7.2.
- ❖ Guru memberikan contoh lain untuk dikerjakan siswa.

### Ayo Menalar

- ❖ Bantu siswa memahami Definisi 7.5. Guru mengaitkan kembali ke materi limit fungsi (limit kiri dan kanan).



### Definisi 7.5

Misalkan fungsi  $f : S \rightarrow R$ ,  $S \subseteq R$  dengan  $(c - \Delta x, c + \Delta x) \subseteq S$

- Fungsi  $f$  memiliki turunan kanan pada titik  $c$  jika dan hanya jika

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \text{ ada.}$$

- Fungsi  $f$  memiliki turunan kiri pada titik  $c$  jika dan hanya jika

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \text{ ada.}$$

- ❖ Berdasarkan pemahaman konsep turunan sebagai limit fungsi maka bangun Sifat 7.1. Ingatkan kembali siswa konsep limit kiri dan limit kanan suatu fungsi.

### Sifat 7.1

Misalkan fungsi  $f : S \rightarrow R$ ,  $S \subseteq R$  dengan  $x \in S$  dan  $L \in R$ .

Fungsi  $f$  dapat diturunkan di titik  $x$  jika dan hanya jika turunan kiri sama dengan turunan kanan, ditulis:

$$f'(x) = L \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = L$$

### Ayo Menalar

- ❖ Untuk memperkuat pemahaman siswa akan Definisi dan sifat turunan, ajukan Contoh 7.3 untuk dibaca dan dipahami. Guru memandu menunjukkan definisi dan sifat turunan yang terkandung pada Gambar 7.4.
- ❖ Arahkan siswa menalar Definisi 7.5.



<b>3.</b>	<b>Kegiatan Penutup</b> <ul style="list-style-type: none"><li>❖ Minta siswa mengomunikasikan kembali konsep-konsep materi yang telah diketahui setelah pembelajaran.</li><li>❖ Siswa dan guru bersama-sama melakukan refleksi dan merangkum semua konsep turunan dari yang dipelajari.</li><li>❖ Berikan penilaian terhadap proses dan hasil karya siswa dengan menggunakan rubrik penilaian. Hasil kerja kelompok dikumpulkan oleh guru.</li><li>❖ Beri tugas kepada siswa sebagai latihan dirumah.</li><li>❖ Informasikan materi yang akan dipelajari pada pertemuan berikutnya.</li></ul>
-----------	--

## 7.2 Turunan Fungsi Aljabar

Sebelum Pelaksanaan Kegiatan

1. Bentuk kelompok kecil siswa (3-4 orang) yang heterogen. Perhatikan karakteristik siswa dalam satu kelompok sehingga mendukung pembelajaran yang efisien dan efektif.
2. Informasikan tujuan pembelajaran dan tata cara penilaian selama proses pembelajaran.
3. Siapkan semua fasilitas yang mendukung selama proses pembelajaran
4. Siapkan RPP dan form penilaian.

No.	Deskripsi Kegiatan
<b>1.</b>	<b>Kegiatan Pendahuluan</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• Salam dari guru dan doa dipimpin oleh salah satu siswa.</li><li>• Apersepsi<ul style="list-style-type: none"><li>❖ Ingatkan kembali konsep gradien dan turunan sebagai limit fungsi.</li><li>❖ Informasikan kepada siswa, berdasarkan turunan sebagai limit fungsi, akan dikaji aturan-aturan turunan melalui limit fungsi.</li><li>❖ Informasikan tujuan pembelajaran dan cara penilaian.</li></ul></li></ul>



## 2. Kegiatan Inti

### Ayo Menalar

#### Masalah 7.2

- ❖ Minta siswa membaca dan memahami Masalah 7.2.
- ❖ Jelaskan kepada siswa kesulitan-kesulitan yang mungkin terjadi pada saat menurunkan suatu fungsi dengan menggunakan limit fungsi. Arahkan siswa memahami Contoh 7.3 (*a* dan *b*) dan memahami kesulitan yang muncul padaproses penyelesaian pada Contoh 7.3 (*c* dan *d*). Untuk mempermudah menyelesaikan Contoh 7.3 (*c* dan *d*), diperlukan aturan-aturan turunan.
- ❖ Pandu siswa memahami aturan turunan (*a*) dan memberikan contohnya. Minta siswa menyelesaikan kembali Contoh 7.3 dengan menggunakan aturan turunan (*a*). Guru memberikan contoh lainnya untuk dikerjakan siswa.
- ❖ Minta siswa mengerjakan Latihan 7.2. Berikan kesempatan kepada siswa menjelaskan kinerjanya di depan kelas. Arahkan ke sesi tanya-jawab.
- ❖ Berikut penyelesaian Latihan 7.2.

#### Latihan 7.2

Coba kamu buktikan sendiri jika  $f(x) = au(x)$  dengan  $u'(x)$  ada, maka  $f'(x) = au'(x)$

#### Alternatif Penyelesaian

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{au(x + \Delta x) - au(x)}{\Delta x} \\ &= a \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \\ &= au'(x) \end{aligned}$$



- ❖ Minta siswa memahami aturan turunan (b). Guru memberikan contoh dan mendemonstrasikan proses penyelesaiannya.
- ❖ Minta siswa mengerjakan Latihan 7.3. Berikan kesempatan kepada siswa menjelaskan kinerjanya di depan kelas. Arahkan ke sesi tanya-jawab.
- ❖ Berikut penyelesaian Latihan 7.3.

### Latihan 7.3

Buktikan bahwa turunan fungsi  $f(x) = u(x) - v(x)$  adalah

$$f'(x) = u'(x) - v'(x)$$

#### Alternatif Penyelesaian

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(u(x + \Delta x) - v(x + \Delta x)) - (u(x) - v(x))}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(u(x + \Delta x) - u(x)) - (v(x + \Delta x) - v(x))}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} \\ &= u'(x) - v'(x) \end{aligned}$$

#### Ayo Menalar

- ❖ Dengan menggunakan aturan-aturan turunan yang telah diperoleh, arahkan siswa memahami Contoh 7.5. Guru dapat memberikan contoh lainnya untuk dikerjakan.
- ❖ Pandu siswa memahami aturan turunan (c) pada Contoh 7.5. Guru memberikan contoh dan mendemonstrasikan proses penyelesaiannya.



### Ayo Mencoba

- ❖ Guru mengajukan beberapa contoh dan mengajak siswa mencoba menyelesaikannya.

*Aturan Turunan 7.1:*

*Misalkan  $f$ ,  $u$ ,  $v$  adalah fungsi bernilai real dan dapat diturunkan di interval  $I$ ,  $a$  bilangan real dapat diturunkan maka:*

1.  $f(x) = a \rightarrow f'(x) = a$
2.  $f(x) = ax \rightarrow f'(x) = a$
3.  $f(x) = ax^n \rightarrow f'(x) = nax^{n-1}$
4.  $f(x) = au(x) \rightarrow f'(x) = au'(x)$
5.  $f(x) = u(x) \pm v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$
6.  $f(x) = u(x)v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
7.  $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$

### Ayo Menalar

- ❖ Perintahkan siswa memahami Contoh 7.5 dan alternatif penyelesaiannya.
- ❖ Minta siswa mengerjakan Latihan 7.4 dengan memanfaatkan pemahaman konsep pada sub-bab 7.1 dan aturan turunan.
- ❖ Berikut alternatif penyelesaian latihan 7.4



#### Latihan 7.4

Tentukan persamaan garis singgung kurva  $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x-1}}$  di titik  $P(2, 4)$ .

#### Alternatif Penyelesaian:

Titik  $P(2,4)$  berada pada kurva  $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x-1}}$  sebab jika kita

subtitusikan nilai  $x = 2$  maka  $f(2) = \frac{2^2}{\sqrt{2-1}} = 4$ .

Pertama, kita tentukan turunan pertama dari fungsi  $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x-1}}$  dengan memisalkan  $u(x) = x^2$  sehingga  $u'(x) = 2x$  dan

$v(x) = \sqrt{x-1} = (x-1)^{\frac{1}{2}}$  sehingga  $v'(x) = \frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}}$ . Dengan demikian,

turunan pertama fungsi adalah  $f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$  atau

$f'(x) = \frac{2x\sqrt{x-1} - \frac{x^2}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}}}{x-1}$ . Gradien garis singgung kurva di titik

$P(2,4)$  adalah  $f'(2) = \frac{4-2}{1} = 2$  sehingga persamaan garis singgung tersebut adalah  $y - 4 = 2(x - 2)$  atau  $y - 2x = 0$ .



<b>3.</b>	<b>Kegiatan Penutup</b> <ul style="list-style-type: none"><li>❖ Minta siswa mengomunikasikan kembali konsep-konsep materi yang telah diketahui setelah pembelajaran.</li><li>❖ Siswa dan guru bersama-sama melakukan refleksi dan merangkumkan semua konsep dari yang dipelajari.</li><li>❖ Berikan penilaian terhadap proses dan hasil karya siswa dengan menggunakan rubrik penilaian. Hasil kerja kelompok dikumpulkan oleh guru.</li><li>❖ Beri tugas kepada siswa sebagai latihan di rumah.</li><li>❖ Informasikan materi yang akan dipelajari pada pertemuan berikutnya.</li></ul>
-----------	--

### 7.3 Aplikasi Turunan

#### Sebelum Pelaksanaan Kegiatan

1. Bentuk kelompok kecil siswa (3-4 orang) yang heterogen. Perhatikan karakteristik siswa dalam satu kelompok sehingga mendukung pembelajaran yang efisien dan efektif.
2. Informasikan tujuan pembelajaran dan tata cara penilaian selama proses pembelajaran.
3. Siapkan semua fasilitas yang mendukung selama proses pembelajaran.
4. Siapkan RPP dan form penilaian.

No.	Deskripsi Kegiatan
<b>1.</b>	<b>Kegiatan Pendahuluan</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• Salam dari guru dan doa dipimpin oleh salah satu siswa.</li><li>• Apersepsi<ul style="list-style-type: none"><li>❖ Ingatkan siswa kembali konsep turunan dan aturan-aturannya.</li><li>❖ Informasikan tujuan pembelajaran kepada siswa. Informasikan aplikasi-aplikasi turunan.</li></ul></li></ul>



## 2. Kegiatan Inti

### 7.3.1 Konsep Kemonotonan Fungsi

#### Ayo Mengamati

- ❖ Minta siswa mengamati Gambar 7.5a dan Gambar 7.5b. Minta siswa memberikan pendapatnya. Arahkan siswa memahami fungsi naik dan turun dari gambar-gambar.
- ❖ Jelaskan Definisi 7.6 kepada siswa serta menunjukkan dengan grafik.

Definisi 7.6:

Misalkan fungsi  $f : S \rightarrow R$ ,  $S \subseteq R$

- Fungsi  $f$  dikatakan naik jika  $\forall x_1, x_2 \in S, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- Fungsi  $f$  dikatakan turun jika  $\forall x_1, x_2 \in S, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

#### Ayo Mengamati

- ❖ Guru mengajukan Contoh 7.7 dan mengajak siswa bersama-sama mencoba menyelesaikannya. Guru memberikan contoh lain untuk dicoba dikerjakan siswa.
- ❖ Minta siswa mengerjakan Latihan 7.5 dengan berkelompok. Siswa mempresentasikan kinerjanya di depan kelas. Guru memantau kebenaran konsep yang dipresentasikan siswa.
- ❖ Berikut alternatif penyelesaian Latihan 7.5.

#### Latihan 7.5

Bagaimana jika  $f(x) = x^3$ ,  $x \in R$  dan  $x < 0$ , apakah grafik fungsi  $f$  adalah fungsi naik? Selidiki!



### Alternatif Penyelesaian

$$f(x) = x^3, x \in R \text{ dan } x > 0$$

Ambil sebarang  $x_1, x_2 \in R$  dengan  $x_1 < x_2 < 0$

$$x = x_1 \Rightarrow f(x_1) = x_1^3$$

$$x = x_2 \Rightarrow f(x_2) = x_2^3$$

Karena  $x_1 < x_2 < 0$  maka  $x_1^3 < x_2^3$

Karena  $x_1^3 < x_2^3$  maka  $f(x_1) < f(x_2)$

Dengan demikian,  $\forall x \in S, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ . Dapat disimpulkan  $f$  adalah fungsi naik.

### Masalah 7.3

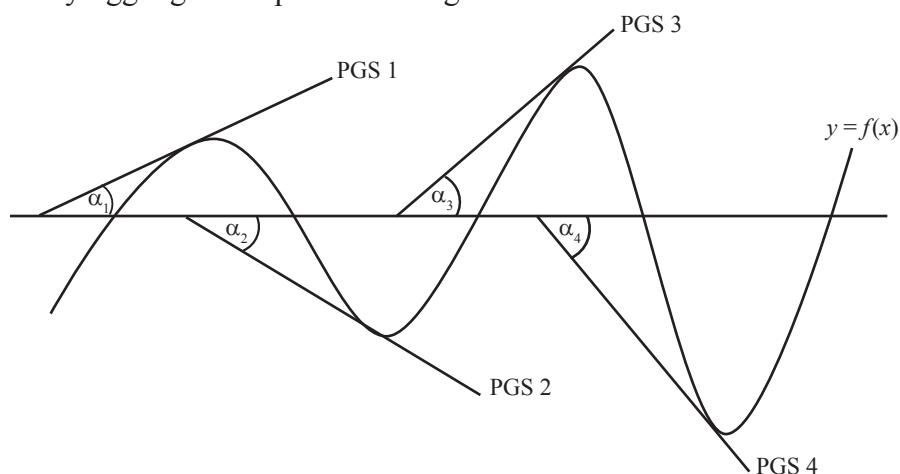
#### Ayo Menalar

- ❖ Arahkan siswa memahami Masalah 7.3. Minta siswa memahami masalah dengan Gambar 7.6 dan memahami fungsi naik dan fungsi turun pada Gambar 7.7.
- ❖ Minta siswa memahami interval pada sumbu  $t$  untuk gerak naik dan turun fungsi pada Gambar 7.7.
- ❖ Minta siswa mengerjakan Latihan 7.6 dengan berkelompok dan menyajikan hasil diskusi kelompoknya didepan kelas. Guru memantau kebenaran konsep.
- ❖ Berikut alternatif penyelesaian Latihan 7.6.



### Latihan 7.6

Coba kamu amati beberapa garis singgung yang menyinggung kurva di saat fungsi naik atau turun di bawah ini. Garis singgung 1 dan 3 menyinggung kurva pada saat fungsi naik dan garis singgung 2 dan 4 menyinggung kurva pada saat fungsi turun.



Gambar 7.8: Garis singgung di interval fungsi naik dan fungsi turun

Garis singgung menyinggung fungsi di interval naik atau turun. Pada konsep persamaan garis lurus, gradien garis adalah tangen sudut yang dibentuk oleh garis itu sendiri dengan sumbu  $x$  positif. Konsep gradien garis singgung adalah tangen sudut garis terhadap sumbu positif sama dengan nilai turunan pertama di titik singgungnya. Berdasarkan gambar di atas diperoleh data pada tabel berikut:



Tabel 7.1: Hubungan gradien garis singgung dengan fungsi naik/turun

PGS	Sudut	Nilai tangen	Menyinggung di
PGS 1	$\alpha_1$	$m = \tan(\alpha_3) = f'(x) > 0$	Fungsi Naik
PGS 2	$360^\circ - \alpha_2$	$m = \tan(360^\circ - \alpha_4) = f'(x) < 0$	Fungsi Turun
PGS 3	$\alpha_3$	$m = \tan(\alpha_3) = f'(x) > 0$	Fungsi Naik
PGS 4	$360^\circ - \alpha_4$	$m = \tan(360^\circ - \alpha_4) = f'(x) < 0$	Fungsi Turun

Berdasarkan Gambar 7.8 dan Tabel 7.1 dapat disimpulkan:

- Jika garis singgung menyinggung grafik di interval fungsi naik maka garis singgung akan membentuk sudut di kuadran I. Hal ini menyebabkan gradien adalah positif atau  $m = f'(x) > 0$ .
- Jika garis singgung menyinggung grafik di interval fungsi turun maka garis singgung akan membentuk sudut di kuadran IV. Hal ini menyebabkan gradien adalah negatif atau  $m = f'(x) < 0$ .

Dengan demikian, dapat kita simpulkan kembali:

Tabel 7.1a: Hubungan turunan pertama dengan fungsi naik/turun

No.	Nilai turunan pertama	Keterangan
1	$f'(x) = a$	Fungsi selalu naik
2	$f'(x) = a$	Fungsi selalu turun
3	$f'(x) = a$	Fungsi tidak pernah turun
4	$f'(x) = a$	Fungsi tidak pernah naik



- ❖ Arahkan siswa membaca Sifat 7.2. Guru menjelaskan kembali dengan melalui Gambar 7.8

### Sifat 7.2

Misalkan  $f$  adalah fungsi bernilai real dan dapat diturunkan pada setiap  $x \in I$  maka

1. Jika  $f'(x) > 0$  maka fungsi selalu naik pada interval  $I$ .
2. Jika  $f'(x) < 0$  maka fungsi selalu turun pada interval  $I$ .
3. Jika  $f'(x) \geq 0$  maka fungsi tidak pernah turun pada interval  $I$ .
4. Jika  $f'(x) \leq 0$  maka fungsi tidak pernah naik pada interval  $I$ .

### Ayo Mencoba

- ❖ Guru mengajukan Contoh 7.8, Contoh 7.9, dan Contoh 7.10 dan mengajak siswa bersama-sama mencoba menyelesaikan soal yang diajukan dengan menggunakan Sifat 7.2.
- ❖ Guru memberikan persoalan yang serupa untuk dikerjakan siswa.

## 7.3.2 Nilai Maksimum dan Minimum Fungsi

### Ayo Mengamati

- ❖ Informasikan kepada siswa, aplikasi turunan dalam menentukan nilai optimal dan titik belok suatu fungsi.
- ❖ Minta siswa membaca dan memahami Masalah 7.4.

### Ayo Mengamati

#### Masalah 7.4

- ❖ Guru boleh menggunakan media (tali) untuk memperlihatkan gelombang berjalan dan mengarahkan siswa memahaminya berdasarkan Gambar 7.11.



- ❖ Ingatkan siswa kembali konsep garis singgung di suatu titik pada grafik fungsi. Perintahkan siswa mengamati garis singgung (PGS) yaitu PGS 1, PGS 2, PGS 3, dan PGS 4 yang menyinggung kurva tepat dititik optimal (maksimum/minimum) fungsi tersebut.
- ❖ Pandu siswa memahami Gambar 7.12 dan hubungannya dengan Gambar 7.11 sehingga diperoleh Tabel 7.2.
- ❖ Pandu siswa membangun Sifat 7.3.

### Sifat 7.3

Misalkan  $f$  adalah fungsi bernilai real yang kontinu dan memiliki turunan pertama dan kedua pada sehingga:

1. Jika  $f'(x_1) = 0$  maka titik  $(x_1, f(x_1))$  disebut stasioner/kritis.
2. Jika  $f'(x_1) = 0$  dan  $f''(x_1) < 0$  maka titik  $(x_1, f(x_1))$  disebut titik minimum fungsi.
3. Jika  $f'(x_1) = 0$  dan  $f''(x_1) > 0$  maka titik  $(x_1, f(x_1))$  disebut titik maksimum fungsi.
4. Jika  $f''(x_1) < 0$  maka titik  $(x_1, f(x_1))$  disebut titik belok.

- ❖ Guru mengajukan Contoh 7.11 dan Contoh 7.12. Ingatkan siswa konsep fungsi kuadrat.

### 7.3.3 Nilai Maksimum dan Minimum Fungsi pada Suatu Interval

#### Masalah 7.5

#### Ayo Mengamati

- ❖ Perintahkan siswa membaca, mengamati, menalar Gambar 7.15 dan meminta siswa mengkomunikasikan pendapatnya.
- ❖ Minta siswa mencari contoh fungsi sesuai Gambar 7.15
- ❖ Ajukan Contoh 7.13 untuk dikerjakan siswa kembali.



### 7.3.4 Konsep Turunan dalam Permasalahan Kecepatan dan Percepatan

#### Ayo Menalar

- ❖ Minta siswa membaca dan memahami aplikasi turunan dalam masalah percepatan dan kecepatan.
- ❖ Pandu siswa mempelajari konsep berdasarkan Masalah 7.6.

#### Ayo Mengamati

##### Masalah 7.6

- ❖ Minta siswa membaca dan memahami aplikasi turunan dalam kecepatan dan percepatan berdasarkan Masalah 7.6.
- ❖ Pandu siswa memahami Gambar 7.17 dengan kaitannya dengan Tabel 7.3 dan Tabel 7.4.
- ❖ Guru mengajukan Contoh 7.14 dan Contoh 7.15 untuk dikerjakan kembali secara bersama-sama.
- ❖ Guru memberikan contoh lainnya untuk dikerjakan siswa secara pribadi atau berkelompok.

### 3. Kegiatan Penutup

- ❖ Minta siswa mengomunikasikan kembali konsep-konsep materi yang telah diketahui setelah pembelajaran.
- ❖ Siswa dan guru bersama-sama melakukan refleksi dan merangkum semua konsep dari yang dipelajari.
- ❖ Berikan penilaian terhadap proses dan hasil karya siswa dengan menggunakan rubrik penilaian. Hasil kerja kelompok dikumpulkan oleh guru.
- ❖ Beri tugas kepada siswa sebagai latihan di rumah.
- ❖ Informasikan materi yang akan dipelajari pada pertemuan berikutnya.



## 7.4 Menggambar Grafik Fungsi

Sebelum Pelaksanaan Kegiatan

1. Bentuk kelompok kecil siswa (3–4 orang) yang heterogen. Perhatikan karakteristik siswa dalam satu kelompok sehingga mendukung pembelajaran yang efisien dan efektif.
2. Informasikan tujuan pembelajaran dan tata cara penilaian selama proses pembelajaran.
3. Siapkan semua fasilitas yang mendukung selama proses pembelajaran
4. Siapkan RPP dan form penilaian.

No.	Deskripsi Kegiatan
1.	<b>Kegiatan Pendahuluan</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• Salam dari guru dan doa dipimpin oleh salah satu siswa.</li><li>• Apersepsi<ul style="list-style-type: none"><li>❖ Ingatkan siswa kembali konsep turunan, aturan turunan dan aplikasinya.</li><li>❖ Informasikan kepada siswa, aplikasi turunan dalam menentukan titik stasioner, kecekungan dan kemonotonan suatu fungsi berguna untuk mensketsa grafik fungsi tersebut.</li></ul></li></ul>
2.	<b>Kegiatan Inti</b> <b>Ayo Menalar</b> <ul style="list-style-type: none"><li>❖ Pandu siswa menggunakan konsep turunan untuk menganalisis kurva suatu fungsi dan mensketsanya.</li><li>❖ Minta siswa memahami Contoh 7.16. Pandu siswa memahami langkah-langkah penggunaan konsep turunan.</li></ul>



### *Ayo Mencoba*

- ❖ Pandu siswa mensketsa kurva fungsi tersebut. Tunjukkan kembali langkah  $a - d$  pada grafik (Gambar 7.18). Guru memberikan contoh lain untuk dikerjakan siswa secara berkelompok.
- ❖ Minta siswa mengerjakan Latihan 7.7.
- ❖ Berikut alternatif penyelesaian Latihan 7.7

### **Latihan 7.7**

Analisis dan sketsalah kurva fungsi  $f(x) = x^4 + 2x^3$ .

#### **Alternatif Penyelesaian:**

Langkah 1. Menentukan nilai pembuat nol fungsi.

$$f(x) = x^4 + 2x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3(x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 = 0 \text{ atau } x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ atau } x = -2$$

Jadi, kurva melalui sumbu  $x$  di titik  $A(0, 0)$  atau  $B(-2, 0)$

Langkah 2. Menentukan titik stasioner.

$$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2(2x + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 = 0 \text{ atau } 2x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ atau } x = -\frac{3}{2}$$

$$\text{Nilai } f(0) = 0 \text{ atau } f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{16}$$

Jadi, titik stasioner fungsi adalah  $A(0, 0)$  atau  $C\left(-\frac{3}{2}, -\frac{27}{16}\right)$ .



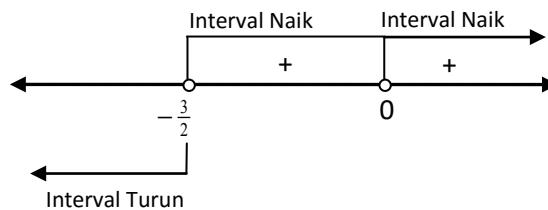
Langkah 3. Menentukan interval fungsi naik/turun

Interval pembuat fungsi naik adalah:

$$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 > 0 \Leftrightarrow 2x^2(2x + 3) > 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ atau } x = -\frac{3}{2}$$

**Ingat pelajaran pertidaksamaan**



Jadi, fungsi akan naik pada  $x > -\frac{3}{2}$ ,  $x \neq 0$  dan turun pada  $x < -\frac{3}{2}$ .

Langkah 4. Menentukan titik balik fungsi

Untuk menentukan titik balik maksimum atau minimum fungsi, kita akan menguji titik stasioner ke turunan kedua fungsi.

$$f''(x) = 12x^2 + 12x \text{ sehingga } f''(x) = 0$$

Titik  $A(0,0)$  bukanlah sebuah titik balik.

$$f''(x) = 12x^2 + 12x \text{ sehingga } f''(-\frac{3}{2}) = 9 > 0$$

Titik  $C(-\frac{3}{2}, -\frac{27}{16})$  adalah titik balik minimum.



Langkah 5. Menentukan titik belok

$$\begin{aligned}f''(x) = 12x^2 + 12x = 0 &\Leftrightarrow 12x(x+1) = 0 \\&\Leftrightarrow 12x = 0 \text{ atau } x+1 = 0 \\&\Leftrightarrow x = 0 \text{ atau } x = -1\end{aligned}$$

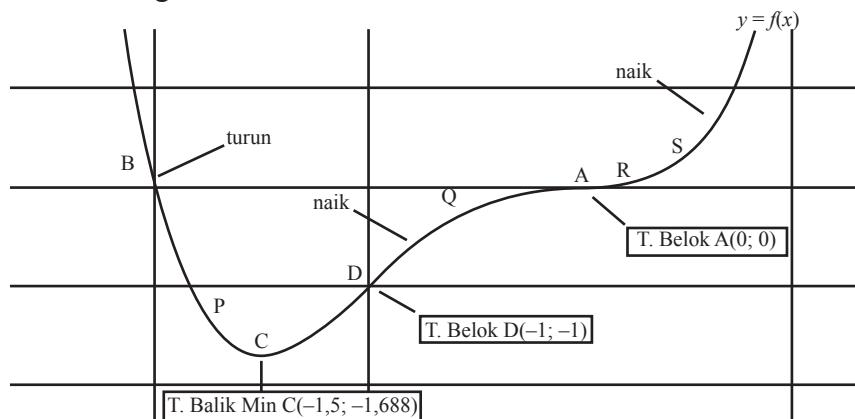
Nilai  $f(0) = 0$  atau  $f(-1) = -1$

Jadi, titik belok fungsi adalah  $A(0, 0)$  atau  $D(-1, -1)$ .

Langkah 6. Menentukan beberapa titik bantu

x	-7/4	-1/2	1/4	1/2
$y = x^4 + 2x^3$	-343/256	-3/16	9/256	5/16
(x,y)	P(-7/4, -343/256)	Q(-1/2, -3/16)	R(1/4, 9/256)	S(1/2, 5/16)

Perhatikan gambar.



Gambar 7.19 Sketsa kurva fungsi  $f(x) = x^4 + 2x^3$



- 3. Kegiatan Penutup**
- ❖ Minta siswa mengomunikasikan kembali konsep-konsep materi yang telah diketahui setelah pembelajaran.
  - ❖ Siswa dan guru bersama-sama melakukan refleksi dan merangkum semua konsep dan aturan turunan dari yang dipelajari.
  - ❖ Berikan penilaian terhadap proses dan hasil karya siswa dengan menggunakan rubrik penilaian. Hasil kerja kelompok dikumpulkan oleh guru.
  - ❖ Beri tugas kepada siswa sebagai latihan di rumah.
  - ❖ Informasikan materi yang akan dipelajari pada pertemuan berikutnya.

## F. Penilaian

### Prosedur Penilaian

No.	Aspek yang dinilai	Teknik Penilaian	Waktu Penilaian
1	Berani bertanya	Pengamatan	Kegiatan inti
2	Berpendapat	Pengamatan	Kegiatan inti
3	Mau mendengar orang lain	Pengamatan	Kegiatan inti
4	Bekerja sama	Pengamatan	Kegiatan inti
5	Konsep	Tes tertulis	Kegiatan penutup



## 1. Instrumen Penilaian Sikap

(Sikap Kinerja dalam Menyelesaikan Tugas Kelompok)

No.	Nama Peserta Didik	Aspek				Jumlah	Nilai
		Kerjasama	Keaktifan	Menghargai Pendapat Teman	Tanggung Jawab		
1							
2							
3							
4							
...							

### Keterangan Skor:

- 1 =(belum terlihat), apabila peserta didik belum memperlihatkan tanda-tanda awal perilaku sikap yang dinyatakan dalam indikator
- 2 =(mulai terlihat), apabila peserta didik mulai memperlihatkan adanya tanda-tanda awal perilaku yang dinyatakan dalam indikator tetapi belum konsisten
- 3 =(mulai berkembang), apabila peserta didik sudah memperlihatkan tanda perilaku yang dinyatakan dalam indikator dan mulai konsisten
- 4 =(membudaya), apabila peserta didik terus-menerus memperlihatkan perilaku yang dinyatakan dalam indikator secara konsisten

**Skor Maksimal = 16**

$$\text{Nilai} = \frac{\text{Skor Perolehan}}{\text{Skor Maksimal}} \times 100\%$$



## 2. Instrumen Penilaian Pengetahuan

Contoh rubrik penilaian hasil penyelesaian soal oleh siswa. Dengan mempertimbangkan langkah-langkah penyelesaian soal yang dilakukan oleh siswa terhadap soal-soal yang diajukan guru maka dapat disusun rubrik penilaiannya. Alternatif pedoman penskorannya sebagai berikut.

No.	Aspek Penilaian	Rubrik Penilaian	Skor
1.	Pemahaman terhadap konsep turunan	Penyelesaian dihubungkan dengan konsep turunan	5
		Sudah menghubungkan penyelesaian dengan konsep turunan namun belum benar	3
		Penyelesaian sama sekali tidak dihubungkan dengan konsep turunan.	1
		Tidak ada respons/jawaban	0
2.	Kebenaran jawaban akhir soal	Jawaban benar	5
		Jawaban hampir benar	3
		Jawaban salah	1
		Tidak ada respons/jawaban	0
3.	Proses perhitungan	Proses perhitungan benar	5
		Proses perhitungan sebagian besar benar	3
		Proses perhitungan sebagian kecil saja yang benar	2
		Proses perhitungan sama sekali salah	1
		Tidak ada respons/jawaban	0
Total		Skor maksimal =	15
		Skor minimal =	0



### 3. Instrumen Penilaian Pengetahuan

(Penilaian kinerja dalam menyelesaikan tugas Presentasi)

No.	Nama Peserta Didik	Aspek					Jumlah Skor	Nilai
		Komunikasi	Sistematika Penyampaian	Penguasaan Materi	Keberanian	Antusias		
1								
2								
3								
4								
5								
...								

#### Keterangan Skor:

##### Komunikasi:

- 1 = Tidak dapat berkomunikasi
- 2 = Komunikasi agak lancar, tetapi sulit dimengerti
- 3 = Komunikasi lancar tetapi kurang jelas dimengerti
- 4 = Komunikasi sangat lancar, benar, dan jelas

##### Sistematika Penyampaian:

- 1 = Tidak sistematis
- 2 = Sistematis, uraian kurang jelas
- 3 = Sistematis, uraian cukup
- 4 = Sistematis, uraian luas, jelas

##### Penguasaan Materi:

- 1 = Tidak menunjukkan pengetahuan/materi
- 2 = Sedikit memiliki pengetahuan/materi
- 3 = Memiliki pengetahuan/materi tetapi kurang luas
- 4 = Memiliki pengetahuan/materi yang luas

**Keberanian:**

- 1 = Tidak ada keberanian
- 2 = Kurang berani
- 3 = Berani
- 4 = Sangat berani

**Antusias:**

- 1 = Tidak antusias
- 2 = Kurang antusias
- 3 = Antusias tetapi kurang kontrol
- 4 = Antusias dan terkontrol

**G. Pengayaan**

Bentuk pembelajaran pengayaan adalah pemberian asesmen portofolio tambahan yang memuat asesmen masalah autentik, proyek, keterampilan proses, *check up* diri, dan asesmen kerja sama kelompok. Sebelum asesmen ini dikembangkan terlebih dahulu dilakukan identifikasi kemampuan belajar berdasarkan jenis serta tingkat kelebihan belajar peserta didik. Misalnya, belajar lebih cepat, menyimpan informasi lebih mudah, keingintahuan lebih tinggi, berpikir mandiri, superior, berpikir abstrak, dan memiliki banyak minat. Pembelajaran pengayaan dapat dilaksanakan melalui belajar kelompok, belajar mandiri, bimbingan khusus dari guru dan para ahli (mentor).

Materi pembahasan pada pembelajaran pengayaan bertumpu pada pengembangan kompetensi dasar wajib tertera pada Kurikulum Matematika 2013, termasuk pengembangan kompetensi dasar peminatan. Materi pembahasan dituangkan dalam asesmen masalah autentik, proyek, keterampilan proses, *check up* diri, dan asesmen kerja sama kelompok. Keterampilan yang dibangun melalui materi matematika yang dipelajari adalah kemampuan berpikir tingkat tinggi (berpikir kreatif dan kritis) serta kemampuan adaptif terhadap perubahan, penggunaan teknologi dan membangun kerja sama antar siswa dan orang lain yang lebih memahami masalah yang diajukan dalam asesmen.



## H. Remedial

Pembelajaran remedial membantu peserta didik yang mengalami kesulitan dalam belajar. Pembelajaran remedial adalah tindakan perbaikan pembelajaran bagi peserta didik yang belum mencapai kompetensi. Remedial bukan mengulang tes (ulangan harian) dengan materi yang sama, tetapi guru memberikan perbaikan pembelajaran pada KD yang belum dikuasai oleh peserta didik melalui upaya tertentu.

Bentuk pembelajaran remedial tergantung pada jumlah peserta didik yang mengalami kegagalan mencapai kompetensi dasar yang ditetapkan. Beberapa alternatif bentuk pelaksanaan pembelajaran remedial di sekolah.

- Jika jumlah peserta didik yang mengikuti remedial lebih dari 50%, maka tindakan yang dilakukan adalah pemberian pembelajaran ulang dengan model dan strategi pembelajaran yang lebih inovatif berbasis pada berbagai kesulitan belajar yang dialami peserta didik yang berdampak pada peningkatan kemampuan untuk mencapai kompetensi dasar tertentu.
- Jika jumlah peserta didik yang mengikuti remedial lebih dari 20% tetapi kurang dari 50%, maka tindakan yang dilakukan adalah pemberian tugas terstruktur baik secara berkelompok dan tugas mandiri. Tugas yang diberikan berbasis pada berbagai kesulitan belajar yang dialami peserta didik yang berdampak pada peningkatan kemampuan untuk mencapai kompetensi dasar tertentu.
- Jika jumlah peserta didik yang mengikuti remedial maksimal 20%, maka tindakan yang dilakukan adalah pemberian bimbingan secara khusus, misalnya bimbingan perorangan oleh guru dan tutor sebaya.

## I. Rangkuman

Kita telah menemukan konsep turunan fungsi dan sifat-sifatnya dari berbagai pemecahan dunia nyata. Berdasarkan sajian materi terkait berbagai konsep dan sifat turunan fungsi di atas, beberapa hal penting dapat kita rangkum sebagai berikut:

- Misalkan  $f: R \rightarrow R$  adalah fungsi kontinu dan titik  $P(x_1, y_1)$  dan  $Q(x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y)$  pada kurva  $f$ . Garis secan adalah yang menghubungkan titik  $P$  dan  $Q$  dengan gradien  $m_{sec} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$



2. Misalkan  $f$  adalah fungsi kontinu bernilai real dan titik  $P(x_1, y_1)$  pada kurva. Gradien garis tangen/singgung di titik  $P(x_1, y_1)$  adalah nilai limit garis sekan di titik  $P(x_1, y_1)$ , ditulis  $n_{\tan} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} m_{\sec} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$
3. Misalkan fungsi  $f : S \rightarrow R$ ,  $S \subseteq R$  dengan  $(c - \Delta x, c + \Delta x) \subseteq S$  dengan  $\Delta x > 0$ . Fungsi  $f$  dapat diturunkan pada titik  $c$  jika dan hanya jika nilai  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$  ada.
4. Misalkan  $f : S \rightarrow R$  dengan  $S \subseteq R$ . Fungsi  $f$  dapat diturunkan pada  $S$  jika dan hanya jika fungsi  $f$  dapat diturunkan pada setiap titik  $c$  di  $S$ .
5. Misalkan fungsi  $f : S \rightarrow R$ ,  $S \subseteq R$  dengan  $c \in S$  dan  $L \in R$ . Fungsi  $f$  dapat diturunkan di titik  $c$  jika dan hanya jika nilai turunan kiri sama dengan nilai turunan kanan, ditulis:  $f'(c) = L \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(c) - f(c - \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = L$ .
6. Aturan Turunan:

Misalkan  $f, u, v$  adalah fungsi bernilai real pada interval  $I$ ,  $a$  bilangan real dapat diturunkan maka:

1.  $f(x) = a \rightarrow f'(x) = 0$
2.  $f(x) = ax \rightarrow f'(x) = a$
3.  $f(x) = ax^n \rightarrow f'(x) = ax^{n-1}$
4.  $f(x) = au(x) \rightarrow f'(x) = au'(x)$
5.  $f(x) = a[u(x)]^n \rightarrow f'(x) = au'(x)[u(x)]^{n-1}$
6.  $f(x) = u(x) \pm v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$
7.  $f(x) = u(x)v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
8.  $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$



7. Misalkan  $f$  adalah fungsi bernilai real dan dapat diturunkan pada  $x \in I$  maka:

1. Jika  $f'(x) > 0$  maka kurva selalu naik pada interval  $I$
2. Jika  $f'(x) < 0$  maka kurva selalu turun pada interval  $I$
3. Jika  $f'(x) \geq 0$  maka kurva tidak pernah turun pada interval  $I$
4. Jika  $f'(x) \leq 0$  maka kurva tidak pernah naik pada interval  $I$

8. Misalkan  $f$  adalah fungsi bernilai real yang kontinu dan ada turunan pertama dan kedua pada  $x_1 \in I$  sehingga:

1. Jika  $f'(x_1) = 0$  maka titik  $P(x_1, f(x_1))$  disebut dengan stasioner/kritis.
2. Jika  $f'(x_1) = 0$  dan  $f''(x_1) > 0$  maka titik  $P(x_1, f(x_1))$  disebut titik balik minimum fungsi.
3. Jika  $f'(x_1) = 0$  dan  $f''(x_1) < 0$  maka titik  $P(x_1, f(x_1))$  disebut titik balik maksimum fungsi.
4. Jika  $f''(x_1) = 0$  maka titik  $P(x_1, f(x_1))$  disebut titik belok.

9. Kecepatan adalah laju perubahan dari fungsi  $s = f(t)$  terhadap perubahan waktu  $t$ , yaitu:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = f'(t)e^{i\theta} \text{ atau } v(t) = s'(t)$$

Percepatan adalah laju perubahan dari fungsi kecepatan  $v(t)$  terhadap perubahan waktu  $t$ , yaitu:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = v'(t) \text{ atau } a(t) = v'(t) = s''(t)$$

Selanjutnya, kita akan membahas tentang materi integral. Materi prasyarat yang harus kamu kuasai adalah himpunan, fungsi, limit fungsi, dan turunan. Hal ini sangat berguna dalam penentuan integral suatu fungsi sebagai antiturunan. Semua apa yang kamu sudah pelajari sangat berguna untuk melanjutkan bahasan berikutnya dan seluruh konsep dan aturan-aturan matematika dibangun dari situasi nyata dan diterapkan dalam pemecahan masalah kehidupan.



# BAB 8

## Integral

### A. Kompetensi Inti

<b>Sikap</b>	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Menghargai dan menghayati ajaran agama yang dianutnya.</li><li>2. Menghayati dan mengamalkan perilaku jujur, disiplin, tanggung jawab, peduli (gotong royong, kerja sama, toleran, damai), santun, responsif dan pro-aktif dan menunjukkan sikap sebagai bagian dari solusi atas berbagai permasalahan dalam berinteraksi secara efektif dengan lingkungan sosial dan alam serta dalam menempatkan diri sebagai cerminan bangsa dalam pergaulan dunia.</li></ol>
<b>Pengetahuan</b>	<ol style="list-style-type: none"><li>3. Memahami, menerapkan, menganalisis pengetahuan faktual, konseptual, prosedural berdasarkan rasa ingin tahunya tentang ilmu pengetahuan, teknologi, seni, budaya, dan humaniora dengan wawasan kemanusiaan, kebangsaan, kenegaraan, dan peradaban terkait penyebab fenomena dan kejadian, serta menerapkan pengetahuan prosedural pada bidang kajian yang spesifik sesuai dengan bakat dan minatnya untuk memecahkan masalah.</li></ol>
<b>Keterampilan</b>	<ol style="list-style-type: none"><li>4. Mengolah, menalar, dan menyaji dalam ranah konkret dan ranah abstrak terkait dengan pengembangan dari yang dipelajarinya di sekolah secara mandiri, dan mampu menggunakan metode sesuai kaidah keilmuan.</li></ol>



## B. Kompetensi Dasar dan Indikator

Indikator pencapaian kompetensi pada pembelajaran dapat dikembangkan guru sendiri berdasarkan kondisi peserta didik masing-masing di tempat guru mengajar. Berikut ini dipaparkan contoh Indikator Pencapaian Kompetensi Pembelajaran yang dapat dijabarkan dari KD 3.10 dan KD 4.10.

No.	Kompetensi Dasar	Indikator Pencapaian Kompetensi
1.	3.10 Mendeskripsikan integral tak tentu (antiturunan) fungsi aljabar dan menganalisis sifat-sifatnya berdasarkan sifat-sifat turunan fungsi.	3.10.1 Menemukan konsep integral tak tentu sebagai kebalikan dari turunan fungsi. 3.10.2 Memahami notasi integral. 3.10.3 Menemukan rumus dasar dan sifat dasar integral tak tentu.
2.	4.10 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan integral tak tentu (antiturunan) fungsi aljabar.	4.10.1 Menggunakan konsep Integral tak tentu sebagai kebalikan dari turunan fungsi dalam menyelesaikan masalah. 4.10.2 Menggunakan notasi integral. 4.10.3 Menggunakan rumus dasar dan sifat dasar integral tak tentu dalam menyelesaikan masalah.



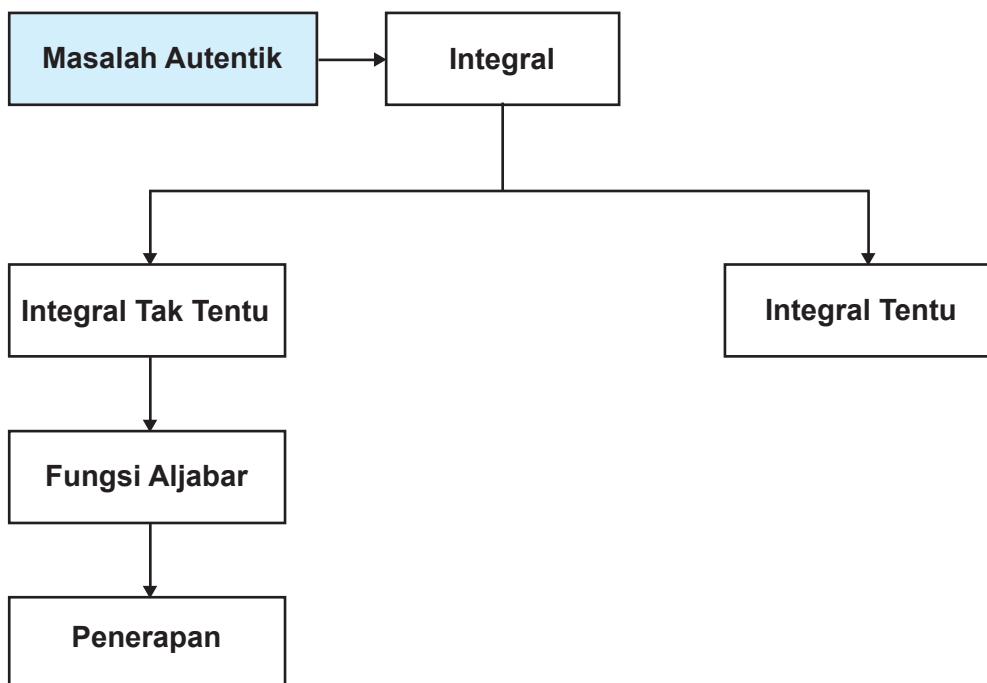
### C. Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari konsep integral melalui pengamatan, menalar, tanya jawab, mencoba menyelesaikan persoalan, penugasan individu dan kelompok, diskusi kelompok, dan mengomunikasikan pendapatnya, siswa mampu:

1. Melatih siswa menumbuhkan sikap perilaku jujur, disiplin, tanggung jawab, peduli (gotong royong, kerja sama, toleran, damai), santun, responsif dan pro-aktif, berani bertanya, berpendapat, dan menghargai pendapat orang lain dalam aktivitas sehari-hari.
2. Menunjukkan rasa ingin tahu dalam memahami konsep dan menyelesaikan masalah.
3. Menemukan konsep integral tak tentu sebagai kebalikan dari turunan fungsi.
4. Memahami notasi integral.
5. Menemukan rumus dasar dan sifat dasar integral tak tentu.
6. Menggunakan konsep integral tak tentu sebagai kebalikan dari Turunan Fungsi dalam menyelesaikan masalah.
7. Menggunakan notasi integral.
8. Menggunakan rumus dasar dan sifat dasar integral tak tentu dalam menyelesaikan masalah.



#### D. Diagram Alir





## E. Proses Pembelajaran

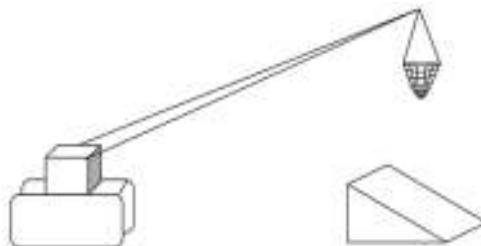
### 8.1 Menemukan Konsep Integral Tak Tentu sebagai Kebalikan dari Turunan Fungsi

No.	Deskripsi Kegiatan
1.	<b>Kegiatan Pendahuluan</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• Pembelajaran dimulai dengan doa dan salam</li><li>• <i>Apersepsi</i><ol style="list-style-type: none"><li>1. Guru memberikan beberapa pengantar tentang aplikasi turunan pada beberapa bidang, misalnya bidang fisika tentang kecepatan dan menceritakan keterlibatan integral dalam terapan ilmu lain seperti geometri, teknologi, biologi, ekonomi sangat membantu untuk pengembangan ilmu lain tersebut maupun perkembangan integral yang masuk dalam ilmu kalkulus.</li><li>2. Informasikan kepada siswa bahwa mereka akan mempelajari tentang menemukan konsep integral tak tentu sebagai kebalikan dari turunan fungsi.</li></ol></li></ul>
2.	<b>Kegiatan Inti</b> <p><b><i>Pengantar Pembelajaran</i></b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>• Minta siswa untuk memperhatikan Masalah 8.1.</li></ul> <p><b><i>Mengamati</i></b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>• Ajaklah siswa untuk mengamati dan memahami Masalah 8.1.</li><li>• Berilah kesempatan kepada siswa untuk mendiskusikan tentang informasi yang diperoleh dari kegiatan memindahkan barang di dermaga.</li></ul> <p><b><i>Menanya</i></b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>• Selanjutnya minta siswa untuk bertanya tentang apa-apa saja yang belum dipahaminya dalam Masalah 8.1 tersebut.</li></ul> <p><b><i>Menalar</i></b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>• Ajaklah siswa untuk mendiskusikan permasalahan yang terdapat pada kegiatan menalar. Perhatikan siswa yang sedang melakukan kegiatan menalar.</li></ul>



### Alternatif Penyelesaian

Misalkan masalah di atas kita sketsa dengan sederhana pada gambar berikut:

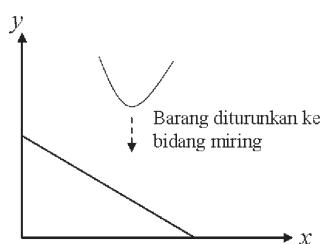


**Gambar 8.1.** Barang diturunkan ke bidang miring

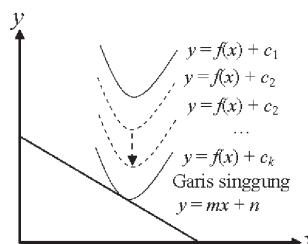
Sekarang, kita misalkan jaring (barang) yang diturunkan adalah sebuah fungsi, bidang miring sebuah garis, ketinggian adalah sumbu  $y$ , dan permukaan dermaga adalah sumbu  $x$  maka gambar tersebut dapat disketsa ulang dengan sederhana pada bidang koordinat kartesius.

Jika jaring tersebut sebuah kurva dan diturunkan pada Gambar 8.2 maka berdasarkan konsep Transfromasi (translasi), terjadi perubahan nilai konstanta pada fungsi tersebut sampai akhirnya kurva tersebut akan menyinggung bidang miring atau garis. Perhatikan gambar kembali.

Berdasarkan Gambar 8.3, kurva yang bergerak turun akan menyinggung garis tersebut. Ingat kembali konsep gradien sebuah garis singgung bahwa gradien garis singgung adalah turunan pertama fungsi yang disinggung garis tersebut. Berdasarkan konsep tersebut maka Gambar 8.3 memberikan informasi bahwa:  $m$  adalah turunan pertama  $y'$ .



**Gambar 8.2.** Jaring dan bidang miring sebagai kurva dan garis pada bidang koordinat kartesius



**Gambar 8.3.** Perubahan konstanta fungsi pada translasi kurva



Atau  $m = \frac{dy}{dx} = f'(x)$  sehingga  $y$  adalah anti turunan dari  $m$ . dengan demikian antiturunan dari  $m$  adalah  $y = f(x) + c_k$ . Hal ini berarti bahwa nilai konstanta  $c_k$  dapat berubah-ubah. Jadi, kita telah memahami bahwa integral adalah antiturunan dari sebuah fungsi. Antiturunan dari sebuah fungsi akan mempunyai konstanta yang belum dapat ditentukan nilainya. Untuk lebih memahaminya, kita ingat kembali proses turunan sebuah fungsi pada masalah berikut.

**Mengamati**

- Ajaklah siswa untuk mengamati dan memahami Masalah 8.2.
- Berilah kesempatan kepada siswa untuk mendiskusikan tentang informasi yang diperoleh dari kegiatan memindahkan barang di dermaga.

**Menanya**

- Selanjutnya minta siswa untuk bertanya tentang apa-apa saja yang belum dipahaminya dalam Masalah 8.2 tersebut.

**Menalar**

- Ajaklah siswa untuk mendiskusikan permasalahan yang terdapat pada kegiatan menalar. Perhatikan siswa yang sedang melakukan kegiatan Menalar

**Alternatif Penyelesaian:**

turunan fungsi

a)  $F(x) = \frac{1}{4}x^4$  adalah

$$F'(x) = f(x) = y' = \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{4}x^4 \right] = x^3$$

b)  $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + 4$  adalah

$$F'(x) = f(x) = y' = \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{4}x^4 + 4 \right] = x^3$$



c)  $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - 8$ , maka:

$$F'(x) = f(x) = y' = \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{4}x^4 - 8 \right] = x^3$$

d)  $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}$ , maka:

$$F'(x) = f(x) = y' = \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2} \right] = x^3$$

e)  $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{13}{207}$ , maka:

$$F'(x) = f(x) = y' = \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{4}x^4 - \frac{13}{207} \right] = x^3$$

Jika dilakukan pengamatan terhadap kelima fungsi, maka seluruh fungsi  $F(x)$  tersebut merupakan antiturunan dari fungsi  $f(x) = x^3$ , sementara fungsi  $F(x)$  memiliki konstanta yang berbeda-beda. Jadi, dapat ditunjukkan bahwa sebuah fungsi dapat memiliki banyak antiturunan. Jika  $F(x)$  adalah fungsi yang dapat diturunkan, yaitu  $f(x)$  maka antiturunan dari  $f(x)$  adalah  $F(x) + c$  dengan  $c$  adalah sembarang konstanta.

#### ***Menarik Kesimpulan***

- Berdasarkan penyelesaian masalah dan bantuan guru minta siswa untuk dapat membuat definisi tentang antiturunan.
- Berdasarkan pemahaman beberapa contoh minta siswa untuk membuat tentang sifat-sifat yang terkait dengan turunan dan antiturunan.

### **3. Kegiatan Penutup**

- Berikan penilaian terhadap proses dan hasil karya siswa dengan menggunakan rubrik penilaian.



## 8.2 Notasi Integral

No.	Deskripsi Kegiatan
1.	<b>Kegiatan Pendahuluan</b> <ul style="list-style-type: none"><li><i>Apersepsi</i><ol style="list-style-type: none"><li>Informasikan kepada siswa bahwa mereka hanya akan mengenal tentang lambang integral yang akan digunakan sebagai lambang antiturunan.</li></ol></li></ul>
2.	<b>Kegiatan Inti</b> <p>Minta siswa untuk memperhatikan Masalah 8.2 dan penyelesaiannya dan minta juga siswa untuk menggunakan lambang integral pada penyelesaiannya.</p> <p>a) <math>F(x) = \frac{1}{4}x^4</math>, maka: <math display="block">F'(x) = f(x) = y' = \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{4}x^4 \right] = x^3</math> sehingga diperoleh <math display="block">F(x) = \int f(x) dx = \int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + c</math></p> <p>b) <math>F(x) = \frac{1}{4}x^4 + 4</math>, maka: <math display="block">F'(x) = f(x) = y' = \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{4}x^4 + 4 \right] = x^3</math> sehingga diperoleh <math display="block">F(x) = \int f(x) dx = \int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + c</math></p> <p>c) <math>F(x) = \frac{1}{4}x^4 - 8</math>, maka: <math display="block">F'(x) = f(x) = y' = \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{4}x^4 - 8 \right] = x^3</math> sehingga diperoleh <math display="block">F(x) = \int f(x) dx = \int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + c</math></p>



	<p>d) <math>F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}</math>, maka:</p> $F'(x) = f(x) = y' = \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2} \right] = x^3 \text{ sehingga diperoleh}$ $F(x) = \int f(x) dx = \int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + c$ <p>e) <math>F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{13}{207}</math>, maka:</p> $F'(x) = f(x) = y' = \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{4}x^4 - \frac{13}{207} \right] = x^3 \text{ sehingga diperoleh}$ $F(x) = \int f(x) dx = \int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + c$
<b>3.</b>	<b>Kegiatan Penutup</b> <ul style="list-style-type: none"><li>Berikan penilaian terhadap proses dan hasil karya siswa dengan menggunakan rubrik penilaian.</li></ul>

### 8.3 Rumus Dasar dan Sifat Dasar Integral Tak Tentu

No.	Deskripsi Kegiatan
<b>1.</b>	<b>Kegiatan Pendahuluan</b> <ul style="list-style-type: none"><li><i>Apersepsi</i><ol style="list-style-type: none"><li>Guru meminta siswa untuk melihat penyelesaian masalah dan contoh-contoh yang sudah diselesaikan sebelumnya.</li><li>Informasikan kepada siswa bahwa mereka akan mempelajari tentang rumus dasar dan sifat dasar integral tak tentu</li></ol></li></ul>
<b>2.</b>	<b>Kegiatan Inti</b> <p><i>Mengamati</i></p> <ul style="list-style-type: none"><li>Minta siswa untuk mengamati beberapa penyelesaian masalah dan contoh-contoh.</li></ul> <p><i>Menanya</i></p> <ul style="list-style-type: none"><li>Selanjutnya minta siswa untuk bertanya tentang apa-apa saja yang belum dipahaminya dalam penyelesaian masalah dan contoh-contoh tersebut.</li></ul>



### **Menalar**

- Ajaklah siswa untuk mendiskusikan permasalahan yang terdapat pada kegiatan menalar. Perhatikan siswa yang sedang melakukan kegiatan Menalar, dan minta siswa untuk memahami tentang sifat 8.3

#### **Sifat 8.3**

Jika  $F(x)$  adalah fungsi dengan  $F'(x) = f(x)$  maka

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

dengan  $C$  sebarang konstanta

### **Mengamati**

- Ajaklah siswa untuk mengamati dan memahami Masalah 8.3
- Berilah kesempatan kepada siswa untuk mendiskusikan tentang informasi yang diperoleh tentang aturan proses integrasi.

### **Menanya**

- Selanjutnya minta siswa untuk bertanya tentang apa-apa saja yang belum dipahaminya dalam Masalah 8.3 tersebut.

### **Menalar**

- Ajaklah siswa untuk mendiskusikan permasalahan yang terdapat pada kegiatan menalar. Perhatikan siswa yang sedang melakukan kegiatan menalar.

### **Alternatif Penyelesaian:**

Untuk menjawab permasalahan ini, akan dilakukan beberapa pengamatan pada beberapa contoh turunan dan antiturunan suatu fungsi yang sederhana. Kamu diminta mengamati dan menemukan pola dari proses antiturunan fungsi tersebut. Perhatikan Tabel 8.1.



**Tabel 8.1 Pola Hubungan Turunan dan Antiturunan fungsi  $y = ax^n$**

Turunan Fungsi ( $f(x)$ )	Antiturunan Fungsi ( $F(x)$ )	Pola
1	$x$	$x = \frac{1}{1}x^1 = \frac{1}{0+1}x^{0+1}$
$2x$	$x^2$	$x^2 = \frac{2}{2}x^2 = \frac{2}{1+1}x^{1+1}$
$3x^2$	$x^3$	$x^3 = \frac{3}{3}x^3 = \frac{3}{2+1}x^{2+1}$
$8x^3$	$2x^4$	$2x^4 = \frac{8}{4}x^3 = \frac{8}{3+1}x^{3+1}$
...	...	...
$ax^{n-1}$	$ax^n$	$ax^n = \frac{a}{1}x^n = \frac{an}{(n-1)+1}x^{(n-1)+1}$
$ax^n$	?	$\frac{a}{n+1}x^{n+1}$

Dari pengamatan pada tabel tersebut, dapat dilihat sebuah aturan integral atau pola antiturunan dari turunannya yaitu  $\int ax^r dx = \frac{a}{n+1}x^{n+1}$ .

### Mencoba

Selanjutnya minta siswa untuk menemukan pola hubungan turunan dan antiturunan beberapa fungsi yang ada pada Tabel 8.2.

### Menalar

- Ajaklah siswa untuk mendiskusikan permasalahan yang terdapat pada kegiatan menalar. Perhatikan siswa yang sedang melakukan kegiatan Menalar, dan minta siswa untuk memahami tentang Sifat 8.4, 8.5, dan 8.6.



### Sifat 8.4

$n$  bilangan rasional dan  $n \neq -1$ , maka

$$(i) \int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$

$$(ii) \int ax^n dx = \frac{a}{n+1} x^{n+1} + C$$

dengan  $a$  dan  $c$  konstanta real

### Sifat 8.5

Misalkan  $k$  bilangan real,  $f(x)$  dan  $g(x)$  merupakan fungsi yang dapat ditentukan integralnya, maka :

$$1. \int dx = x + C$$

$$2. \int k dx = kx + C$$

$$3. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$4. \int k f(x) dx = k \int f(x) dx$$

$$5. \int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$6. \int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$$

### Sifat 8.6

Misalkan  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  adalah fungsi yang dapat diintegrasikan. Integral tak tentu hasil penjumlahan dua fungsi atau lebih sama dengan integral tak tentu dari masing-masing fungsi, yaitu:

$$\int (f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)) dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx + \dots + \int f_n(x) dx$$

Selanjutnya, minta siswa memahami contoh-contoh yang diberikan untuk melatih kemampuan dalam menguasai sifat-sifat yang sudah dipahami.



	<p><b>Menarik Kesimpulan</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>Berdasarkan penyelesaian masalah dan bantuan guru minta siswa untuk dapat membuat kesimpulan dari hasil pembahasan materi integral yaitu:<ol style="list-style-type: none"><li>Integral merupakan antiturunan, sehingga integral saling invers dengan turunan.</li><li>Jika <math>F(x)</math> adalah sebuah fungsi dengan <math>F'(x) = f(x)</math> dapat dikatakan bahwa:<ol style="list-style-type: none"><li>turunan dari <math>F(x)</math> adalah <math>f(x)</math> dan,</li><li>antiturunan dari <math>f(x)</math> adalah <math>F(x)</math>.</li></ol></li><li>Jika <math>F(x)</math> adalah sebarang antiturunan dari <math>f(x)</math> dan <math>C</math> adalah sebarang konstanta, maka <math>F(x) + C</math> juga antiturunan dari <math>f(x)</math>.</li><li>Jika <math>F'(x) = f(x)</math> maka <math>\int f(x) dx = F(x) + C</math></li></ol></li></ul>
<b>3.</b>	<p><b>Kegiatan Penutup</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>Berikan penilaian terhadap proses dan hasil karya siswa dengan menggunakan rubrik penilaian</li></ul>

## F. Penilaian

### Prosedur Penilaian

No.	Aspek yang dinilai	Teknik Penilaian	Waktu Penilaian
1.	Berani bertanya	Pengamatan	Kegiatan inti
2.	Berpendapat	Pengamatan	Kegiatan inti
3.	Mau mendengar orang lain	Pengamatan	Kegiatan inti
4.	Bekerjasama	Pengamatan	Kegiatan inti
5.	Konsep	Tes Tertulis	Kegiatan penutup



## 1. Instrumen Penilaian Sikap

(Sikap Kinerja dalam Menyelesaikan Tugas Kelompok)

No.	Nama Peserta Didik	Aspek				Jumlah	Nilai
		Kerja sama	Keaktifan	Menghargai pendapat teman	Tanggung jawab		
1.							
2.							
3.							
4.							
....							

### Keterangan Skor:

- 1 = (belum terlihat), apabila peserta didik belum memperlihatkan tanda-tanda awal perilaku sikap yang dinyatakan dalam indikator.
- 2 = (mulai terlihat), apabila peserta didik mulai memperlihatkan adanya tanda-tanda awal perilaku yang dinyatakan dalam indikator tetapi belum konsisten.
- 3 = (mulai berkembang), apabila peserta didik sudah memperlihatkan tanda perilaku yang dinyatakan dalam indikator dan mulai konsisten.
- 4 = (membudaya), apabila peserta didik terus-menerus memperlihatkan perilaku yang dinyatakan dalam indikator secara konsisten.

Skor Maksimal = 16

$$\text{Nilai} = \frac{\text{Skor Perolehan}}{\text{Skor Maksimal}} \times 100\%$$



## 2. Instrumen Penilaian Pengetahuan

Contoh rubrik penilaian hasil penyelesaian soal oleh siswa. Dengan mempertimbangkan langkah-langkah penyelesaian soal yang dilakukan oleh siswa terhadap soal-soal yang diajukan guru maka dapat disusun rubrik penilaiannya. Alternatif pedoman penskorannya sebagai berikut.

No.	Aspek Penilaian	Rubrik Penilaian	Skor
1.	Pemahaman terhadap konsep integral	Penyelesaian dihubungkan dengan konsep integral	5
		Sudah menghubungkan penyelesaian dengan konsep integral namun belum benar	3
		Penyelesaian sama sekali tidak dihubungkan dengan konsep integral	1
		Tidak ada respon/jawaban	0
2.	Kebenaran jawaban akhir soal	Jawaban benar	5
		Jawaban hampir benar	3
		Jawaban salah	1
		Tidak ada respon/jawaban	0
3.	Proses perhitungan	Proses perhitungan benar	5
		Proses perhitungan sebagian besar benar	3
		Proses perhitungan sebagian kecil saja yang benar	2
		Proses perhitungan sama sekali salah	1
		Tidak ada respon/jawaban	0
Total		Skor maksimal =	15
		Skor minimal =	0



### 3. Instrumen Penilaian Pengetahuan

(Penilaian kinerja dalam menyelesaikan tugas Presentasi)

No.	Nama Peserta Didik	Aspek					Jumlah Skor	Nilai
		Komunikasi	Sistematika penyampaian	Penguasaan Materi	Keberanian	Antusias		
1.								
2.								
3.								
4.								
5.								
...								

#### Keterangan Skor:

##### Komunikasi:

- 1 = Tidak dapat berkomunikasi
- 2 = Komunikasi agak lancar, tetapi sulit dimengerti
- 3 = Komunikasi lancar, tetapi kurang jelas dimengerti
- 4 = Komunikasi sangat lancar, benar dan jelas

##### Penguasaan Materi:

- 1 = Tidak menunjukkan pengetahuan/materi
- 2 = Sedikit memiliki pengetahuan/materi
- 3 = Memiliki pengetahuan/materi tetapi kurang luas
- 4 = Memiliki pengetahuan/materi yang luas

##### Sistematika Penyampaian:

- 1 = Tidak sistematis
- 2 = Sistematis, uraian kurang, tidak jelas
- 3 = Sistematis, uraian cukup
- 4 = Sistematis, uraian luas, jelas

##### Keberanian:

- 1 = Tidak ada keberanian
- 2 = Kurang berani
- 3 = Berani
- 4 = Sangat berani

**Antusias:**

- 1 = Tidak antusias
- 2 = Kurang antusias
- 3 = Antusias tetapi kurang kontrol
- 4 = Antusias dan terkontrol

Skor Maksimal = 20

$$\text{Nilai} = \frac{\text{Skor Perolehan}}{\text{Skor Maksimal}} \times 100\%$$

**G. Pengayaan**

Bentuk pembelajaran pengayaan adalah pemberian asesmen portofolio tambahan yang memuat asesmen masalah autentik, proyek, keterampilan proses, *check up* diri, dan asesmen kerja sama kelompok. Sebelum asesmen ini dikembangkan, terlebih dahulu dilakukan identifikasi kemampuan belajar berdasarkan jenis serta tingkat kelebihan belajar peserta didik. Misalnya, belajar lebih cepat, menyimpan informasi lebih mudah, keingintahuan lebih tinggi, berpikir mandiri, superior dan berpikir abstrak, dan memiliki banyak minat. Pembelajaran pengayaan dapat dilaksanakan melalui belajar kelompok, belajar mandiri, bimbingan khusus dari guru dan para ahli (mentor).

Materi pembahasan pada pembelajaran pengayaan bertumpu pada pengembangan kompetensi dasar wajib tertera pada kurikulum matematika 2013, termasuk pengembangan kompetensi dasar peminatan. Materi pembahasan dituangkan dalam asesmen masalah autentik, proyek, keterampilan proses, *check up* diri, dan asesmen kerja sama kelompok. Keterampilan yang dibangun melalui materi matematika yang dipelajari adalah kemampuan berpikir tingkat tinggi (berpikir kreatif dan kritis) serta kemampuan adaptif terhadap perubahan, penggunaan teknologi dan membangun kerja sama antar siswa dan orang lain yang lebih memahami masalah yang diajukan dalam asesmen.



## G. Remedial

Pembelajaran remedial membantu peserta didik yang mengalami kesulitan dalam belajar. Pembelajaran remedial adalah tindakan perbaikan pembelajaran bagi peserta didik yang belum mencapai kompetensi. Remedial bukan mengulang tes (ulangan harian) dengan materi yang sama, tetapi guru memberikan perbaikan pembelajaran pada KD yang belum dikuasai oleh peserta didik melalui upaya tertentu.

Bentuk pembelajaran remedial tergantung pada jumlah peserta didik yang mengalami kegagalan mencapai kompetensi dasar yang ditetapkan. Beberapa alternatif bentuk pelaksanaan pembelajaran remedial di sekolah.

- a. Jika jumlah peserta didik yang mengikuti remedial lebih dari 50%, maka tindakan yang dilakukan adalah pemberian pembelajaran ulang dengan model dan strategi pembelajaran yang lebih inovatif berbasis pada berbagai kesulitan belajar yang dialami peserta didik yang berdampak pada peningkatan kemampuan untuk mencapai kompetensi dasar tertentu.
- b. Jika jumlah peserta didik yang mengikuti remedial lebih dari 20% tetapi kurang dari 50%, maka tindakan yang dilakukan adalah pemberian tugas terstruktur baik secara berkelompok dan tugas mandiri. Tugas yang diberikan berbasis pada berbagai kesulitan belajar yang dialami peserta didik yang berdampak pada peningkatan kemampuan untuk mencapai kompetensi dasar tertentu.

Jika jumlah peserta didik yang mengikuti remedial maksimal 20%, maka tindakan yang dilakukan adalah pemberian bimbingan secara khusus, misalnya bimbingan perorangan oleh guru dan tutor sebaya.



## H. Rangkuman

Beberapa hal penting sebagai kesimpulan dari hasil pembahasan materi Integral, disajikan sebagai berikut:

1. Integral merupakan antiturunan, sehingga integral saling invers dengan turunan.
2. Jika  $F(x)$  adalah sebuah fungsi dengan  $F'(x) = f(x)$  dapat dikatakan bahwa:
  - a. Turunan dari  $F(x)$  adalah  $f(x)$  dan,
  - b. Antiturunan dari  $f(x)$  adalah  $F(x)$ ,
3. Jika  $F(x)$  adalah sebarang antiturunan dari  $f(x)$  dan  $C$  adalah sebarang konstanta, maka  $F(x) + C$  juga antiturunan dari  $f(x)$ .
4. Jika  $F'(x) = f(x)$  maka  $\int f(x) dx = F(x) + C$



## Daftar Pustaka

- Anton. Howard, Rorres. Chris. (2005). *Elementary Linear Algebra with Applications*. John Wiley & Sons, Inc.
- Ball, Deborah Loewenberg. (2003). *Mathematical Proficiency for All Students (Toward a Strategic Research and Development Program in Mathematics Education)*. United States of America: RAND.
- Checkley, Kathy (2006). *The Essentials of Mathematics, Grades 7-12*. United States of America: The Association for Supervision and Curriculum Development (ASCD).
- Chung, Kai Lai. (2001). *A Course in Probability Theory*, USA: Academic Press.
- Committee on science and mathematics teacher preparation, center for education national research council (2001). *Educating Teachers of Science, Mathematics, and Technology (New Practice for New Millennium)*. United States of America: the national academy of sciences.
- Douglas. M, Gauntlett. J, Gross. M. (2004). *Strings and Geometry*. United States of America: Clay Mathematics Institute.
- Hefferon, Jim (2006). *Linear Algebra*. United States of America: Saint Michael's College Colchester.
- Howard, dkk. (2008). *California Mathematics. Concepts, Skills, and Problem Solving 7*. Columbus-USA, The McGraw-Hill Companies, Inc.
- Johnstone. P.T. (2002). *Notes on Logic and Set Theory*. New York: University of Cambridge.
- Magurn A, Bruce. (2002). *Encyclopedia of Mathematics and Its Applications*. United Kingdom: United Kingdom at the University Press, Cambridge.
- Slavin, Robert, E. (1994). *Educational Psychology, Theories and Practice*. Fourth Edition. Masschusetts: Allyn and Bacon Publishers.



- Sinaga, Bornok. (2007). *Pengembangan Model Pembelajaran Matematika Berdasarkan Masalah Berbasis Budaya Batak*. Surabaya: Program Pascasarjana UNESA.
- Tan, Oon Seng. (1995). *Mathematics. A Problem Solving Approach*. Singapore: Federal Publication (S) Pte Lsd.
- Urban. P, Owen. J, Martin. D, Haese. R, Haese. S. Bruce. M. (2005). *Mathematics For The International Student (International Baccalaureate Mathematics HL Course)*. Australia: Haese & Harris Publication.
- Van de Walle, John A. (1990). *Elementary School Mathematics: Teaching Developmentally*. New York: Longman.
- Van de Walle. Jhon, dkk. (2010). *Elementary and Middle School Mathematics (Teaching Developmentally)*. United States of America: Allyn & Bacon.



## ■ Profil Penulis

---

Nama Lengkap : Prof. Dr. Bornok Sinaga, M.Pd  
Telp. Kantor/HP : (061) 661365  
E-mail : bornoksinaga48@gmail.com  
Akun Facebook : -  
Alamat Kantor : Sekolah Pasca Sarjana Universitas Negeri  
Medan. Jl. Willem Iskandar Psr V Medan  
Estate, Medan, Sumatera Utara  
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika



### ■ Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir

1. Dosen di Jurusan Pendidikan Matematika Universitas Pattimura, Ambon. (1991 - 1999)
2. Dosen di Jurusan Matematika Universitas Negeri Medan (2000 - sekarang)

### ■ Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar

1. S3 : Program Pasca Sarjana/Pendidikan Matematika/Universitas Negeri Surabaya (2004 – 2007)
2. S2 : Program Pasca Sarjana/Pendidikan Matematika/IKIP Negeri Surabaya (1996 – 1999)
3. S1 : Fakultas Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam/Pendidikan Matematika/IKIP Negeri Medan (1984 – 1989)

### ■ Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir)

1. Matematika Kelas VII SMP - Untuk Siswa (Buku Kemendikbud Kurikulum 2013) (2013)
2. Buku Matematika Untuk Guru Kelas VII SMP (Buku Kemendikbud Kurikulum 2013) (2013)



Nama Lengkap : Andri Kristianto S., S.Pd., M.Pd.  
Telp. Kantor/HP : (061) 6625970  
E-mail : andritanggung84@gmail.com  
Akun Facebook : -  
Alamat Kantor : Jl .Willem Iskandar Pasar V  
Medan Estate, Medan 20222  
Bidang Keahlian : Matematika



■ **Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 tahun Terakhir:**

1. Dosen Matematika di Fakultas Ilmu Pendidikan UNIMED (2012 - sekarang)
2. Dosen di STKIP Riama Medan (2010 - 2012)
3. Dosen Di Universitas Darma Agung Medan (2010 - 2012)
4. Guru Matematika di SMK 11 Medan (2007 - 2010)

■ **Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar**

1. S2 : Program Pascasarjana Universitas Negeri Medan/ Pendidikan Dasar Matematika/Universitas Negeri Medan/ (2007 – 2010)
2. S1 : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam/Matematika/Pendidikan Matematika/Universitas Negeri Medan (2002 – 2007)

■ **Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir)**

1. Buku Matematika Kelas VII SMP Penerbit Kemendikbud (2013)
2. Buku Matematika Kelas X SMA Penerbit Kemendikbud (2013)
3. Buku Matematika Kelas X SMA Penerbit Kemendikbud (2013)

■ **Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir)**

1. Efektivitas Pembelajaran Konstruktivisme Pada Pokok Bahasan Himpunan di Kelas VII SMP Swasta Trisakti 2 Medan. 2007
2. Upaya Meningkatkan Kemampuan Berpikir Logis dan Komunikasi Matematis Siswa SMP Melalui Pembelajaran Matematika Realistik. 2010
3. Pengembangan Model Pembelajaran Matematika dan Asesmen Otentik Berbasis Kurikulum 2013 untuk Meningkatkan Kualitas Sikap, Kemampuan Berpikir Kreatif dan Koneksi Matematika Siswa SMA. 2016.



Nama Lengkap : Tri Andri Hutapea, S.Si., M.Sc  
Telp. Kantor/HP : (061) 661356  
E-mail : triandh\_A19@yahoo.com  
Akun Facebook : -  
Alamat Kantor : Universitas Negeri Medan  
Jl. Willem Iskandar Pasar V Medan  
Estate,  
Medan Sumatera Utara  
Bidang Keahlian : Matematika



■ **Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 tahun Terakhir**

1. Dosen Jurusan Matematika, FMIPA Universitas Negeri Medan. (2006 - sekarang)
2. Penulis Buku Matematika (Buku Siswa dan Buku Guru) Berbasis Kurikulum 2013 Kelas X dan Kelas XI SMA/SMK. (2013 - 2016)

■ **Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar**

1. S2 : MIPA/Matematika/Matematika (Matematika Terapan)/Universitas Gadjah Mada (2008 – 2010)
2. S1 : MIPA/Matematika/Matematika Sains/Universitas Negeri Medan (2000 – 2005)

■ **Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir)**

1. Buku Matematika (Buku Siswa) Berbasis Kurikulum 2013 Kelas X SMA/ SMK (2013 – 2016).
2. Buku Matematika (Buku Guru) Berbasis Kurikulum 2013 Kelas X SMA/ SMK (2013 – 2016).
3. Buku Matematika (Buku Siswa) Berbasis Kurikulum 2013 Kelas XI SMA/ SMK (2013 – 2016).
4. Buku Matematika (Buku Guru) Berbasis Kurikulum 2013 Kelas XI SMA/ SMK (2013 – 2016).



---

Nama Lengkap : Lasker Pangarapan Sinaga, S.Si., M.Si  
Telp. Kantor/HP : (061) 661365  
E-mail : lazer\_integral@yahoo.com  
Akun Facebook : –  
Alamat Kantor : Jl. Willem Iskandar Pasar V Medan Estate,  
Medan Sumatera Utara.  
Bidang Keahlian : Matematika



■ **Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir**

1. Dosen di Fakultas Ilmu Pendidikan UNIMED

■ **Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar**

1. S2: SPs USU/Matematika/Optimisasi dan Teori Riset/Universitas Sumatera Utara (2007–2009)
2. S1: FMIPA/Matematika/Matematika Murni/Universitas Sumatera Utara (1998–2003)

■ **Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir)**

1. Analisis Persoalan Optimisasi Konveks Dua Tahap (2010)
2. Konvergensi dan Stabilitas Solusi Persamaan Laplace pada Batas Dirichlet (2011)
3. Konvergensi dan Kontinuitas Deret Kuasa Solusi Persamaan Laplace Dimensi N (2013)
4. Analisis Solusi Eksak dan Solusi Elemen Hingga Persamaan Laplace Orde Dua (2014)



Nama Lengkap : Sudianto Manullang S.Si., M.Sc  
Telp. Kantor/HP : (061) 6625970  
E-mail : Sudianto.manullang@unimed.ac.id  
Akun Facebook : -  
Alamat Kantor : Jalan Williem Iskandar Pasar V  
Medan Estate, Medan – Sumatera Utara.  
Bidang Keahlian : Matematika



■ **Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir**

1. Dosen di Jurusan Matematika Universitas Negeri Medan (2006-sekarang)
2. Staf Ahli Program Pascasarjana UNIMED (2005-2006)

■ **Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar**

1. S2 : Fakultas MIPA/Jurusan Matematika/Program Studi Matematika/Universitas Gadjah Mada (UGM) (2008-2011)
2. S1 : Fakultas MIPA/Jurusan Matematika/Program Studi Matematika/Universitas Negeri Medan (UNIMED) 2000-2005

■ **Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir)**

1. Buku Siswa: Pelajaran Matematika Kelas 7 SMP Kurikulum 2013 (2013)
2. Buku Guru: Pelajaran Matematika Kelas 7 SMP Kurikulum 2013 (2013)
3. Buku Siswa: Pelajaran Matematika Kelas 10 SMA Kurikulum 2013 (2013)
4. Buku Guru: Pelajaran Matematika Kelas 10 SMA Kurikulum 2013 (2013)
5. Buku Siswa: Matematika Kelas 7 SMP (2013)
6. Buku Guru: Matematika Kelas 7 SMP (2013)
7. Buku Siswa: Matematika Kelas 10 SMA (2013)
8. Buku Guru: Pelajaran Matematika Kelas 10 SMA (2013)
9. Buku Guru: Pelajaran Matematika Kelas 11 SMA Kurikulum 2013 (2014)
10. Buku Siswa: Pelajaran Matematika Kelas 11 SMA Kurikulum 2013 (2014)

■ **Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir)**

1. Peramalan Kebutuhan Listrik Kota Medan (2007)
2. Application of Vasicek's Rate Interest Model in Term Insurance Premiums Calculation. (2011)
3. Pendanaan Dana Pensiun dengan Metode Benefit Prorate (2012)



Nama Lengkap : Mangaratua Marianus S., S.Pd., M.Pd.  
Telp. Kantor/HP : (061) 661365  
E-mail : mangaratuasimanjorang@gmail.com  
Akun Facebook : -  
Alamat Kantor : Jl. Willem Iskandar Psr V Medan Estate,  
Medan, Sumatera Utara  
Bidang Keahlian : Matematika



■ **Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:**

1. Guru Matematika Seminari Menengah Pematang Siantar. (2001 - 2005)
2. Guru Matematika di SMA Universitas HKBP Nommensen, Pematang Siantar. (2002 - 2005)
3. Guru di SMA Budi Mulia Pematang Siantar (2004 - 2005)
4. Dosen di Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan HKBP Nommensen, Pematang Siantar (2008 - 2009)
5. Dosen di Jurusan Matematika, FaKultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas negeri Medan (2008 - sekarang)

■ **Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:**

1. S3: School Of Education, Murdoch University, Perth, Australia (2011)
2. S2: Program Pasca Sarjana/Pendidikan Matematika/ Universitas Negeri Surabaya (2005 – 2007)
3. S1: Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan/Pendidikan Matematika/Universitas HKBP Nommensen (1998 – 2003)

■ **Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):**

1. Buku Ajar Matematika SD Kelas 1 (Pembelajaran Matematika Realistik) (2009)
2. Matematika Kompeten Berhitung untuk Sekolah Dasar Kelas V (2010)
3. Matematika Kompeten Berhitung untuk Sekolah Dasar Kelas VI (2010)
4. Buku Panduan Guru Kelas X SMA/MA terkait kurikulum 2013 Jilid 1 (2013)
5. Buku Teks Siswa Kelas X SMA/MA terkait kurikulum 2013 Jilid 1 (2013)
6. Buku panduan guru kelas VII SMP/MTs terkait kurikulum 2013 Jilid 1 (2013)
7. Buku Teks siswa kelas VII SMP/MTs terkait kurikulum 2013 Jilid 1 (2013)

■ **Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):**

1. Pengembangan Model Pembelajaran Matematika Berdasarkan Masalah Berbasis Budaya Batak (PBM-B3) (2007)
2. Pembelajaran Matematika Realistik Untuk Topik Dimensi Tiga di Kelas X SMA Kampus FKIP Universitas HKBP Nommensen Pematangsiantar (2007)



Nama Lengkap : Pardomuan N. J. M. Sinambela, S.Pd., M.Pd.  
Telp. Kantor/HP : (061)661365  
E-mail : pardomuannjmsinambela@gmail.com  
Akun Facebook : -  
Alamat Kantor : Jl.Willem Iskandar Pasar V Medan Estate,  
Medan Sumatera Utara.  
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika



#### ■ Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir

1. Dosen di Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Karo, Kabanjahe. (2006 - 2008)
2. Dosen di Program Studi Pendidikan Matematika Universitas HKBP Nommensen. (2007)
3. Dosen di Jurusan Matematika Universitas Negeri Medan (2008 - sekarang)

#### ■ Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar

1. S2 : Program Pasca Sarjana/Pendidikan Matematika/ Universitas Negeri Surabaya (2003 - 2006)
2. S1 : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam/Pendidikan Matematika/Universitas Negeri Medan (1997 - 2002)

#### ■ Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir)

1. Matematika Kompeten Berhitung untuk Sekolah Dasar Kelas V (2010)
2. Matematika Kompeten Berhitung untuk Sekolah Dasar Kelas VI (2010)
3. Buku panduan guru kelas X SMA/MA terkait kurikulum 2013 Jilid 1 (2013)
4. Buku Teks siswa kelas X SMA/MA terkait kurikulum 2013 Jilid 1 (2013)
5. Buku panduan guru kelas VII SMP/MTs terkait kurikulum 2013 Jilid 1 (2013)
6. Buku Teks siswa kelas VII SMP/MTs terkait kurikulum 2013 Jilid 1 (2013)

#### ■ Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir)

1. Keefektifan Model Pembelajaran Berdasarkan Masalah (Problem Based Instruction) Dalam Pembelajaran Matematika Untuk Pokok Bahasan Sistem Persamaan Linear dan Kuadrat di Kelas X SMA Negeri 2 Rantau Selatan, Sumatera Utara (2006)
2. Penerapan Model Pembelajaran Bermuatan Soft Skill dan Pemecahan Masalah dengan bantuan Asesmen Autentik dalam meningkatkan kemampuan komunikasi matematis dan kreatifitas berfikir mahasiswa dalam pemecahan masalah serta meningkatkan kualitas proses pembelajaran mata kuliah Matematika Diskrit 1 (2009)
3. Pemetaan dan Pengembangan Model Peningkatan Mutu Pendidikan di Kabupaten Simalungun dan Kota Pematang siantar Sumatera Utara (2011)
4. Pengembangan model pembelajaran matematika dan asesmen otentik berbasis kurikulum 2013 untuk meningkatkan kualitas sikap, kemampuan berpikir kreatif dan koneksi matematika siswa SMA (2015)



## ■ Profil Penelaah

---

Nama Lengkap : Dr. Agung Lukito, M.S.  
Telp. Kantor/HP : +62 31 829 3484  
E-mail : gung\_lukito@yahoo.co.id  
Akun Facebook : -  
Alamat Kantor : Kampus Unesa Ketintang  
Jalan Ketintang Surabaya 60231  
Bidang Keahlian : Matematika dan Pendidikan Matematika

### ■ Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. Dosen pada Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Surabaya.  
(2010 - 2016)

### ■ Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S3 : Faculty of Mathematics and Informatics/Delft University of Technology  
(1996 - 2000)
2. S2 : Fakultas Pascasarjana/Matematika/ITB Bandung (1988 - 1991)
3. S1 : Fakultas PMIPA/Pendidikan Matematika/Pendidikan Matematika/IKIP  
Surabaya (1981 - 1987)

### ■ Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Buku Teks Matematika kelas 7 dan 10 (2013)
2. Buku Teks Matematika kelas 7, 8, dan 10, 11 (2014)
3. Buku Teks Matematika kelas 7, 8, 9, dan 10, 11, 12 (2015)

### ■ Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Pengembangan Perangkat Pendampingan Guru Matematika SD dalam Implementasi Kurikulum 2013 (2014)
2. Peluang Kerjasama Unit Pendidikan Matematika Realistik Indonesia dengan Pemangku Kepentingan, LPPM Unesa (2013)
3. Pemanfaatan Internet untuk Pengembangan Profesi Guru-guru Matematika SMP RSBI/SBI Jawa Timur, 2010, (Stranas 2010)
4. Relevansi Pendidikan Matematika Realistik Indonesia (PMRI) dengan Kurikulum Tingkat Satuan Pendidikan (KTSP), 2009, (Stranas 2009)



---

Nama Lengkap : Dr. Muhammad Darwis M., M.Pd  
Telp. Kantor/HP : (0411) 840 860  
E-mail : darwismath2011@yahoo.com  
Akun Facebook : Muhammad Darwis  
Alamat Kantor : Kampus UNM Parang Tambung Jalan Dg. Tata  
Raya, Makassar.  
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika

■ **Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir**

1. Dosen pada program S1, S2, dan S3 Universitas Negeri Makassar. (2007 - 2016)
2. Dosen di Pasca Sarja Universitas Cokroaminoto Palopo, Sulawesi Selatan. (2015 - 2016)
3. Pengembang Instrumen Penilaian BTP dan Penelaah Buku Matematika SMA/MA dan SMK. (2007 - 2016)
4. Instruktur pada Pelatihan Nasional Kurikulum 2013 (2014 - 2016)

■ **Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar**

1. S3 : Program Pasca Sarjana/Pendidikan Matematika/Universitas Negeri Surabaya (2000-2006)
2. S2 : Program Pasca Sarjana/Pendidikan Matematika/IKIP Malang (1989-1993)
3. S1 : FPMIPA/Matematika/Pendidikan Matematika/IKIP Ujung Pandang (1978-1982)

■ **Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir)**

1. Buku Teks Pelajaran Matematika SMA dan SMK.

■ **Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir)**

1. Pengembangan Model Pembelajaran Matematika yang Melibatkan Kecerdasan Emosional Guru Dan Siswa (2006)
2. Analisis Kompetensi Guru Matematika di Kota Makassar (2010)



Nama Lengkap : Drs. Turmudi, ., M.Sc., Ph.D.

Telp. Kantor/HP : (0264)200395/ 081320140361

E-mail : turmudi@upi.edu

Akun Facebook : -

Alamat Kantor : Jl. Veteran 8 Purwakarta/Jl. Dr. Setiabudi 229 Bandung,

Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika

#### ■ **Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir**

1. Dosen Pendidikan Matematika di S1, S2, dan S3 Universitas Pendidikan Indonesia.
2. Ketua Jurusan Pendidikan Matematika (2007-2015)
3. Ketua Prodi S2 dan S3 Pendidikan Matematika SPs UPI (2012-2015)  
(dalam konteks terintegrasi dengan S1 Pendidikan Matematika FPMIPA UPI)
4. Direktur Kampus Daerah UPI Purwakarta (2015- sekarang)

#### ■ **Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar**

1. S3 : Mathematics Education, Graduate School of Education, Educational Studies, La Trobe University Australia, Victoria Campus (1995-1997)
2. S2 : Educational and Training System Designs, Twente University Enschede, Th
3. S2 : Mathematics Education (Graduate School of Education), Educational Studies, La Trobe University Australia, Victoria Campus (1995-1997)
4. S1 : Fakultas Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Jurusan Pendidikan Matematika, IKIP Bandung (Universitas Pendidikan Indonesia), (1984-1986).
5. D3 : Fakultas Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Jurusan Pendidikan Matematika, IKIP Bandung (Universitas Pendidikan Indonesia), (1983-1984).
6. D2 : Fakultas Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Jurusan Pendidikan Matematika, IKIP Bandung (Universitas Pendidikan Indonesia), (1980-1982).

#### ■ **Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir)**

1. Designing Contextual Learning Strategies Mathematics for Junior Secondary School in Indonesia (2006)
2. Pengembangan Pemodelan Matematika di SMP dan SMA (2009)
3. Kajian Efektivitas Pelaksanaan Program DAK Bidang Pendidikan Tahun 2003 - 2008 (Sensus di Kota Manado, Kendari, dan Baros) (2009)
4. Peningkatan Kesadaran Bernovasi dalam Pembelajaran Matematika Guru SMP Melalui Lesson Study (2010)
5. Identifikasi Keberbakatan dalam Bidang Matematika untuk Siswa SMA (2011)
6. Pengembangan Desain Didaktis Subjek Spesifik Pedagang Bidang Matematika dalam Pendidikan Profesi Guru (2011)
7. Eksplorasi Etnomatematika Masyarakat Baduy dan Kampung Naga (2013)
8. Pengembangan Pembelajaran Matematika Berbasis Fenomena Didaktis (2014)
9. Pengembangan Literasi, Sains, dan Matematika di Sekolah Menengah Pertama (2014)
10. Pengembangan Pembelajaran Matematika Berbasis Fenomena Didaktis di Pendidikan Dasar (2015)



---

Nama Lengkap : Prof. Dr. H. Nanang Priatna, M.Pd  
Telp. Kantor/HP : -  
E-mail : nanang\_priatna@yahoo.com.  
Akun Facebook : -  
Alamat Kantor : Departemen Pendidikan Matematika FPMIPA UPI, Jl. Dr.  
Setiabudhi No. 229 Bandung  
Bidang Keahlian : Pembelajaran Matematika

■ **Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:**

1. Bekerja sebagai Dosen Departemen Pendidikan Matematika UPI dan mengajar di Sekolah Pascasarjana UPI. (1988 - sekarang)
2. Mengajar di President University Cikarang-Bekasi (2013 - sekarang)
3. Mengajar di Universitas Widyatama Bandung (2012 - sekarang)
4. Sebagai konsultan manajemen pada Direktorat TK & SD Ditjen Dikdasmen Kemdikbud (2007-2010)
5. Sebagai konsultan manajemen pada Direktorat P2TK Pendidikan Dasar Ditjen Pendidikan Dasar Kemdiknas (2011)

■ **Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:**

1. S3 : Program Studi Pendidikan Matematika dari Universitas Pendidikan Indonesia (1998 - 2003)
2. S2 : Program Studi Pendidikan Matematika dari IKIP Malang (1990 - 1994)
3. S1 : Program Studi Pendidikan Matematika di IKIP Bandung (1982 - 1987)

■ **Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):**

1. Analisis Daya Serap Matematika Siswa SD Tingkat Nasional (Tahun 2008).
2. Capaian Hasil Ujian Akhir Sekolah Berstandar Nasional dan Pemetaan Mutu Pendidikan SD secara Nasional (Tahun 2008).
3. Kajian Pembelajaran Calistung (Membaca, Menulis, dan Berhitung) Kelas Awal di Sekolah Dasar Wilayah Indonesia Bagian Timur (Tahun 2009).
4. Analisis Daya Serap Matematika Siswa SD Tingkat Nasional (Tahun 2010).
5. Pembelajaran Matematika Interaktif untuk Meningkatkan Kemampuan Penalaran, Komunikasi, dan Pemecahan Masalah Matematis Tahap I (Tahun 2012).
6. Pembelajaran Matematika Interaktif untuk Meningkatkan Kemampuan Penalaran, Komunikasi, dan Pemecahan Masalah Matematis Tahap II (Tahun 2013).
7. Desain dan Pengembangan Pembelajaran Berbasis Masalah Berbantuan Komputer untuk Meningkatkan Kemampuan Pemecahan Masalah Matematis, Berpikir Kreatif, dan Disposisi Matematis Siswa SMP (Tahun 2013).
8. Desain dan Pengembangan Pembelajaran dengan Pendekatan Open-Ended Berbantuan Geogebra untuk Meningkatkan Spatial Ability, Berpikir Kritis, dan Self-Concept Siswa SMP (Tahun 2014).
9. Desain dan Pengembangan Model Brain-Based Learning untuk Meningkatkan Kemampuan Representasi Matematis, Berpikir Logis, dan Self-Efficacy Siswa SMP (Tahun 2015).
10. Penerapan Prinsip Brain-Based Learning Berbantuan Geogebra untuk Meningkatkan Spatial Ability, Kemampuan Abstraksi, dan Berpikir Kreatif Matematis Siswa SMP Tahap I (Tahun 2016).



## ■ Profil Editor

---

Nama Lengkap : Taryo, S.Si  
Telp. Kantor/HP : 021-8717006/085691997883  
E-mail : ayo\_math@yahoo.com  
Akun Facebook : Taryo Abdillah  
Alamat Kantor : Jl. H. Baping Raya 100 Ciracas, Jakarta - 13740  
Bidang Keahlian : Matematika

### ■ Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. 2005 – 2010 : Guru Bimbingan Belajar PT Bintang Pelajar
2. 2010 – Sekarang : Editor Buku Pelajaran PT Penerbit Erlangga Mahameru

### ■ Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S1 : Fakultas MIPA Jurusan Matematika Universitas Negeri Jakarta (2002-2007)

### ■ Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Buku Teks Matematika kelas 7 dan 10 (2013)
2. Buku Teks Matematika kelas 7, 8, dan 10, 11 (2014)
3. Buku Teks Matematika kelas 7, 8, 9, dan 10, 11, 12 (2015)

### ■ Judul Buku yang Pernah Diedit (10 Tahun Terakhir)

1. Mathematics Bilingual For Senior High School 1A-3B, 2010 – 2011
2. LPR (Lembar Pekerjaan Rumah) Matematika, 2010 – 2013
3. Smart Mathematics, 2011
4. Erlangga Fokus UN, 2011 – 2016
5. SPM (Seri Pendalaman Materi) Matematika, 2012 – 2015
6. Mandiri Matematika, 2013 – 2015
7. Matematika SMP/MTs, 2013 – 2016
8. Matematika SMA/MA, 2013 – 2016
9. Bupena (Buku Penilaian Autentik) Matematika, 2013 – 2016
10. Erlangga X-Press UN Matematika, 2015 – 2016