KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET, DAN TEKNOLOGI
BADAN STANDAR, KURIKULUM, DAN ASESMEN PENDIDIKAN
PUSAT PERBUKUAN

Matematika
Tingkat Lanjut

Wikan Budi Utami, dkk.

2022

SMA/MA Kelas XII

Disclaimer: Buku ini disiapkan oleh Pemerintah dalam rangka pemenuhan kebutuhan buku pendidikan yang bermutu, murah, dan merata sesuai dengan amanat dalam UU No. 3 Tahun 2017. Buku ini disusun dan ditelaah oleh berbagai pihak di bawah koordinasi Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi. Buku ini merupakan dokumen hidup yang senantiasa diperbaiki, diperbarui, dan dimutakhirkan sesuai dengan dinamika kebutuhan dan perubahan zaman. Masukan dari berbagai kalangan yang dialamatkan kepada penulis atau melalui alamat surel buku@kemdikbud.go.id diharapkan dapat meningkatkan kualitas buku ini.

Matematika Tingkat Lanjut untuk SMA/MA Kelas XII

Penulis
Wikan Budi Utami
Sri Adi Widodo
Fitria Sulistyowati

Penelaah
Sunardi
Kiki Ariyanti Sugeng

Penyelia/Penyelaras
Supriyatno
E. Oos M. Anwas
Arifah Dinda Lestari

Ilustrator dan Desainer
Hasbi Yusuf

Editor
Legina Aditya

Penerbit
Pusat Perbukuan
Badan Standar, Kurikulum, dan Asesmen Pendidikan
Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi
Komplek Kemdikbudristek Jalan RS. Fatmawati, Cipete, Jakarta Selatan
https://buku.kemdikbud.go.id

Cetakan pertama, 2022
ISBN 978–602–244–769–6 (no.jil.lengkap)
ISBN 978–602–244–771–9 (jil.2)

Isi buku ini menggunakan huruf EB Garamond, 12/18pt., Robert Granjon
xvi, 208 hlm., 17.6 x 25 cm.

Kata Pengantar

Pusat Perbukuan; Badan Standar, Kurikulum, dan Asesmen Pendidikan; Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi memiliki tugas dan fungsi mengembangkan buku pendidikan pada satuan Pendidikan Anak Usia Dini, Pendidikan Dasar, dan Pendidikan Menengah. Buku yang dikembangkan saat ini mengacu pada Kurikulum Merdeka, dimana kurikulum ini memberikan keleluasaan bagi satuan/program pendidikan dalam mengembangkan potensi dan karakteristik yang dimiliki oleh peserta didik. Pemerintah dalam hal ini Pusat Perbukuan mendukung implementasi Kurikulum Merdeka di satuan pendidikan Pendidikan Anak Usia Dini, Pendidikan Dasar, dan Pendidikan Menengah dengan mengembangkan Buku Teks Utama.

Buku teks utama merupakan salah satu sumber belajar utama untuk digunakan pada satuan pendidikan. Adapun acuan penyusunan buku teks utama adalah Capaian Pembelajaran PAUD, SD, SMP, SMA, SDLB, SMPLB, dan SMALB pada Program Sekolah Penggerak yang ditetapkan melalui Keputusan Kepala Badan Penelitian dan Pengembangan dan Perbukuan Nomor 028/H/KU/2021 Tanggal 9 Juli 2021. Sajian buku dirancang dalam bentuk berbagai aktivitas pembelajaran untuk mencapai kompetensi dalam Capaian Pembelajaran tersebut. Buku ini digunakan pada satuan pendidikan pelaksana implementasi Kurikulum Merdeka.

Sebagai dokumen hidup, buku ini tentu dapat diperbaiki dan disesuaikan dengan kebutuhan serta perkembangan keilmuan dan teknologi. Oleh karena itu, saran dan masukan dari para guru, peserta didik, orang tua, dan masyarakat sangat dibutuhkan untuk pengembangan buku ini di masa yang akan datang. Pada kesempatan ini, Pusat Perbukuan menyampaikan terima kasih kepada semua pihak yang telah terlibat dalam penyusunan buku ini, mulai dari penulis, penelaah, editor, ilustrator, desainer, dan kontributor terkait lainnya. Semoga buku ini dapat bermanfaat khususnya bagi peserta didik dan guru dalam meningkatkan mutu pembelajaran.

Jakarta, Juni 2022

Kepala Pusat,

Supriyatno

NIP 19680405 198812 1 001

Prakata

Puji syukur kami panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa atas berkat dan rahmat-Nya, kami dapat menyelesaikan penulisan buku siswa Matematika Tingkat Lanjut. Buku ini disusun untuk memenuhi Capaian Pembelajaran Fase F+ bagi siswa SMA Kelas XII sesuai dengan Keputusan Menteri Pendidikan dan Kebudayaan Republik Indonesia Nomor 958/P/2020 dan Keputusan kepala badan penelitian dan pengembangan dan perbukuan No 028/H/KU/2021 tentang Capaian Pembelajaran pada Pendidikan Anak Usia Dini, Pendidikan Dasar, dan Pendidikan Menengah.

Matematika sering dipandang sebagai mata pelajaran yang abstrak, sulit, dan tidak relevan dalam kehidupan. Namun, banyak konsep dan prinsip matematika muncul di alam dan relevan dengan kehidupan sehari-hari.

Tim penyusun berusaha untuk merancang buku teks Matematika Tingkat Lanjut Kelas XII semenarik mungkin, agar peserta didik memiliki minat dan motivasi untuk mempelajari matematika. Pada buku ini, peserta didik diajak untuk mengingat kembali materi matematika pada jenjang sebelumnya dengan tahap remembering dan diajak untuk menggunakan teknologi seperti *Photomath*, *GeoGebra*, dan *Youtube*. Selain menggunakan teknologi, peserta didik diberikan kesempatan untuk berdiskusi, berkomunikasi, dan bekerjasama untuk menyelesaikan masalah matematis yang aplikatif di kehidupan sehari-hari. Pengembangan karakter Profil Pelajar Pancasila diharapkan dapat tercapai pada beberapa kegiatan pembelajaran yang ada pada buku ini seperti Ayo Bereksplorasi, Ayo Mencoba, Ayo Berpikir Kritis, dan Ayo Berpikir Kreatif. Pada beberapa masalah pada latihan soal, kami mengupayakan agar kemampuan peserta didik dalam berpikir tingkat tinggi semakin berkembang dengan memberikan soal berpikir kreatif. Kami berharap karakter Profil Pelajar Pancasila dan keterampilan abad ke-21 pada peserta didik semakin berkembang.

Kami mengucapkan terima kasih kepada berbagai pihak yang telah membantu mewujudkan buku teks Matematika Tingkat Lanjut Kelas XII, yaitu para penelaah, yaitu Prof. Dr. Sunardi, M.Pd., Dr. Kiki Ariyanti Sugeng, M.Si., dan Pusat Kurikulum dan Perbukuan yang telah memfasilitasi tim penulis dan para penelaah sehingga buku ini dapat terselesaikan. Kami berharap buku teks Matematiika Tingkat Lanjut Kelas XII dapat bermanfaat bagi peserta didik agar capaian pebelajaran fase F+ dapat terpenuhi diakhir fase, dan peserta didik SMA semakin menyenangi matematika dan merasakan manfaat belajar matematika.

Yogyakarta & Malang, Oktober 2021

Tim Penulis

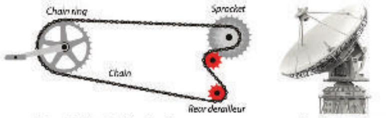
Daftar Isi

Daftar Gambar

Daftar Tabel

Petunjuk Penggunaan Buku

Apersepsi (Pembuka Bab)



Gambar 1.1. *Chain Ring* dan *Sprocket*

Gambar 1.2. *Radar*

Secara geometris, irisan kerucut merupakan tempat kedudukan atau himpunan titik-titik yang membentuk kurva dua dimensi, yang dibentuk oleh perpotongan antara kerucut dengan sebuah bidang. Secara umum, jenis kurva yang terbentuk dari irisan sepasang kerucut berupa lingkaran, parabola, elips, dan hiperbola. Bentuk-bentuk ini sering kalian lihat dalam kehidupan sehari-har. Aplikasi irisan kerucut berbentuk lingkaran di antaranya adalah penggunaan *chain ring* (gigi depan sepeda), *sprocket* (gigi belakang sepeda), dan roda sepeda yang berkaitan dengan lingkaran (Gambar 1.1). Sebelum berganti dengan peralatan GPS (*Global Positioning System*), hiperbola digunakan dalam navigasi pelayaran. Hiperbola ini diaplikasikan pada teknologi radar seperti yang ditunjukkan pada Gambar 1.2. Selain itu, bentuk lain parabola dapat dilihat pada pada kompor tenaga surya.

Pada awal bab terdapat pendahuluan bab yang menjelaskan topik yang akan kalian pelajari. Ada rasionalisasi dalam bab ini, yang dapat menarik dan memotivasi kalian untuk mengeksplorasi ide-ide besar yang menghubungkan ide-ide kunci dan konsep.

Pertanyaan Pemantik

Pertanyaan Pemantik

- Bagaimana menentukan persamaan irisan kerucut?
- Bagaiman perbedaan dari persamaan lingkaran, parabola, elips, dan parabola?
- Bagaimana menentukan kedudukan titik atau garis terhadap irisan kerucut?

Bagian ini berada di awal bab karena merupakan pertanyaan yang akan memandu kalian dalam memahami materi dan perkembangannya selama mempelajari bab ini. Melalui pertanyaan pemantik, kalian akan menemukan kedalaman dan keluasan materi pelajaran.

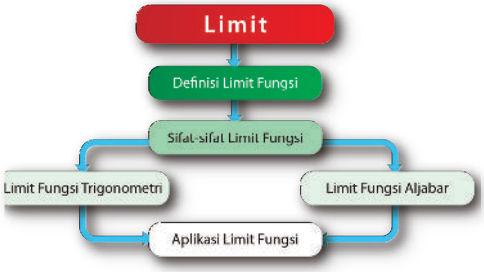
Kata Kunci

Kata Kunci

Lingkaran, Elips, Parabola, Hiperbola, Garis Singgung, Irisan Kerucut, Kedudukan Dua Lingkaran

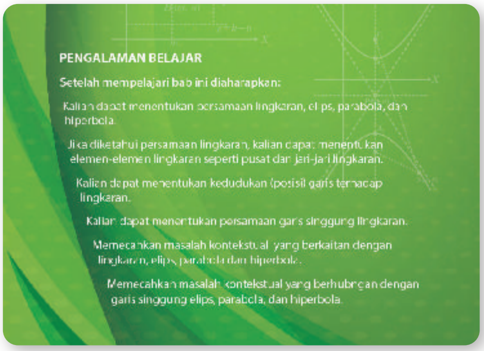
Kata atau konsep yang merupakan kunci untuk dihubungkan dengan kata atau konsep lain. Pemahaman terhadap kata kunci menolong kalian untuk mengaitkan konsep yang satu dengan konsep lainnya.

Peta Konsep



Peta konsep yang terdapat pada setiap awal bab merupakan diagram yang menunjukkan hubungan antarkonsep yang terdapat pada setiap bab. Kalian perlu mencermati peta konsep untuk mendapatkan gambaran yang luas tentang isi bab tersebut.

Pengalaman Belajar



Terdapat pada awal bab yang menjadi arahan tercapainya kompetensi setelah mempelajari bab tersebut. Pengalaman Belajar sama halnya dengan Tujuan Pembelajaran. Fitur Pengalaman Belajar dapat menolong kalian untuk memonitor perkembangan belajar kalian dalam bab tersebut, yang nantinya akan dihubungkan dengan refleksi pada akhir pembahasan.

Ayo Mengingat Kembali

Kalian diminta untuk mengingat kembali materi sebelumnya sebagai materi prasyarat untuk mempelajari materi baru.

Ayo Berpikir Kreatif

Kalian berpikir kreatif jika dapat membuat ide atau alternatif solusi yang berbeda dari hal umum. Pada kegiatan Ayo Berpikir Kreatif ini, kalian dapat melakukan dengan cara menghasilkan gagasan, karya atau tindakan yang orisinil, sehingga karakter profil pelajar pancasila dapat berkembang.

Ayo Mencoba

Pada kegiatan Ayo Mencoba, kalian dapat melakukan kegiatan ini secara mandiri atau berkolaborasi dengan teman sekelompok. Kegiatan Ayo Mencoba yang dilakukan secara mandiri maupun secara berkolaborasi ini, diharapkan kalian memiliki rasa tanggung jawab atas proses dan hasil belajar yang kalian peroleh dalam menghadapi masalah matematis. Diharapkan, sikap gotong royong dan mandiri pada Profil Pelajar Pancasila dapat berkembang menjadi lebih baik

Ayo Mengomunikasikan

Kalian dapat mengomunikasikan pendapat atau hasil diskusi di dalam kelompok. Dengan mengomunikasikan hasil diskusi ini, kalian dapat mempresentasikan gagasan yang sudah disepakati di dalam kelompok. Seperti pada etika dalam presentasi, kalian diminta untuk menghargai teman kalian yang sedang presentasi. Dengan sikap saling menghargai antar manusia ini, karakter berakhak mulia pada elemen Profil Pelajar Pancasila yang pertama yaitu beriman, bertakawa kepada Tuhan Yang Maha Esa dan berakhak mulia dapat berkembang menjadi lebih baik.

Tahukah Kalian?

Bagian ini diberikan pengetahuan umum meliputi tokoh-tokoh matematika terkait materi yang akan dipelajari.

Ayo Berdiskusi

Bertukar pikiran dan menyampaikan pendapat dengan teman merupakan kegiatan yang membantu kalian memperdalam pengetahuan, memecahkan masalah, dan menjawab pertanyaan. Selain bermanfaat untuk memperdalam pengetahuan, kalian juga dapat berkolaborasi, bersikap peduli dan berbagi kepada sesama, sehingga karakter Profil Pelajar Pancasila dapat berkembang menjadi lebih baik.

Soal Berpikir Kreatif

Pada soal jenis berpikir kreatif ini, kalian diharapkan dapat mengkreasikan alternatif solusi dari soal yang dihadapi, menghasilkan alternatif gagasan, karya atau tindakan. Dalam soal jenis ini, kalian harus memproses informasi dan gagasan, menganalisis dan mengevaluasi penalaran, merefleksikan pemikiran dan proses berpikir serta mengambil suatu keputusan dengan cermat.

Ayo Gunakan Teknologi

Teknologi memudahkan Kalian untuk menyelesaikan masalah atau pekerjaan matematika. Kalian dapat memanfaatkan *Photomath*, *Geogebra*, kalkulator, dan berbagai aplikasi lainnya untuk mengerjakan tugas kalian. Kalian dapat memilih teknologi yang sesuai dengan kebutuhan kalian.

Ayo Bereksplorasi

Kalian melakukan kegiatan ini untuk menyelidiki konsep matematika yang berkaitan dengan pembahasan materi. Eksplorasi selalu dilakukan sebelum kalian mendalami konsep matematika beserta aplikasinya. Kegiatan Ayo Bereksplorasi dapat dilakukan secara mandiri atau bersama dengan teman. Dengan adanya fitur Ayo Bereksplorasi, diharapkan kalian memiliki rasa tanggung jawab atas proses dan hasil belajar yang kalian peroleh dalam menghadapi masalah matematis. Harapannya elemen gotong royong dan mandiri pada Profil Pelajar Pancasila dapat berkembang menjadi lebih baik.

Ayo Berpikir Kritis

Fitur Ayo Berpikir Kritis mengajak kalian untuk memproses informasi dan gagasan, menganalisis dan mengevaluasi penalaran, merefleksikan pemikiran dan proses berpikir, serta mengambil suatu keputusan dengan cermat. Dengan melatih kemampuan berpikir kritis ini, secara tidak langsung kalian telah mengembangkan keterampilan abad 21 serta mengembangkan karakter Profil Pelajar Pancasila.

Video Pembelajaran

Video pembelajaran memudahkan kalian untuk memahami materi yang dipelajari secara daring.

Sifat-sifat

Bagian ini membantu pemahaman kalian atas konsep yang dipelajari. Perhatikan sifat-sifat dari suatu konsep untuk dapat digunakan untuk menyelesaikan suatu masalah matematis yang dipelajari.

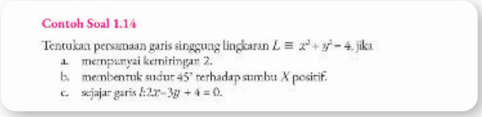
Miskonsepsi

Merupakan suatu peluang kejadian yang dapat terjadi jika kalian melakukan kegiatan tidak sesuai dengan petunjuk buku atau petunjuk guru. Guru perlu memperhatikan kejadian miskonsepsi agar peserta didik melakukan kegiatan seperti perintah atau petunjuk yang diberikan.

Cek Dengan *Photomath*

Photomath merupakan salah satu aplikasi yang dapat digunakan untuk pembelajaran matematika. Pada kegiatan ini kalian dapat melakukan pemeriksaan kembali terhadap hasil yang kalian peroleh, apakah sudah benar atau belum. Apabila hasil yang diperoleh belum benar, maka kalian dapat melihat kembali jawaban untuk melihat apakah ada langkah yang keliru dalam proses menyelesaikan masalah matematis.

Contoh Soal

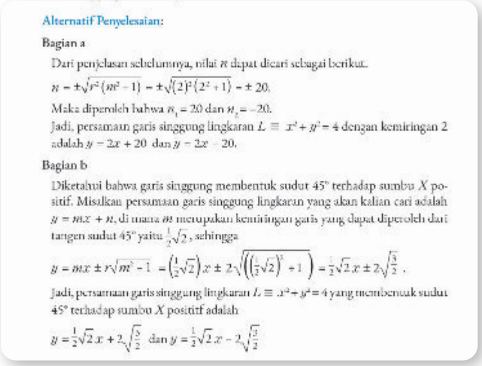


Contoh Soal 1.14

Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 4$, jika
a. mempunyai kemiringan 2.
b. membentuk sudut 45° terhadap sumbu X positif.
c. sejajar garis $l: 2x - 3y + 4 = 0$.

Bagian ini diberikan untuk membantu kalian memahami konsep yang dipelajari. Perhatikan contoh soal dan hubungkan dengan penjelasan sebelumnya agar kalian mendapatkan manfaat dari bagian ini.

Alternatif Penyelesaian



Alternatif Penyelesaian:

Bagian a

Dari penjelasan sebelumnya, nilai n dapat dicari sebagai berikut.

$n = \pm\sqrt{r^2(m^2-1)} = \pm\sqrt{(2)^2(2^2+1)} = \pm 20.$

Maka diperoleh bahwa $n_1 = 20$ dan $n_2 = -20$.

Jadi, persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = 4$ dengan kemiringan 2 adalah $y = 2x + 20$ dan $y = 2x - 20$.

Bagian b

Diketahui bahwa garis singgung membentuk sudut 45° terhadap sumbu X positif. Misalkan persamaan garis singgung lingkaran yang akan kalian cari adalah $y = mx + n$, di mana m merupakan kemiringan garis yang dapat diperoleh dari tangen sudut 45° yaitu $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, sehingga

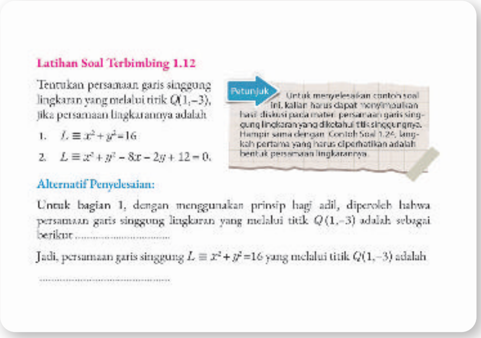
$y = mx \pm r\sqrt{m^2-1} = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)x \pm 2\sqrt{\left(\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2+1\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,x \pm 2\sqrt{\frac{3}{2}}.$

Jadi, persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = 4$ yang membentuk sudut 45° terhadap sumbu X posititf adalah

$y = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,x + 2\sqrt{\frac{3}{2}}$ dan $y = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,x - 2\sqrt{\frac{3}{2}}$

Alternatif penyelesaian merupakan suatu alternatif untuk menyelesaikan contoh soal, latihan soal terbimbing dan latihan soal. Seperti pengertian alternatif yaitu beberapa kemungkinan, guru dipersilahkan menggunakan bentuk atau model jawaban yang lain dalam menyelesaikan contoh soal, latihan soal terbimbing dan latihan soal.

Latihan Soal Terbimbing



Latihan Soal Terbimbing 1.12

Tentukan persamaan garis singgung lingkaran yang melalui titik $Q(1,-3)$, jika persamaan lingkarannya adalah

1. $L \equiv x^2 + y^2 = 16$
2. $L \equiv x^2 + y^2 - 8x - 2y + 12 = 0$.

Petunjuk: Untuk menyelesaikan contoh soal ini, kalian harus dapat menyimpulkan hasil diskusi pada materi persamaan garis singgung lingkaran yang diketahui titik singgungnya. Hampir sama dengan Contoh Soal 1.24, langkah pertama yang harus diperhatikan adalah bentuk persamaan lingkarannya.

Alternatif Penyelesaian:

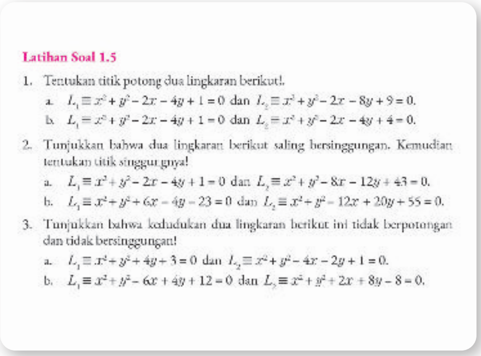
Untuk bagian 1, dengan menggunakan prinsip bagi adil, diperoleh bahwa persamaan garis singgung lingkaran yang melalui titik $Q(1,-3)$ adalah sebagai berikut ....

Jadi, persamaan garis singgung $L \equiv x^2 + y^2 = 16$ yang melalui titik $Q(1,-3)$ adalah

....

Bagian ini diberikan agar kalian lebih memahami konsep yang dipelajari. Perhatikan arahan dalam setiap langkah pada latihan soal terbimbing dan kaitkan dengan contoh soal pada bagian sebelumnya agar kalian merasakan manfaat bagian tersebut.

Latihan soal

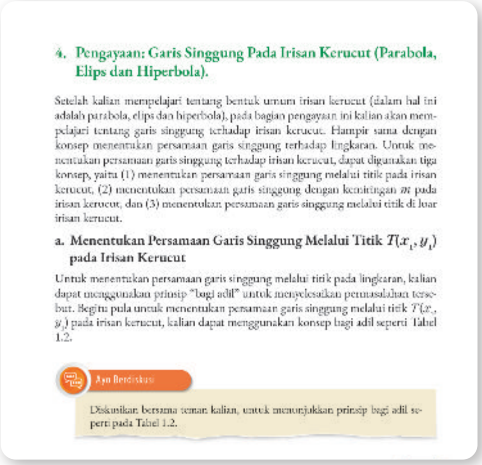


Latihan Soal 1.5

1. Tentukan titik potong dua lingkaran berikut!.
   a. $L_1 \equiv x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ dan $L_2 \equiv x^2 + y^2 - 2x - 8y + 9 = 0$.
   b. $L_1 \equiv x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ dan $L_2 \equiv x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$.
2. Tunjukkan bahwa dua lingkaran berikut saling bersinggungan. Kemudian tentukan titik singgungnya!
   a. $L_1 \equiv x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ dan $L_2 \equiv x^2 + y^2 - 8x - 12y + 43 = 0$.
   b. $L_1 \equiv x^2 + y^2 + 6x - 4y - 23 = 0$ dan $L_2 \equiv x^2 + y^2 - 12x + 20y + 55 = 0$.
3. Tunjukkan bahwa kedudukan dua lingkaran berikut ini tidak berpotongan dan tidak bersinggungan!
   a. $L_1 \equiv x^2 + y^2 + 4y + 3 = 0$ dan $L_2 \equiv x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$.
   b. $L_1 \equiv x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0$ dan $L_2 \equiv x^2 + y^2 + 2x + 8y - 8 = 0$.

Kalian mengerjakan soal-soal dengan tiga jenis tingkat kesulitan, yaitu dasar, menengah, dan tinggi. Pertanyaan pada tingkat dasar berupa jawaban pendek yang menguji pemahaman konsep dan keterampilan dasar. Pertanyaan pada tingkat menengah berupa permasalahan yang lebih terstruktur, sedangkan pertanyaan tingkat tinggi merupakan permasalahan aplikasi dan keterampilan tingkat tinggi (HOTS).

Pengayaan



4. Pengayaan: Garis Singgung Pada Irisan Kerucut (Parabola, Elips dan Hiperbola).

Setelah kalian mempelajari tentang bentuk umum irisan kerucut (dalam hal ini adalah parabola, elips dan hiperbola), pada bagian pengayaan ini kalian akan mempelajari tentang garis singgung terhadap irisan kerucut. Hampir sama dengan konsep menentukan persamaan garis singgung terhadap lingkaran. Untuk menentukan persamaan garis singgung terhadap irisan kerucut, dapat digunakan tiga konsep, yaitu (1) menentukan persamaan garis singgung melalui titik pada irisan kerucut, (2) menentukan persamaan garis singgung dengan kemiringan m pada irisan kerucut, dan (3) menentukan persamaan garis singgung melalui titik di luar irisan kerucut.

a. Menentukan Persamaan Garis Singgung Melalui Titik $T(x_1, y_1)$ pada Irisan Kerucut

Untuk menentukan persamaan garis singgung melalui titik pada lingkaran, kalian dapat menggunakan prinsip "bagi adil" untuk menyelesaikan permasalahan tersebut. Begitu pula untuk menentukan persamaan garis singgung melalui titik $T(x_1, y_1)$ pada irisan kerucut, kalian dapat menggunakan konsep bagi adil seperti Tabel 1.2.

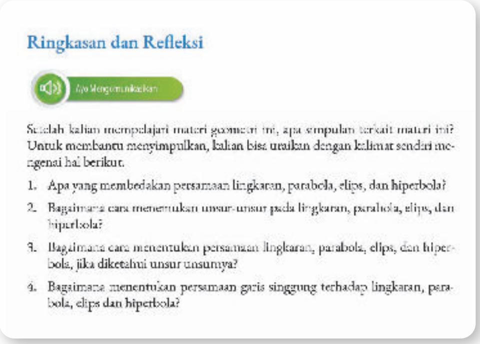
Ayo Berdiskusi

Diskusikan bersama teman kalian, untuk menunjukkan prinsip bagi adil seperti pada Tabel 1.2.

Fitur Pengayaan dapat memperluas atau memperdalam wawasan dan pemahaman kalian atas konsep matematika yang sedang dipelajari.

Materi pada fitur Pengayaan dapat bersifat sebagai pendalaman materi, penerapan dalam bidang teknologi/ informatika, atau kegiatan eksplorasi/ proyek.

Ringkasan dan Refleksi


Ringkasan dan Refleksi

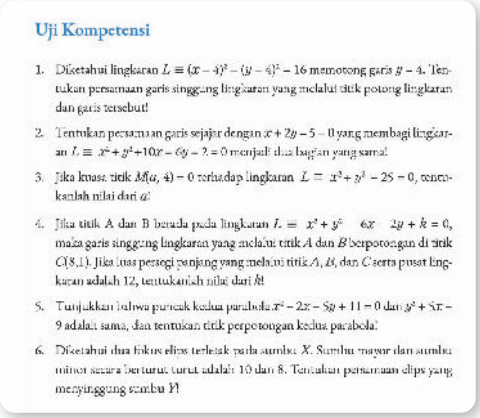
Ayo Mengomunikasikan

Setelah kalian mempelajari materi geometri ini, apa simpulan terkait materi ini? Untuk membantu menyimpulkan, kalian bisa uraikan dengan kalimat sendiri mengenai hal berikut.

1. Apa yang membedakan persamaan lingkaran, parabola, elips, dan hiperbola?
2. Bagaimana cara menentukan unsur-unsur pada lingkaran, parabola, elips, dan hiperbola?
3. Bagaimana cara menentukan persamaan lingkaran, parabola, elips, dan hiperbola, jika diketahui unsur-unsurnya?
4. Bagaimana menentukan persamaan garis singgung terhadap lingkaran, parabola, elips dan hiperbola?

Pada akhir bab atau subbab, kalian akan diajak memikirkan kembali apa yang sudah dipelajari dan seberapa dalam/ tepat pemahamanmu atas pembelajaran pada bagian tersebut.

Uji Kompetensi


Uji Kompetensi

1. Diketahui lingkaran $L \equiv (x-4)^2 - (y-4)^2 - 16$ memotong garis $y - 4$. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran yang melalui titik potong lingkaran dan garis tersebut!
2. Tentukan persamaan garis sejajar dengan $x + 2y - 5 = 0$ yang membagi lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 + 10x - 6y - 2 = 0$ menjadi dua bagian yang sama!
3. Jika kuasa titik $M(a, 4) = 0$ terhadap lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 25 = 0$, tentukanlah nilai dari a!
4. Jika titik A dan B berada pada lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 6x - 2y + k = 0$, maka garis singgung lingkaran yang melalui titik A dan B berpotongan di titik $C(8,1)$. Jika luas persegi panjang yang melalui titik A, B, dan C serta pusat lingkaran adalah 12, tentukanlah nilai dari k!
5. Tunjukkan bahwa puncak kedua parabola $x^2 - 2x - 5y + 11 = 0$ dan $y^2 + 5x - 9$ adalah sama, dan tentukan titik perpotongan kedua parabola!
6. Diketahui dua fokus elips terletak pada sumbu X. Sumbu mayor dan sumbu minor secara berturut-turut adalah 10 dan 8. Tentukan persamaan elips yang menyinggung sumbu Y!

Terdapat pada setiap akhir bab, merupakan sarana bagi kalian untuk mengukur pencapaian kalian dalam topik bab. Kalian dapat mengerjakan sejumlah soal yang bervariasi, mulai dari soal yang sederhana sampai soal yang kompleks. Selain itu, soal dapat berupa hitungan ataupun pemahaman konsep.

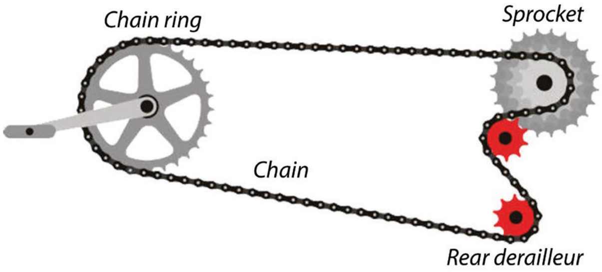
KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET, DAN TEKNOLOGI
REPUBLIK INDONESIA, 2022
Matematika Tingkat Lanjut untuk SMA/MA Kelas XII
Penulis: Wikan Budi Utami, dkk
ISBN 978-602-244-771-9 (jilid 2)

Bab 1 Geometri Analitik

PENGALAMAN BELAJAR

Setelah mempelajari bab ini diharapkan:

- Kalian dapat menentukan persamaan lingkaran, elips, parabola, dan hiperbola.
- Jika diketahui persamaan lingkaran, kalian dapat menentukan elemen-elemen lingkaran seperti pusat dan jari-jari lingkaran.
- Kalian dapat menentukan kedudukan (posisi) garis terhadap lingkaran.
- Kalian dapat menentukan persamaan garis singgung lingkaran.
- Kalian dapat menentukan unsur-unsur elips, parabola, dan hiperbola seperti titik fokus, titik pusat, dan asimtot.
- Memecahkan masalah kontekstual yang berkaitan dengan lingkaran, elips, parabola dan hiperbola.
- Memecahkan masalah kontekstual yang berhubungan dengan garis singgung elips, parabola, dan hiperbola.



Gambar 1.1. *Chain Ring* dan *Sprocket*

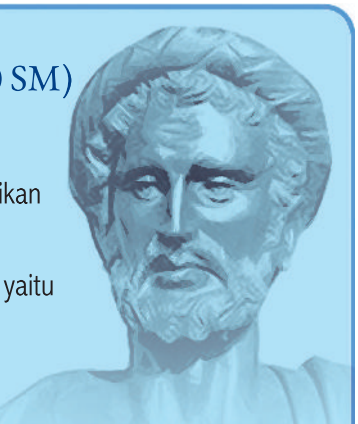
Gambar 1.2. Radar

Secara geometris, irisan kerucut merupakan tempat kedudukan atau himpunan titik-titik yang membentuk kurva dua dimensi, yang dibentuk oleh perpotongan antara kerucut dengan sebuah bidang. Secara umum, jenis kurva yang terbentuk dari irisan sepasang kerucut berupa lingkaran, parabola, elips, dan hiperbola. Bentuk-bentuk ini sering kalian lihat dalam kehidupan sehari-hari. Aplikasi irisan kerucut berbentuk lingkaran di antaranya adalah penggunaan *chain ring* (gigi depan sepeda), *sprocket* (gigi belakang sepeda), dan roda sepeda yang berkaitan dengan lingkaran (Gambar 1.1). Sebelum berganti dengan peralatan GPS (*Global Positioning System*), hiperbola digunakan dalam navigasi pelayaran. Hiperbola ini diaplikasikan pada teknologi radar seperti yang ditunjukkan pada Gambar 1.2. Selain itu, bentuk lain parabola dapat dilihat pada pada kompor tenaga surya.

Gambar 1.3. Penggunaan bentuk hiperbola pada kehidupan sehari-hari

Kurva hiperbola digunakan dalam konstruksi saluran udara tegangan ekstra tinggi (SUTET) berbentuk hiperbola. Selain itu, bentuk hiperbola juga digunakan untuk menara pendingin (*cooling tower*) seperti Gambar 1.3. Menara pendingin berbentuk hiperbolik karena kontruksinya yang tahan lama dengan bahan konstruksi yang minimal. Bentuk ini juga membantu mempercepat udara panas, sehingga meningkatkan efisiensi pendinginan.

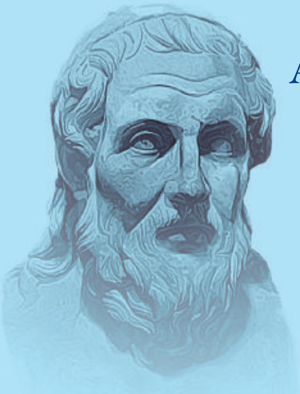
Tahukah Kalian?



Menaechmus (350 SM)

- Mempelajari irisan kerucut dan sifat-sifatnya.
- Temuan: kurva parabola digunakan untuk menyelesaikan permasalahan melipatduakan volume kubus.
- Kemungkinan menemukan bagian berbentuk kerucut, yaitu elips, parabola, dan hiperbola.

Gambar 1.4. Menaechmus



Gambar 1.5. Apollonius

Apollonius (225 SM)

- Menulis buku tentang *Conics* (Kerucut) yang membahas hal mendasar tentang semua irisan kerucut tegak maupun miring.
- Orang pertama yang secara sistematis menunjukkan bahwa tidak perlu melakukan irisan tegak lurus terhadap salah satu elemen kerucut. Dari satu kerucut dapat diperoleh tiga jenis penampang kerucut dengan memvariasikan kemiringan

Pada bagian pertama ini, kalian akan mempelajari tentang persamaan lingkaran, kedudukan titik terhadap lingkaran, kedudukan garis terhadap lingkaran, garis singgung pada lingkaran, dan kedudukan dua lingkaran. Pada bagian kedua, kalian akan mempelajari tentang persamaan parabola, elips dan hiperbola, serta garis singgungnya. Setelah mempelajari materi ini, diharapkan kalian dapat menyelesaikan masalah kontekstual yang berhubungan dengan irisan kerucut.

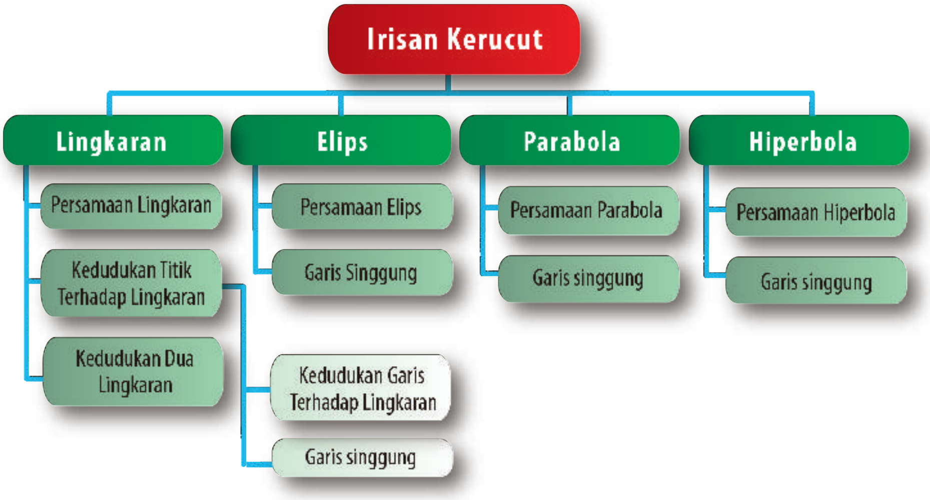
Pertanyaan Pemantik

- Apakah kalian mengetahui persamaan irisan kerucut?
- Apakah kalian mengetahui perbedaan dari persamaan lingkaran, parabola, elips, dan parabola?
- Apakah kalian mengetahui cara menentukan kedudukan titik atau garis terhadap irisan kerucut?

Kata Kunci

Lingkaran, Elips, Parabola, Hiperbola, Garis Singgung, Irisan Kerucut, Kedudukan Dua Lingkaran

Peta konsep

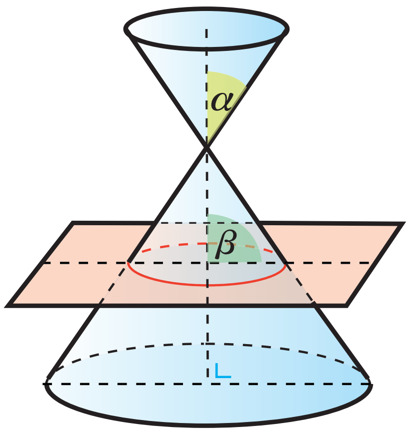


Ayo Mengingat Kembali

Untuk mempelajari bab ini, kalian harus mengingat kembali tentang teorema *Pythagoras*, persamaan linier, jarak antara titik dengan titik, dan titik ke garis, trigonometri (terutama pada *sinus, cosinus,* dan *tangen*), dan fungsi kuadrat.

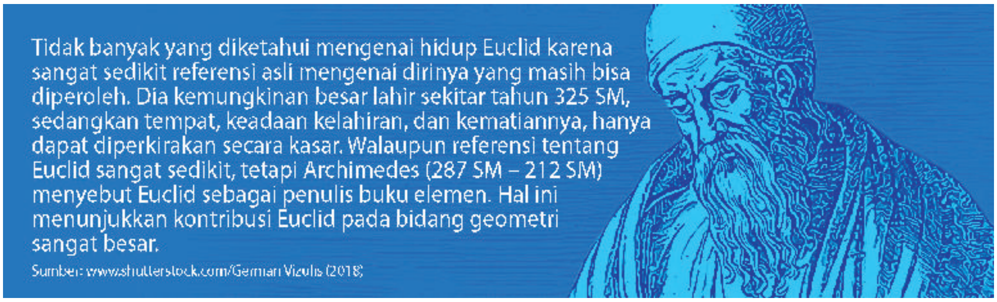
A. Lingkaran dan Garis Singgung

Di kehidupan sehari-hari, lingkaran adalah salah satu bentuk bangun geometri yang sering dijumpai. Sejak lebih dari 2500 tahun silam, bentuk lingkaran dianggap sebagai bentuk istimewa yang paling sempurna. Keistimewaan tersebut di antaranya dapat dilihat pada bangun datar yang luasnya sama, tetapi lingkaran memiliki keliling yang minimum (Gunawan, 2015). Lingkaran pada irisan kerucut terbentuk dari kerucut yang dipotong oleh bidang dengan sudut $\beta = \frac{\pi}{2}$ atau 90^0 terhadap garis tinggi kerucut dan tidak melalui puncak kerucut (Gambar 1.6).



Gambar 1.6. Irisan Kerucut dan Bidang Berupa Lingkaran

Tokoh dan Sejarah



Gambar 1.7. Euclid

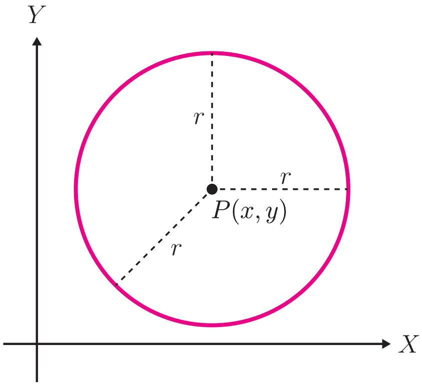
1. Definisi Lingkaran

Ayo Mengomunikasikan

Lingkaran adalah kurva tertutup dan semua titik pada garis tersebut memiliki jarak yang sama dengan titik pusat. Garis melengkung pada definisi ini dapat diartikan dengan kurva tertutup, sehingga lingkaran ini dipandang sebagai suatu bangun pada bidang datar atau pada dimensi dua.

Selain itu, beberapa ahli mengatakan bahwa lingkaran adalah lintasan suatu titik yang berjarak sama terhadap suatu titik tertentu dan terletak suatu bidang datar. Dari pernyataan ini, kata kunci terkait dengan pengertian lingkaran adalah jarak yang selalu sama dan titik tertentu. Jarak yang sama pada definisi ini dapat diartikan dengan jari-jari, sedangkan titik tertentu dapat diartikan dengan titik pusat.

Pada Gambar 1.8 dapat dilihat bahwa titik tertentu atau pusat lingkaran pada $P(x,y)$, sedangkan jarak yang sama atau jari-jari adalah r. Dari definisi lingkaran tersebut dan dibantu dengan Gambar 1.8, dapatkah kalian mengungkapkan definisi lingkaran menggunakan kalimat sendiri?



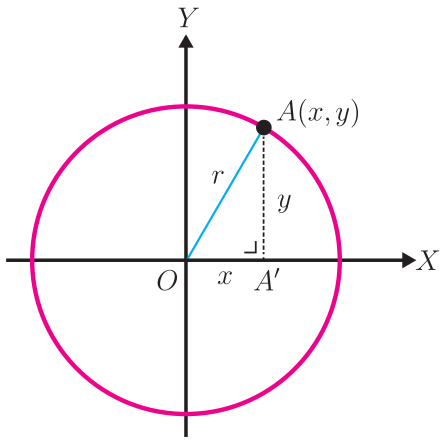
Gambar 1.8. Lingkaran dengan Titik Pusat $P(x,y)$ dan Jari-Jari r.

2. Persamaan Lingkaran

a. Persamaan Lingkaran Dengan Pusat $O(0,0)$

Titik O adalah titik asal koordinat kartesian. Seperti pada Gambar 1.9, lingkaran berpusat di $O(0,0)$ dan jari-jari r. Andaikan $A(x,y)$ adalah sembarang titik yang terletak di lingkaran. Titik A tersebut diproyeksikan pada sumbu X, sehingga diperoleh A' pada koordinat $(x,0)$.

Dari segitiga $\Delta OA'A$ yang merupakan segitiga siku-siku, diperoleh bahwa $OA^2 = OA'^2 + A'A^2$. Telah diketahui bahwa panjang OA adalah jari-jari atau r, panjang OA' adalah x, dan panjang AA' adalah y, sehingga $OA^2 = (OA)^2 + (A'A)^2$ dapat dinyatakan dengan $r^2 = x^2+y^2$. Karena A adalah sembarang titik yang diambil pada lingkaran, maka persamaan $r^2= x^2+y^2$. dapat digeneralisasi untuk semua titik pada lingkaran. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa persamaan lingkaran dengan pusat O dan jari-jari r adalah $x^2+y^2 = r^2$.



Gambar 1.9. Lingkaran dengan Pusat O (0,0) dan Jari-Jari r.

Contoh Soal 1.1

Jika suatu lingkaran berpusat di O dan jari-jari $r = 6$, tentukan persamaan lingkaran tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

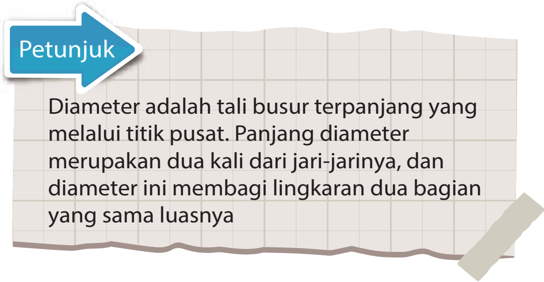
Pada contoh soal 1.1 diketahui bahwa lingkaran memiliki pusat O dan jari-jari $r = 6$, sehingga persamaan lingkaran dapat ditulis menjadi $x^2+y^2 = r^2$ dan dapat dinyatakan dengan $x^2+y^2 = 36$.

Ayo Mencoba

Pada bagian ini, kalian dapat melengkapi jawaban Soal Terbimbing 1.1 dan 1.2 yang masih terbuka. Jawaban yang hilang ditulis dengan "....". Kegiatan ini bertujuan agar kalian dapat memahami konsep persamaan lingkaran.

Latihan Soal Terbimbing 1.1

Jika suatu lingkaran memiliki titik pusat O dan diameter lingkaran $d = 4\sqrt{3}$. Tentukan persamaan lingkaran tersebut!



Alternatif Penyelesaian:

Pada soal telah diketahui bahwa lingkaran memiliki pusat O dan diameter d = ……… Untuk menentukan jari-jari lingkaran, terlebih dahulu harus membagi diameter menjadi dua bagian, sehingga $r = \frac{diameter}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} =$ ……… Selanjutnya, substitusikan jari-jari r yang sudah diperoleh pada persamaan lingkaran $x^2+y^2 = r^2$, sehingga lingkaran berpusat O dengan diameter $4\sqrt{3}$ memiliki persamaan ………………………………………

Latihan Soal Terbimbing 1.2

Adi diberikan tugas oleh guru matematika untuk menggambar sebuah lingkaran melalui titik T (6,–8). Selain itu, lingkaran tersebut memiliki pusat lingkaran pada titik O(0,0). Karena Adi memiliki rasa ingin tahu yang tinggi, Adi berencana untuk menentukan persamaan lingkaran tersebut. Dapatkah kalian membantu Adi untuk menentukan persamaan lingkaran tersebut?

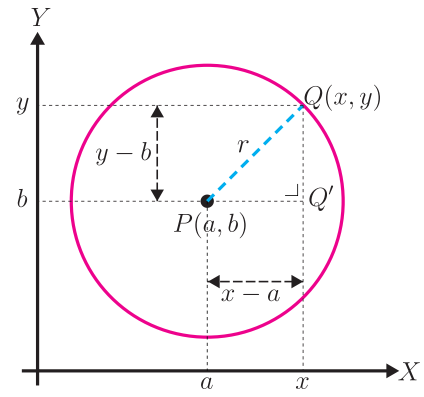
Alternatif Penyelesaian:

Diketahui bahwa pusat lingkaran berada ……… Untuk menentukan jari-jari lingkaran di titik O (0,0), kalian dapat menggunakan titik T (6,–8) dan Teorema *Pythagoras*, sehingga $r^2 = x^2+y^2 = 6^2 +$ (………)^2 = ……………………………………………………………

Jadi lingkaran tersebut memiliki persamaan ……………………………………………………………………

b. Persamaan Lingkaran dengan Pusat $P(a,b)$

Pada bagian sebelumnya, kalian telah mempelajari cara menentukan suatu persamaan lingkaran dengan pusat O(0,0) berjari-jari r. Pada sistem koordinat kartesius, sangat dimungkinkan menggambar suatu lingkaran dengan pusat lingkaran yang tidak berada pada titik O(0,0) atau pusat koordinat. Untuk menjawab hal ini, kalian perhatikan Gambar 1.10, lingkaran tersebut memiliki jari-jari r dan pusat lingkaran pada $P(a,b)$.



Gambar 1.10. Lingkaran dengan Pusat $P(a, b)$ dan Jari-Jari r.

Dengan menggunakan langkah yang sama seperti pada persamaan lingkaran dengan pusat $O(0,0)$, kalian perlu memperhatikan segitiga $\Delta PQ'Q$. Dengan menggunakan Teorema *Phytagoras*, maka diperoleh bahwa $PQ^2 = (Q'P)^2+(Q'Q)^2$. Telah diketahui bahwa PQ adalah jari-jari atau r, $Q'P$ adalah $(x-a)$, dan PQ adalah $(y-b)$, sehingga $\Delta PQ^2 = (Q'P)^2 + (Q'Q)^2$ dapat dinyatakan dengan

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$$

Persamaan ini merupakan persamaan lingkaran berpusat di $P(a,b)$ dengan jari-jari r dalam bentuk baku.

Contoh soal 1.2

Diketahui lingkaran berpusat $P(1,2)$ dan jari-jari $r = 6$. Tentukan persamaan lingkaran tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

Pada contoh soal telah diketahui bahwa lingkaran memiliki pusat $P(1,2)$, hal ini berarti bahwa nilai $a = 1$ dan nilai $b = 2$. Selain itu, diketahui pula jari-jari lingkaran adalah 6, sehingga persamaan lingkaran adalah $(x-1)^2+(y-2)^2 = 36$.

Contoh soal 1.3

Jika pusat suatu lingkaran berada pada titik $P(-5,2)$ dan diameter $d = 6$, tentukan persamaan lingkaran tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

Pada contoh soal telah diketahui bahwa lingkaran memiliki pusat $P(-5,2)$, hal ini berarti bahwa nilai $a = -5$, dan $b = 2$. Selain itu diameter lingkaran sebesar 6, sehingga jari-jarinya sebesar 3. Dengan menyubstitusikan ke persamaan lingkaran $r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$ diperoleh bahwa persamaan lingkaran melalui titik $P(-5,2)$ dengan jari-jari $r = 3$ adalah $(x+5)^2 + (y-2)^2 = 9$.

Ayo Mencoba

Pada bagian ini, kalian dapat melengkapi jawaban pada Latihan Soal Terbimbing 1.3 yang masih terbuka. Jawaban yang hilang adalah yang masih tertulis "....", kegiatan ini bertujuan agar kalian dapat memahami konsep persamaan lingkaran.

Latihan Soal Terbimbing 1.3

Jika suatu lingkaran berpusat di titik $P(2,-4)$ dan jari-jari lingkaran $r = 4\sqrt{3}$, tentukan persamaan lingkaran tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

Pada soal telah diketahui bahwa lingkaran memiliki pusat $P(2,-4)$, hal ini berarti bahwa koefisien a = ... dan b = ... Selain itu jari-jari lingkaran sebesar $4\sqrt{3}$. Dengan menyubstitusikan ke persamaan lingkaran $r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$ diperoleh bahwa persamaan lingkaran yang melalui $P(2,-4)$ dengan jari-jari $r = 4\sqrt{3}$ adalah ....

c. Bentuk Umum Persamaan Lingkaran

Kalian memiliki dua bentuk persamaan lingkaran, yaitu persamaan lingkaran pada pusat $O(0,0)$ dengan jari-jari r dan persamaan lingkaran berpusat di titik $P(a,b)$ dengan jari-jari r. Pada persamaan lingkaran $(x-1)^2+(y-2)^2 = 36$ dapat dijabarkan menjadi $(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) = 36$ atau dapat dinyatakan dengan
$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 31 = 0$.

Persamaan lingkaran $(x-1)^2+(y-2)^2 = 36$ identik dengan persamaan lingkaran $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 31 = 0$. Sesuai dengan Contoh Soal 1.2, persamaan lingkaran ini memiliki pusat $P(2,4)$ dan jari-jari $r = 6$.

Begitu pula pada persamaan lingkaran $(x+5)^2 + (y-2)^2 = 9$, identik dengan persamaan lingkaran $x^2 + y^2 + 10x - 4y + 20 = 0$. Kedua persamaan lingkaran ini memiliki pusat $P(-5,2)$ dan jari-jari $r = 3$.

Berdasarkan dua contoh penulisan persamaan lingkaran berbentuk
$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 31 = 0$ dan $x^2 + y^2 + 10x - 4y + 20 = 0$, dapat simpulkan bahwa persamaan lingkaran dapat dinyatakan dengan $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$, di mana A, B, dan C adalah bilangan real. Bentuk persamaan ini disebut dengan **bentuk umum persamaan lingkaran**.

Contoh soal 1.4

Tentukan persamaan umum lingkaran apabila lingkaran memiliki jari jari $r = 3$, dan berpusat pada $P(-1,2)$!

Alternatif Penyelesaian:

Persamaan lingkaran bentuk bakunya adalah $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$.

Apabila persamaan ini dijabarkan menjadi $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$.

Jadi, bentuk persamaan umum lingkaran dengan pusat $P(-1,2)$ dan jari-jari $r = 3$ adalah $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$.

Ayo Mencoba

Pada bagian ini, kalian dapat melengkapi jawaban pada Latihan Soal Terbimbing 1.4 yang masih terbuka. Jawaban yang hilang adalah yang masih tertulis "....", kegiatan ini bertujuan agar kalian dapat memahami konsep bentuk umum persamaan lingkaran.

Latihan Soal Terbimbing 1.4

Jika lingkaran memiliki jari-jari $r = 4\sqrt{3}$, dan berpusat di titik $P(2,-4)$. Tentukan persamaan lingkaran tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

Pada Latihan Soal Terbimbing 1.3 telah diperoleh bahwa bentuk baku persamaan lingkaran adalah .... Apabila persamaan ini dijabarkan maka diperoleh persamaan umum lingkaran ....

Ayo Mengomunikasikan

Dapatkah kalian menyatakan persamaan lingkaran $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ menjadi $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$, dengan A, B, dan C adalah bilangan Real.

Ayo Berdiskusi

Diskusikan bersama kelompok kalian untuk mencari hubungan antara persamaan $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ dengan pusat lingkaran $P(a,b)$ dan jari-jari r.

Contoh soal 1.5

Jika titik pusat suatu lingkaran adalah (2,3) dan memiliki diameter 8 cm. Tentukan persamaan lingkaran tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

Titik pusat (2,3), berarti $a = 2$, dan $b = 3$, sehingga $A = -2a = -4$ dan $B = -2b = -6$. Selain itu, lingkaran memiliki diameter 8 cm, hal ini berarti jari-jari lingkaran adalah 4 cm. Dengan menyubstitusikan $A = -4$, $B = -6$, dan $r = 4$ ke rumus $r = \sqrt{\frac{-A}{2}^2 + \frac{-B}{2}^2 - C}$, sehingga diperoleh C = –3. Akibatnya bentuk umum persamaan lingkaran maka diperoleh bahwa $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$.

Ayo Berpikir Kreatif

Dari Contoh Soal 1.5, dapatkah kalian mencari alternatif jawaban yang lain!

Contoh Soal 1.6

Sebuah lingkaran L memiliki persamaan $L \equiv x^2 + y^2 - 4x - 8y - 5 = 0$. Tentukanlah pusat dan jari-jari lingkaran L tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

Dari persamaan $L \equiv x^2 + y^2 - 4x - 8y - 5 = 0$, diperoleh bahwa $A = -4$, $B = -8$ dan $C = -5$. Misalkan pusat lingkaran L adalah $P(x,y)$, maka $x = -\frac{A}{2} = \frac{4}{2} = 2$ dan $y = -\frac{B}{2} = \frac{8}{2} = 4$, sehingga pusat lingkaran pada $P(2,4)$.

Misalkan jari-jari lingkaran L adalah r, maka untuk menentukan jari-jari r dapat menggunakan rumus $r = \sqrt{\left(\frac{-A}{2}\right)^2 + \left(\frac{-B}{2}\right)^2 - C} = \sqrt{(2)^2 + (4)^2 - 5} = \sqrt{15}$

Ayo Mencoba

Pada bagian ini, kalian dapat melengkapi jawaban dari Latihan Soal Terbimbing 1.11 yang masih terbuka. Jawaban yang hilang adalah yang masih tertulis "....", Kegiatan ini bertujuan agar kalian dapat memahami konsep persamaan lingkaran.

Latihan Soal Terbimbing 1.5

Sebuah lingkaran L memiliki persamaan $L \equiv x^2 + y^2 - 8x - 2y - 8 = 0$. Tentukanlah pusat dan jari-jari lingkaran L tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

Dari persamaan $L \equiv x^2 + y^2 - 8x - 2y - 8 = 0$, diperoleh bahwa A = ..., B = ... dan C = ... Misalkan pusat lingkaran L adalah P (x, y), maka x = ..., dan y = ..., sehingga pusat lingkaran pada ....

Misalkan jari-jari lingkaran L adalah r, maka untuk menentukan jari-jari r dapat menggunakan rumus $r = \sqrt{\left(\frac{-A}{2}\right)^2 + \left(\frac{-B}{2}\right)^2 - C}$ = ...

Ayo Berpikir Kreatif

Setelah mengetahui hubungan antara $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ dengan pusat lingkaran $P(a,b)$ dan jari-jari r. Selanjutnya, coba pikirkan untuk menyelesaikan permasalahan berikut:

1. Tunjukkan bahwa jika $a = 0$, maka pusat lingkaran berada pada sumbu Y!
2. Tunjukkan bahwa jika $b = 0$, maka pusat lingkaran berada pada sumbu X!
3. Tunjukkan bahwa jika $c = 0$, maka pusat lingkaran melalui pada pusat koordinat!
4. Tunjukkan bahwa jika $b = c = 0$, maka lingkaran berpusat pada sumbu X dan melalui titik pusat koordinat!
5. Tunjukkan bahwa jika $a = c = 0$, maka lingkaran berpusat pada sumbu Y dan melalui titik pusat koordinat!

Ayo Mencoba

Latihan Soal 1.1

1. Diketahui pusat lingkaran terletak pada titik pusat $O(0,0)$. Tentukan persamaan lingkaran tersebut, jika:
   a. jari-jari $r = \sqrt{15}$
   b. diameter $d = \frac{4}{5}\sqrt{5}$

2. Diketahui lingkaran berpusat pada titik pusat kartesius $O(0,0)$. Tentukan persamaan lingkaran tersebut yang melalui titik:
   a. $A(1,2)$.
   b. $E(1\frac{1}{2},5)$

3. Tentukan unsur lingkaran (pusat dan jari-jari), jika diketahui persamaan lingkarannya adalah sebagai berikut:
   a. $(x - 1)^2 + (x + 5)^2 = 9$
   b. $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 39 = 0$
   c. $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 17 = 0$
   d. $x^2 + y^2 = 15$

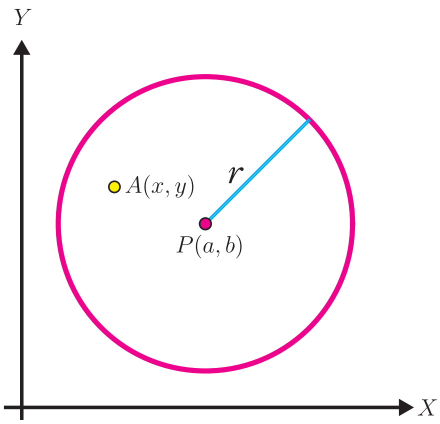
4. Sebuah persegi $ABCD$ secara berturut turut terletak pada titik $A(1,1)$, $B(4,1)$, $C(4,4)$, dan $D(1,4)$. Tentukanlah persamaan lingkaran yang menyinggung keempat sisi persegi $ABCD$ tersebut!

3. Kedudukan Suatu Titik Terhadap Lingkaran

Menentukan kedudukan titik $A(x,y)$ terhadap suatu lingkaran, baik untuk lingkaran dengan persamaan umum maupun persamaan baku, dilakukan dengan cara menyubstitusikan titik $A(x,y)$ ke persamaan lingkaran. Dengan kondisi ini, maka ada tiga kemungkinan kedudukan titik $A(x,y)$ terhadap lingkaran, yaitu: titik $A(x,y)$ di dalam lingkaran (Gambar 1.11), titik $A(x,y)$ pada lingkaran (Gambar 1.12), dan titik $A(x,y)$ di luar lingkaran (Gambar 1.13). Untuk menentukan kedudukan titik terhadap lingkaran dapat dilakukan dengan menentukan nilai kuasa titik. Nilai kuasa titik pada lingkaran merupakan sebuah penggambaran posisi dari sebuah titik pada lingkaran. Untuk menentukan nilai kuasa suatu titik dapat dilakukan dengan cara menyubstitusikan titik yang akan dicari nilai kuasanya ke persamaan lingkaran.

a. Titik $A(x,y)$ di Dalam Lingkaran

Misalkan persamaan lingkaran adalah $L \equiv (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, maka kedudukan titik $A(x,y)$ berada di dalam lingkaran apabila kuasa titik $A(x,y)$ bernilai kurang dari nol atau negatif ($K_{A(x,y)} < 0$). Agar kalian dapat memahami kedudukan titik di dalam lingkaran, perhatikan Contoh Soal 1.7 dan 1.8, Serta Latihan Soal Terbimbing 1.6.



Gambar 1.11. Kedudukan titik $A(x,y)$ di dalam lingkaran

Contoh Soal 1.7

Selidiki apakah titik $A(5,-2)$ berada di dalam lingkaran $L \equiv (x-6)^2 + (y+5)^2 = 16$!

Alternatif Penyelesaian:

Syarat bahwa suatu titik berada di dalam lingkaran adalah nilai kuasa titik bernilai negatif. Pada contoh soal diketahui bahwa titik $A(5,-2)$ dan persamaan lingkaran $L \equiv (x-6)^2 + (y+5)^2 = 16$, sehingga $K_{A(5,-2)} = (5-6)^2 + (-2+5)^2 - 16 = (-1)^2 + (\ 3\ )^2 - 16 = -6 < 0$.

Jadi, titik A(5,–2) berada di dalam lingkaran $L \equiv (x-6)^2 + (y+5)^2 = 16$, karena diperoleh nilai kuasa titik $K_{A(5,-2)} < 0$.

Ayo Mencoba

Pada bagian ini, kalian dapat melengkapi jawaban dari Latihan Soal Terbimbing 1.6 yang masih terbuka. Jawaban yang hilang adalah yang masih tertulis "....", kegiatan ini bertujuan agar kalian dapat memahami konsep kedudukan titik terhadap lingkaran.

Latihan Soal Terbimbing 1.6

Selidiki apakah titik $A(1,-2)$ berada di dalam lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = 25$!

Alternatif Penyelesaian:

....

Jadi,...,

karena nilai kuasa titik $K_{A(1,-2)}$

adalah ....

Petunjuk

Pada persamaan lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = r^2$, kalian dapat menganggap bahwa nilai a dan b pada persamaan lingkaran $L \equiv (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ adalah nol, sehingga syarat suatu titik berada di dalam lingkaran adalah nilai kuasa titik bernilai negatif.

Contoh Soal 1.8

Tentukan kedudukan titik $A(1,-2)$ terhadap lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 8x - 2y - 8 = 0$!

Alternatif Penyelesaian:

Untuk menentukan kedudukan titik $A(1,-2)$ terhadap lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 8x - 2y - 8 = 0$, langkah pertama yang dapat dilakukan adalah menentukan nilai kuasa titik $A(1,-2)$, yaitu

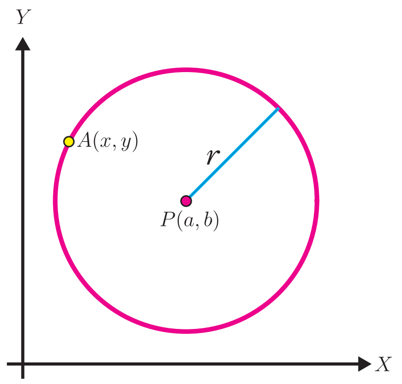
$K_{A(1,-2)} = (1)^2 + (-2)^2 - 8(1) - 2(-2) - 8 = -7.$

Karena nilai kuasa titik $A(1,-2)$ bernilai negatif atau $K_{A(1,-2)} < 0$ maka titik $A(1,-2)$ berada di dalam lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 8x - 2y - 8 = 0.$

b. Titik $A(x,y)$ pada Lingkaran

Misalkan persamaan lingkaran adalah $L \equiv (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, maka kedudukan titik $A(x,y)$ berada pada lingkaran apabila kuasa titik $A(x,y)$ bernilai nol $K_{A(x,y)} = 0$.

Agar kalian dapat memahami kedudukan titik pada lingkaran, perhatikan Contoh Soal 1.9, Latihan Soal Terbimbing 1.7 dan 1.8



Gambar 1.12. Kedudukan titik $A(x,y)$ pada lingkaran

Contoh Soal 1.9

Selidiki apakah titik $A(8,-5)$ berada pada lingkaran $L \equiv (x-6)^2 + (y+5)^2 = 4$!

Alternatif Penyelesaian:

Syarat bahwa suatu titik berada pada lingkaran adalah kuasa titik bernilai nol. Pada contoh soal diketahui bahwa titik $A(8,-5)$ dan persamaan lingkaran
$L \equiv (x-6)^2 + (y+5)^2 = 4$, sehingga $K_{A(8,-5)} = (8-6)^2 + (-5+5)^2 - 4 = (2)^2 + 0 - 4 = 0$.

Jadi, titik $A(8,-5)$ terletak pada lingkaran $L \equiv (x-6)^2 + (y+5)^2 = 4$, karena diperoleh nilai kuasa titik $K_{A(8,-5)} = 0$.

Ayo Mencoba

Pada bagian ini, kalian dapat melengkapi jawaban pada Latihan Soal Terbimbing 1.7 dan Latihan Soal Terbimbing 1.8 yang masih terbuka. Jawaban yang hilang adalah yang masih tertulis "....", kegiatan ini bertujuan agar kalian dapat memahami konsep kedudukan titik terhadap lingkaran.

Latihan Soal Terbimbing 1.7

Selidiki apakah titik $A(3,-3)$ berada pada terhadap lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = 18$!

Alternatif Penyelesaian:

....

Jadi titik $A(3,-3)$ ...., terhadap lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = 18$ karena ....

Latihan Soal Terbimbing 1.8

Tentukan kedudukan titik $A(7,5)$ terhadap lingkaran

$L \equiv x^2 + y^2 - 8x - 2y - 8 = 0$!

Petunjuk

Kalian dapat mengamati dan mencermati penjelasan pada Latihan Soal Terbimbing 1.6 dan Contoh Soal 1.8

Alternatif Penyelesaian:

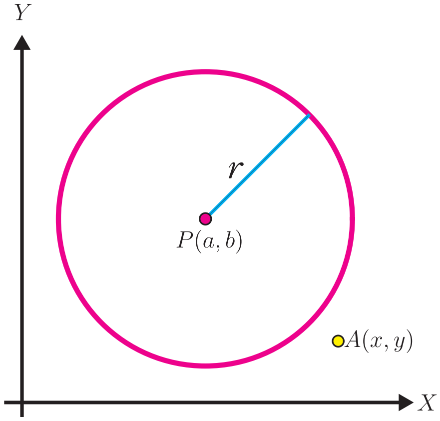
Nilai kuasa titik $A(7,5)$, yaitu

....

....

c. Titik $A(x,y)$ di Luar Lingkaran

Misalkan sebuah lingkaran memiliki persamaan $L \equiv (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, maka kedudukan titik $A(x,y)$ berada di luar lingkaran apabila diperoleh kuasa titik bernilai lebih dari nol atau positif ($K_{A(x,\,y)} > 0$). Agar kalian dapat memahami kedudukan titik pada lingkaran, perhatikan Contoh Soal 1.10, dan 1.11, serta Latihan Soal Terbimbing 1.9



Gambar 1.13. Kedudukan titik $A(x,y)$ di luar lingkaran

Contoh Soal 1.10

Selidiki titik $A(4,3)$ apakah berada di luar lingkaran $L \equiv (x-6)^2 + (y+5)^2 = 16$!

Alternatif Penyelesaian:

Syarat bahwa suatu titik berada di luar lingkaran adalah kuasa titik bernilai lebih dari nol (positif). Pada contoh soal diketahui bahwa titik $A(4,3)$ dan persamaan lingkaran $L \equiv (x-6)^2 + (y+5)^2 = 16$, sehingga

$$K_{A(4,3)} = (4-6)^2 + (3+5)^2 = (-2)^2 + 8^2 - 16 = 52 > 0\,.$$

Jadi, titik A(4,3) terletak di luar lingkaran $L \equiv (x-6)^2 + (y+5)^2 = 16$, karena diperoleh nilai kuasa titik $K_{A(4,3)} > 0$.

Contoh Soal 1.11

Selidiki apakah titik $A(5,-3)$ berada di luar lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = 18$. Apabila berada di luar lingkaran berapa jarak titik A terhadap pusat lingkaran!

Alternatif Penyelesaian:

Syarat bahwa suatu titik berada di luar lingkaran adalah kuasa titik bernilai positif. Pada contoh soal diketahui bahwa titik $A(5,-3)$ dan persamaan lingkaran

$$L \equiv x^2 + y^2 = 18, \text{ sehingga } K_{A(5,-3)} = (5)^2 + (-3)^2 = 34.$$

Jadi, titik $A(5,-3)$ berada di luar lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = 18$, karena diperoleh nilai kuasa titik $K_{A(5,-3)} > 0$.

Selanjutnya, perlu menentukan jarak titik A terhadap lingkaran.
Lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = 18$ memiliki pusat $O(0,0)$, sehingga jarak titik A terhadap titik pusat lingkaran adalah

$$OT = \sqrt{(5-0)^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{5^2 + (-3)^2} = \sqrt{34}$$

Ayo Mencoba

Pada bagian ini, kalian dapat melengkapi jawaban pada Latihan Soal Terbimbing 1.9 yang masih terbuka. Jawaban yang hilang adalah yang masih tertulis "....", kegiatan ini bertujuan agar kalian dapat memahami konsep kedudukan titik terhadap lingkaran.

Latihan Soal Terbimbing 1.9

Tentukan kedudukan titik $A(8,3)$ terhadap lingkaran

$L \equiv x^2 + y^2 - 8x - 2y + 8 = 0$!

Alternatif Penyelesaian:

....

Petunjuk

Untuk menentukan jarak dua titik, kalian dapat melihat kembali materi pada vektor bahwa untuk menentukan jarak dua titik A dan B dapat menggunakan

$$AB = \sqrt{\left(x_b - x_a\right)^2 + \left(y_b - y_a\right)^2}$$

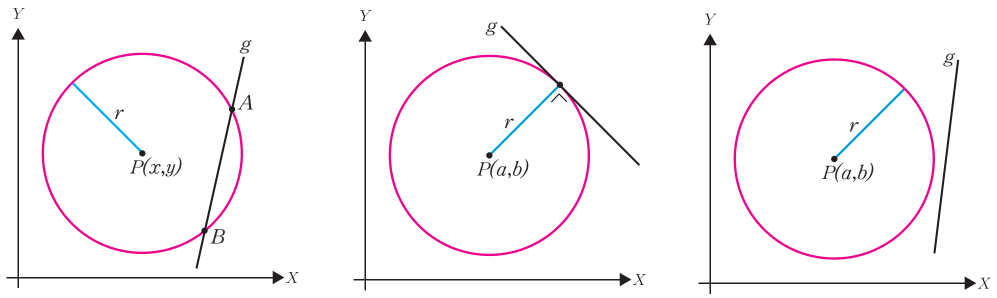
Ayo Mencoba

Latihan Soal 1.2

1. Diketahui titik $A(2,3)$, $B(2,8)$, $C(8,5)$, dan $D(5,3)$, tentukan kedudukan titik tersebut terhadap lingkaran:
   a. $L \equiv x^2 + y^2 - 8x - 2y + 8 = 0$
   b. $L \equiv (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 9$
2. Tentukan batasan nilai a apabila diketahui:
   a. titik $P(a,1)$ terletak di dalam lingkaran $L \equiv (x-1)^2 + (y+3)^2 = 9$.
   b. titik $P(a,1)$ terletak di luar lingkaran $L \equiv (x+3)^2 + (y-3)^2 = 9$.
3. Tentukan nilai t yang memenuhi kedudukan titik $A(2t,-t)$ yang terletak pada lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 + 2x + 8y - 2 = 0$!
4. Diketahui titik $B(b,-1)$ dan lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 + 20x - 12y - 32 = 0$. Tentukan batasan nilai b yang memenuhi titik $B(b,-1)$ berada di luar lingkaran!

4. Kedudukan Garis Terhadap Lingkaran

Sama seperti pada kedudukan titik pada lingkaran, terdapat tiga kedudukan garis terhadap lingkaran. Ketiga kedudukan tersebut adalah (a) garis memotong lingkaran, (b) garis menyinggung lingkaran, dan (c) garis tidak memotong dan tidak menyinggung lingkaran. Secara geometri, ketiga kedudukan garis tersebut dapat dilihat pada Gambar 1.14. Secara aljabar, untuk melihat kedudukan garis g terhadap lingkaran dapat dilakukan dengan cara menyubstitusikan persamaan garis g ke persamaan garis lingkaran.



(a) Kedudukan garis g memotong lingkaran

(b) Kedudukan garis g menyinggung lingkaran

(c) Kedudukan garis g tidak memotong dan tidak

Gambar 1.14. Kedudukan garis g terhadap lingkaran

Untuk lebih jelasnya kalian dapat memahami alurnya sebagai berikut:

Misalkan diketahui persamaan garis g adalah $y = mx + k$ dan persamaan lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$. Substitusikan persamaan garis $y = mx+k$ ke persamaan lingkaran L, sehingga diperoleh

$$x^2 + (mx + k)^2 + Ax + B(mx + k) + C = 0.$$

$$x^2 + m^2x^2 + 2mxk + k^2 + Ax + Bmx + Bk + C = 0.$$

$$(1 + m^2)x^2 + (2mk + A + Bm)x + k^2 + Bk + C = 0.$$

Dari persamaan ini diperoleh persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, dengan koefsien

$$a = (1+m^2),\; b = (2mk + A + Bm), \text{ dan } c = k^2 + Bk + C$$

Ayo Mengingat Kembali

Masih ingatkah kalian tentang diskriminan saat mempelajari fungsi kuadrat pada jenjang sebelumnya? Nilai diskriminan pada fungsi kuadrat $(1 + m^2)x^2 + (2mk + A + Bm)x + k^2 + Bk + C = 0$ yang dapat menentukan kedudukan garis g terhadap lingkaran L.

Ayo Berpikir Kritis

Dapatkah kalian memberikan alasan mengapa:

1. Jika nilai Diskriminan pada fungsi kuadrat
   $(1+m^2)x^2 + (2mk+A+Bm)x + k^2 + Bk + C = 0$ bernilai positif ($D > 0$), maka kedudukan garis g memotong lingkaran L.
2. Jika nilai Diskriminan pada fungsi kuadrat
   $(1+m^2)x^2 + (2mk+A+Bm)x + k^2 + Bk + C = 0$ bernilai nol ($D = 0$), maka garis g bersinggungan dengan lingkaran L.
3. Jika nilai diskriminan pada fungsi kuadrat
   $(1+m^2)x^2 + (2mk+A+Bm)x + k^2 + Bk + C = 0$ bernilai negatif ($D < 0$), maka garis g tidak memotong dan tidak menyinggung lingkaran L

Ayo Berpikir Kreatif

Kasus yang ada pada buku ini adalah kasus untuk persamaan garis g dengan lingkaran dengan bentuk umum. Dapatkah kalian mengkreasikan kasus persamaan lingkaran berbentuk $L \equiv (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ dan persamaan lingkaran yang berbentuk $L \equiv x^2 + y^2 = r^2$?

Latihan Soal Terbimbing 1.10

Selidikilah setiap kedudukan garis berikut terhadap lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 6x + 8y + 21 = 0$

a. garis $g{:}y = 3x - 2$.
b. garis $h{:}y = 2x$.
c. garis $l{:}y + 3x - 2 = 0$.

Alternatif Penyelesaian:

Untuk kasus a. garis $g{:}y = 3x - 2$.

Akan diselidiki garis $g : y = 3x - 2$ terhadap lingkaran L.

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0.$$
$$x^2 + (3x - 2)^2 - 6x - 8(3x - 2) + 21 = 0.$$
$$x^2 + 9x^2 - 12x + 4 - 6x - 24x + 16 + 21 = 0.$$
$$10x^2 - 42x + 41 = 0.$$

Dari persamaan fungsi ini diperoleh bahwa $D = b^2 - 4ac = (-42)^2 - 4(10)(41) = 124$. Karena diperoleh nilai diskriminan $D > 0$, maka garis $g{:}y = 3x - 2$ memotong lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 6x + 8y + 21 = 0$.

Ayo Mencoba

Pada bagian ini, kalian dapat melengkapi jawaban yang masih terbuka untuk kasus 2 dan kasus 3. Jawaban yang hilang adalah yang masih tertulis "....", sehingga kalian perlu untuk menuliskan jawabannya.

Untuk kasus b. garis $h{:}y = 2x$.

Kalian selidiki terlebih dahulu letak garis $h{:}y = 2x$ terhadap lingkaran L.

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0.$$

$$x^2 + (............)^2 - 6x - 8(............) + 21 = 0.$$

....

Dari persamaan fungsi ini diperoleh bahwa $D = b^2 - 4ac =$ ....

Karena diperoleh nilai diskriminan ...., maka ....

Untuk kasus c. garis $l{:}y + 3x - 2 = 0$.

Akan diselidiki kedudukan garis $l{:}y + 3x - 2 = 0$ terhadap lingkaran L, maka $l{:}y = 2 - 3x = 0$ disubstitusikan ke persamaan lingkaran $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$.

....

Contoh Soal 1.12

Tentukan titik potong lingkaran $L \equiv (x+1)^2 + (y-3)^2 = 9$ dengan garis $y = 3$!

Alternatif Penyelesaian:

Untuk menentukan titik potong pada lingkaran L dengan garis $y = 3$ dapat dilakukan dengan cara melakukan menyubstitusi $y = 3$ ke persamaan lingkaran $(x+1)^2 + (y-3)^2 - 9 = 0$, sehingga

$$(x+1)^2 + (3-3)^2 - 9 = 0.$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0.$$

Dengan menggunakan pemfaktoran pada materi persamaan kuadrat, diperoleh bahwa $(x+ 4)(x-2) = 0$, sehingga diperoleh bahwa $x_1 = -4$ dan $x_2 = 2$.

Jadi, garis $y = 3$ memotong lingkaran $L \equiv (x+1)^2 + (y-3)^2 = 9$ pada titik $(-4,3)$ dan $(2,3)$.

Latihan Soal Terbimbing 1.11

Selidiki apakah garis $h{:}x - y - 1 = 0$ memotong lingkaran $L \equiv x^2+y^2+4x-y+1 = 0$. Jika memotong, tentukan titik potong lingkaran tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

Untuk menyelidiki apakah garis h dan lingkaran L berpotongan, perlu ditunjukkan bahwa persamaan kuadrat yang diperoleh dengan menyubstitusikan persamaan garis h ke persamaan lingkaran L memiliki nilai diskriminan bernilai positif.

$$x^2 + y^2 + 4x - y + 1 = 0$$

$$x^2+(x - 1)^2 + 4x -(x - 1) + 1 = 0.$$

$$2x^2 + 3x + 1 = 0.$$

Dari persamaan fungsi ini diperoleh bahwa $D = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4(2)(1) = 1$. Karena diperoleh nilai diskriminan $D > 0$, maka garis $h{:}x - y - 1 = 0$ memotong lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 + 4x - y + 1 = 0$.

Ayo Mencoba

Pada bagian ini, kalian dapat melengkapi jawaban yang masih terbuka. Jawaban yang hilang adalah yang masih tertulis "....", sehingga kalian perlu untuk menuliskan jawabannya.

Petunjuk

Kalian dapat mengingat materi tentang menentukan akar persamaan kuadrat di tingkat sebelumnya. Salah satu cara untuk menemukan akar persamaan kuadrat adalah melalui faktorisasi

Dengan menggunakan faktorisasi persamaan kudrat $2x^2 + 3x + 1 = 0$, diperoleh bahwa

....

Substitusikan nilai x yang telah diperoleh pada persamaan lingkaran L.

Untuk kasus x_1=................, diperoleh bahwa

$L \equiv x^2 + y^2 + 4x - y + 1 =$ ....

sehingga $y_1 =$ ....

Untuk kasus $x_2 =$ ...., diperoleh bahwa

$L \equiv x^2 + y^2 + 4x - y + 1 =$..

sehingga $y_2 =$..

Dari proses ini kalian telah memperoleh dua titik yaitu .... dan ....

Ayo Mencoba

Latihan Soal 1.3

1. Diketahui persamaan lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 + 4x - y + 1 = 0$. Tentukan kedudukan garis di bawah ini dengan lingkaran L

   a. $g: x + y = 2$. b. $k: x = 0$.

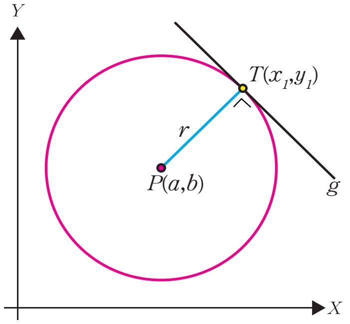
2. Diketahui garis $y = kx + 1$ dan lingkaran $L \equiv (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$. Tentukan syarat k agar garis y tidak memotong lingkaran L!

3. Tunjukkan bahwa persamaan garis $g: px + qy - r^2$ yang memotong lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - r^2 = 0$ di dua titik berlainan, apabila titik $N(p,q)$ berada di luar lingkaran!

4. Tentukan nilai p, agar garis $y = -x + p$ terletak di luar lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$!

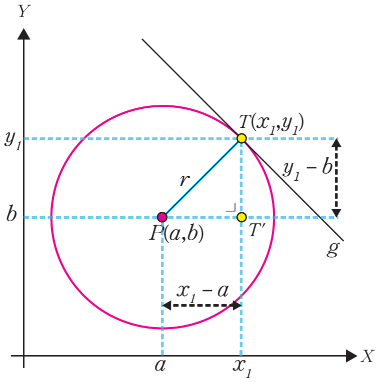
5. Persamaan Garis Singgung Lingkaran

Menentukan persamaan garis singgung lingkaran merupakan pengembangan dari permasalahan yang membahas tentang kedudukan garis yang menyinggung lingkaran. Pada Gambar 1.15, garis yang menyinggung lingkaran tersebut disebut dengan garis singgung lingkaran (garis g), sedangkan titik yang terbentuk antara garis singgung dengan lingkaran disebut dengan titik singgung atau $T(x_1, y_1)$.



Gambar 1.15. Kedudukan garis singgung g pada lingkaran dan titik singgung $T(x_1,y_1)$

Secara umum, ada tiga (3) cara yang dapat digunakan untuk menentukan persamaan garis singgung lingkaran. Ketiga cara tersebut adalah (a) titik singgung telah ditentukan, (b) kemiringan garis singgung lingkaran telah ditentukan, dan (c) sebuah titik di luar lingkaran yang telah ditentukan. Agar kalian dapat memahami materi persamaan garis singgung, perhatikanlah penjelasan tentang menentukan persamaan garis singgung lingkaran di bawah ini.



Gambar 1.16. Garis singgung g pada lingkaran dan titik singgung $T(x_1,y_1)$

a. Titik Singgung Telah Ditentukan

Dari Gambar 1.16, misalkan titik $T(x_1,y_1)$ adalah titik singgung pada lingkaran $L \equiv (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$. Proses untuk menentukan persamaan garis singgung g pada lingkaran L dapat dilakukan dengan cara:

1. Perhatikan segitiga $PT'T$, sehingga kemiringannya $m_{PT} = \frac{y_1 - b}{x_1 - a}$;
2. karena garis PT dan garis g tegak lurus maka $m_{PT} m_g = -1$, sehingga
   $\left(\frac{y_1 - b}{x_1 - a}\right) m_g = -1$ atau $m_g = -\left(\frac{x_1 - a}{y_1 - b}\right)$;
3. persamaan garis g sendiri dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan $(y-y_1) = m_g(x-x_1)$, sehingga

$$(y-y_1) = -\left(\frac{x_1 - a}{y_1 - b}\right)(x-x_1)$$

$$(y-y_1)(y_1-b) = -(x_1-a)(x-x_1)$$

$$yy_1 - yb - y_1^2 + by_1 = -xx_1 + x_1^2 + ax - ax_1$$

$$x_1^2 + y_1^2 = yy_1 - yb + by_1 + xx_1 + ax_1 - ax$$

$$x_1^2 - ax_1 - ax_1 + y_1^2 - by_1 - by_1 = (yy_1 - yb) + (xx_1 - ax) - ax_1 - by_1$$

$$x_1^2 - 2ax_1 + a^2 + y_1^2 - 2by_1 + b^2 = yy_1 - yb + xx_1 - ax - ax_1 - by_1 + a^2 + b^2$$

$$(x_1-a)^2 + (y_1-b)^2 = xx_1 - ax + yy_1 - by_1 - by - ax_1 + a^2 + b^2$$

$$r^2 = (x_1-a)x + y(y_1 - b) - (x_1 + a)a + (b-y_1)b.$$

$$r^2 = [(x_1-a)x - (x_1+a)\,a] + [(b-y_1)b + y\,(y_1-b)].$$

$$r^2 = (x-a)(x_1-a) + (y-b)(y_1-b).$$

Persamaan terakhir inilah yang disebut dengan persamaan garis singgung g pada lingkaran L di titik $T(x_1,y_1)$.

Perhatikanlah perubahan dari persamaan lingkaran $L \equiv (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ menjadi persamaan garis singgung lingkaran di titik $T(x_1,y_1)$ yaitu $g{:}(x-a)(x_1-a) + (y-b)(y_1-b) = r^2$. Perubahan tersebut di antaranya dapat dilihat dari $(x-a)^2$ menjadi $(x-a)(x_1-a)$ dan $(y-b)^2$ menjadi $(y-b)(y_1-b)$. Perubahan ini sering disebut dengan prinsip bagi adil.

Ayo Berdiskusi

Kalian telah mempelajari proses untuk menentukan garis singgung lingkaran g jika diketahui titik singgung dan lingkaran $L \equiv (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$. Diskusikanlah dengan kelompok kalian apabila persamaan lingkarannya adalah $L \equiv x^2 + y^2 = r^2$ dan $L \equiv x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$!

Contoh Soal 1.13

Diketahui persamaan lingkaran $L \equiv (x+2)^2 + (y-3)^2 = 16$. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran tersebut yang melalui titik A(−1,5)!

Alternatif Penyelesaian:

Langkah pertama yang harus kalian perhatikan adalah bentuk persamaan lingkarannya. Pada contoh persamaan lingkaran berbentuk $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$. Dengan menggunakan prinsip bagi adil, diperoleh bahwa persamaan garis singgung lingkaran yang melaui titik $A(-1,5)$ adalah

$$(x-a)(x_1-a) + (y-b)(y_1-b) = r^2$$

$$(x+2)(-1+2) + (y-3)(5-3) = 16.$$

$$x + 2y - 20 = 0.$$

Jadi, persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv (x+2)^2 + (y-3)^2 = 16$ yang melalui titik $A(-1,5)$ adalah $x + 2y - 20 = 0$.

Ayo Mencoba

Pada bagian ini, kalian dapat melengkapi jawaban pada Latihan Soal Terbimbing 1.12 dan 1.13 yang masih terbuka. Jawaban yang hilang adalah yang masih tertulis "....". Kegiatan ini bertujuan agar kalian dapat memahami konsep persamaan garis singgung lingkaran.

Latihan Soal Terbimbing 1.12

Tentukan persamaan garis singgung lingkaran yang melalui titik $Q(1,-3)$, jika persamaan lingkarannya adalah

1. $L \equiv x^2 + y^2 = 16$
2. $L \equiv x^2 + y^2 - 8x - 2y + 12 = 0.$

Petunjuk

Untuk menyelesaikan contoh soal ini, kalian harus dapat menyimpulkan hasil diskusi pada materi persamaan garis singgung lingkaran yang diketahui titik singgungnya. Hampir sama dengan Contoh Soal 1.13, langkah pertama yang harus diperhatikan adalah bentuk persamaan lingkarannya.

Alternatif Penyelesaian:

Untuk bagian 1, dengan menggunakan prinsip bagi adil, diperoleh bahwa persamaan garis singgung lingkaran yang melalui titik $Q(1,-3)$ adalah sebagai berikut ....

Jadi, persamaan garis singgung $L \equiv x^2 + y^2 = 16$ yang melalui titik $Q(1,-3)$ adalah

....

Untuk bagian b, dengan menggunakan prinsip bagi adil, diperoleh bahwa persamaan garis singgung lingkaran yang melalui titik $Q(1,-3)$ adalah sebagai berikut.

....

Jadi, persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 8x - 2y + 12 = 0$ yang melalui titik $Q(1,-3)$ adalah ....

Latihan Soal Terbimbing 1.13

Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv (x+1)^2 + (y-3)^2 = 9$ yang melalui titik potong antara lingkaran L dengan garis $y = 3$! (UN 2012)

Alternatif Penyelesaian:

Langkah pertama yang harus kalian lakukan adalah menentukan titik potong garis $y = 3$ terhadap lingkaran L. Adapun titik potong tersebut adalah

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 = 9.$$

$$(x+1) = \pm 3.$$

sehingga $x_1=2$ dan $x_2= -4$.

Untuk menentukan nilai y, dapat dilakukan dengan cara menyubstitusikan nilai x yang diperoleh ke persamaan lingkaran $L \equiv (x+1)^2 + (y-3)^2 = 9$.

Untuk $x_1=2$, maka $(x+1)^2 + (y-3)^2 - 9 = (2+1)^2 + (y-3)^2 - 9$, sehinggga $y =3$. Maka titik pertama diperoleh pada koordinat (2,3). Untuk menentukan persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv (x+1)^2 + (y-3)^2 = 9$ melalui titik (2,3), kalian dapat menggunakan prinsip bagi adil sebagai berikut

....

....

Untuk $x_2= -4$,

....

....

Petunjuk

Kalian dapat menyelesaikan dengan menggunakan cara yang sama untuk $x_1 = 2$.

b. Kemiringan Garis Singgung m Lingkaran Telah Ditentukan

Misalkan persamaan garis singgung lingkaran yang akan dicari adalah $y = mx+n$ dan persamaan lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = r^2$. Selanjutnya, kalian dapat menyubstitusikan persamaan garis $y = mx+n$ ke $L \equiv x^2 + y^2 = r^2$, sehingga

$$x^2 + y^2 = r^2.$$
$$x^2 + (mx + n)^2 = r^2.$$
$$x^2 + m^2x^2 + 2mnx + n^2 - r^2 = 0.$$
$$(x^2 + m^2)\, x^2 + 2mnx + (n^2 - r^2) = 0.$$

Persamaan ini merupakan bentuk persamaan kuadrat dengan koefisien

$a = (x^2+m^2)$, $b = 2mn$, dan $c = (n^2 - r^2)$.

Ayo Mengingat Kembali

Masih ingatkah kalian tentang diskriminan saat mempelajari persamaan kuadrat pada jenjang sebelumnya?
Selain itu, masih ingatkah kalian bahwa jika nilai $D = 0$ maka persamaan kuadrat memiliki satu akar real.

$$D = b^2 - 4ac = (2mn)^2 - 4(x^2+m^2)(n^2-r^2) = 4(m^2r^2 - n^2 + r^2).$$

Dengan menggunakan syarat bahwa garis menyinggung sebuah lingkaran jika nilai diskriminan persamaan kuadrat adalah nol, sehingga

$$0 = 4(m^2r^2 - n^2 + r) = m^2r^2 - n^2 + r^2.$$
$$n^2 = r^2\,(m^2+1).$$
$$n = \pm\sqrt{r^2(m^2+1)} = \pm r\sqrt{m^2+1}\ .$$

Dengan menyubstitusikan nilai n ke persamaan garis $y = mx+n$, diperoleh bahwa persamaan garis singgung pada lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = r^2$ dengan kemiringan m, yaitu $y = mx \pm r\sqrt{m^2+1}$.

Ayo Berdiskusi

Setelah kalian memahami proses menentukan garis singgung lingkaran g jika diketahui kemiringan m dan lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = r^2$, diskusikan dengan kelompok kalian masalah berikut ini:

1. Persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ di titik $T(x_1,y_1)$.
2. Persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ di titik $T(x_1,y_1)$.

Contoh Soal 1.14

Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = 4$, jika

a. mempunyai kemiringan 2.
b. membentuk sudut 45° terhadap sumbu X positif.
c. sejajar garis $l{:}2x - 3y + 4 = 0$.

Alternatif Penyelesaian:

Bagian a

Dari penjelasan sebelumnya, nilai n dapat dicari sebagai berikut.

$n = \pm\sqrt{r^2(m^2+1)} = \pm\sqrt{(2)^2(2^2+1)} = \pm 2\sqrt{5}$.

Maka diperoleh bahwa $n_1 = 2\sqrt{5}$ dan $n_2 = -2\sqrt{5}$.

Jadi, persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = 4$ dengan kemiringan 2 adalah $y = 2x + 2\sqrt{5}$ dan $y = 2x - 2\sqrt{5}$.

Bagian b

Diketahui bahwa garis singgung membentuk sudut 45° terhadap sumbu X positif. Misalkan persamaan garis singgung lingkaran yang akan kalian cari adalah $y = mx + n$, di mana m merupakan kemiringan garis yang dapat diperoleh dari *tangen* sudut 45° yaitu 1, sehingga

$$y = mx \pm r\sqrt{(m^2+1)} = (1)x \pm \sqrt{\left((1)^2+1\right)} = x \pm 2\sqrt{2}.$$

Jadi, persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = 4$ yang membentuk sudut 45° terhadap sumbu X posititf adalah

$y = x + 2\sqrt{2}$ dan $y = x - 2\sqrt{2}$

Bagian c

Misalkan persamaan garis singgung lingkaran yang kalian cari adalah $y = mx + n$. Persamaan garis singgung ini sejajar dengan garis $l{:}2x - 3y + 4 = 0$, maka kemiringan garis singgung lingkaran dengan kemiringan garis l sama yaitu $\frac{2}{3}$, sehingga

$n = \pm r\sqrt{(m^2+1)} = \pm 2\sqrt{\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2+1\right)} = \pm 2\sqrt{\frac{13}{9}} = \pm\frac{2}{3}\sqrt{13}$.

Diperoleh nilai $n_1 = \frac{2}{3}\sqrt{13}$ dan $n_2 = -\frac{2}{3}\sqrt{13}$.

Jadi, persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = 4$ yang sejajar dengan garis $l{:}2x - 3y + 4 = 0$ adalah $y = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}\sqrt{13}$ dan $y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}\sqrt{13}$.

Contoh Soal 1.15

Diketahui suatu lingkaran $L \equiv (x+2)^2 + (y-1)^2 = 4$, tentukan persamaan garis singgung lingkaran L yang tegak lurus dengan garis $l{:}-3x - y - 1 = 0$!

Alternatif Penyelesaian:

Pada contoh soal ini, kemiringan garis $l{:}-3x - y - 1 = 0$ adalah $m_l = -3$. Misalkan kemiringan garis singgung yang akan dicari adalah m. Karena garis l tegak lurus dengan garis singgung yang dicari maka $m.m_l = -1$, sehingga $m = \frac{1}{3}$. Selanjutnya, dapat digunakan $y - b = m(x-a) \pm r\sqrt{m^2+1}$ untuk menyelesaikan masalah ini dengan menyubstitusikan nilai $a = -2$, $b = 1$, dan $m = \frac{1}{3}$

$$y-1 = \tfrac{1}{3}(x+2) \pm 2\sqrt{\left(\tfrac{1}{3}\right)^2 + 1}$$

$$y-1 = \tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3} \pm 2\sqrt{\tfrac{10}{9}}$$

atau dapat dinyatakan dengan $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3} \pm \frac{2}{3}\sqrt{10}$.

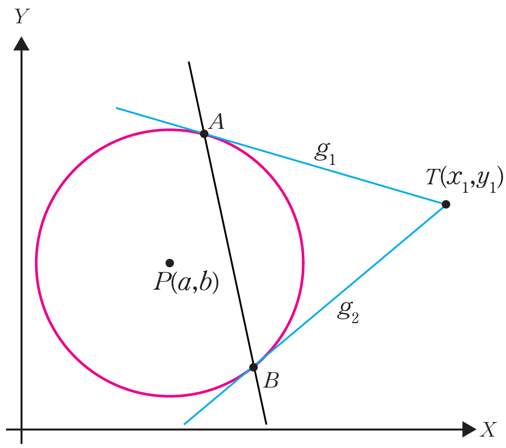
Sehingga persamaan garis singgung $L \equiv (x+2)^2 + (y-1)^2 = 4$ yang tegak lurus terhadap garis $l{:}-3x - y - 1 = 0$ adalah

$$y_1 = \tfrac{1}{3}x + \tfrac{5}{3} + \tfrac{2}{3}\sqrt{10} \text{ dan } y_2 = \tfrac{1}{3}x + \tfrac{5}{3} - \tfrac{2}{3}\sqrt{10}.$$

c. Sebuah Titik di Luar Lingkaran yang Telah Ditentukan

Untuk menentukan persamaan garis singgung lingkaran yang diketahui titik pada luar lingkaran diantaranya dengan pertolongan garis polar atau garis kutub. Perhatikan Gambar 1.17, dari titik $T(x_1,y_1)$ dapat dibuat dua buah garis yang menyinggung lingkaran.

Misalkan kedua garis singgung tersebut adalah g_1 dan g_2. Misalkan garis g_1 menyinggung lingkaran di titik A, dan dari garis g_2 menyinggung lingkaran di titik B. Garis yang menghubungkan antara titik A dan titik B disebut dengan garis kutub atau garis polar, sedangkan titik A dan titik B disebut dengan titik polar atau titik kutub. Penentuan garis polar atau garis kutub pada lingkaran dapat lihat pada Tabel 1.1.



Gambar 1.17. Lingkaran, Garis Singgung Lingkaran dan Titik Singgung.

Tabel 1.1. Persamaan Lingkaran dan Persamaan Garis Polar

Persamaan Lingkaran	Persamaan Garis Polar
$x^2 + y^2 = r^2$	$xx_1 + yy_1 = r^2$
$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$	$(x-a)(x_1-a) + (y-b)(y_1-b) = r^2$
$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$	$xx_1 + yy_1 + \frac{A}{2}(x+x_1) + \frac{B}{2}(y+y_1) + C = 0$

Untuk memahami materi yang berkaitan dengan penentuan persamaan garis singgung lingkaran yang diketahui titik di luar garis, kalian bisa memperhatikan contoh-contoh soal berikut ini.

Contoh Soal 1.16

Tentukan persamaan garis singgung suatu lingkaran $L \equiv (x+2)^2 + (y-1)^2 = 16$ yang melalui titik $A(2,3)$!

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan salah satu titik polar pada lingkaran adalah $P(x_1,y_1)$, maka persamaan garis polarnya adalah $(x-a)(x_1-a) + (y-b)(y_1-b) = r^2$. Karena titik $A(2,3)$ melalui garis polarnya, maka persamaan garis polarnya adalah

$$(x + 2)(2 + 2) + (y - 1)(3 - 1) = 16.$$
$$(x + 2)4 + (y - 1)2 = 16.$$
$$4x + 8 + 2y - 2 - 16 = 0$$
$$4x + 2y - 10 = 0, \text{ dapat pula dinyatakan dengan } y = 5 - 2x.$$

Substitusikan persamaan $y = 5 - 2x$ ke persamaan lingkaran, maka diperoleh:

$$(x + 2)^2 + (5 - 2x - 1)^2 = 16.$$
$$(x + 2)^2 + (4 - 2x)^2 = 16.$$
$$x^2 + 4x + 4 + 16 - 16x + 4x^2 - 16 = 0.$$
$$5x^2 - 12x + 4 = 0.$$
$$(5x - 2)(x - 2) = 0, \text{ sehingga diperoleh } x_1 = \tfrac{2}{5} \text{ atau } x_2 = 2.$$

Untuk $x = \frac{2}{5}$

Substitusikan nilai $x = \frac{2}{5}$ ke persamaan $y = 2 - 5x$, sehingga diperoleh $y = \frac{21}{5}$.

Kalian telah memperoleh salah satu titik polar yaitu $(\frac{2}{5},\frac{21}{5})$. Persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv (x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 16$ yang melalui $(\frac{2}{5},\frac{21}{5})$ adalah $(x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) = r^2$ dengan $(a, b) = (\frac{2}{5},\frac{21}{5})$ dan $r^2 = 16$.

$$(x - 3)(\tfrac{2}{5} - 3) + (y - 1)(\tfrac{21}{5} - 1) = 16.$$
$$(x - 3)(-\tfrac{12}{5}) + (y - 1)(\tfrac{16}{5}) = 16.$$
$$(x - 3)(-12) + (y - 1)(16) = 80.$$
$$12x + 16y - 72 = 0$$
$$3x + 4y - 18 = 0\ .$$

Ayo Mencoba

Dengan cara yang sama untuk $x = \frac{2}{5}$, cobalah cari persamaan garis singgung lingkaran untuk $x = 2$.

Untuk $x = 2$

....

Ayo Berpikir Kreatif

Berdasarkan contoh soal 1.16, dapatkah kalian mencari alternatif jawaban yang lain?

Ayo Mencoba

Latihan Soal 1.4

1. Diketahui persamaan lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 3x + 4y - 10 = 0$. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran L yang melalui titik:
   a. $A(2,2)$.
   b. $D(5,-2)$.

2. Diketahui persamaan lingkaran $L \equiv (x - \frac{1}{2})^2 + (y + 1\frac{1}{2})^2 - 16 = 0$. Tentukan persamaan garis singgung suatu lingkaran L, jika
   a. kemiringannya 2.
   b. garis singgung membentuk sudut 60^{O} terhadap sumbu Y positif.

3. Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di titik $P(2,-3)$ dan menyinggung garis $l: 3x - 4y + 7 = 0$!

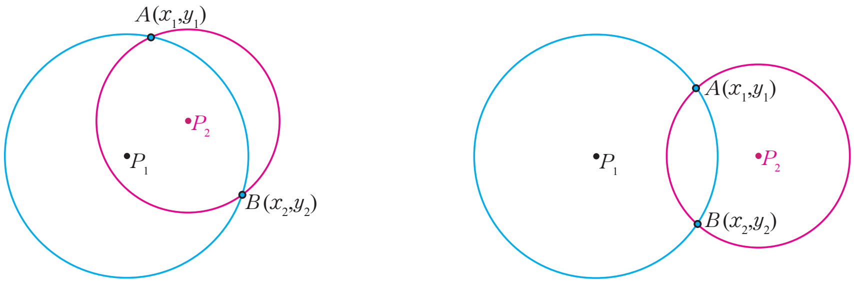
4. Diketahui titik $A(6,-8)$ dan lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = 100$. Tunjukkan bahwa titik A terletak pada lingkaran L, kemudian tentukan pula persamaan garis singgungnya!

5. Tentukan nilai q agar lingkaran $L \equiv (x - 2q)^2 + (y + 5)^2 - 4q^2 = 13$ menyinggung sumbu X. Kemudian carilah titik singgung antara lingkaran L dan sumbu X!

6. Pengayaan: Kedudukan Dua Lingkaran

Kedudukan antara dua lingkaran menunjukkan posisi antara lingkaran pertama (L_1) dan lingkaran kedua (L_2). Kedudukan tersebut dapat berupa berpotongan, bersinggungan, dan saling lepas (tidak memiliki titik potong).

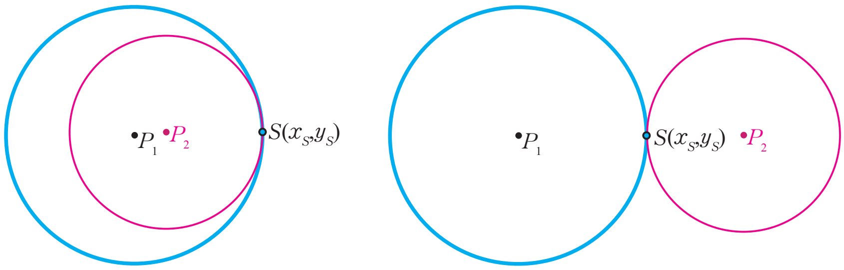
Kedudukan dua lingkaran saling berpotongan dapat digambarkan pada Gambar 1.18. Pada kedudukan ini, kemungkinan yang terjadi yaitu berpotongan di dalam (Gambar 1.18 a) dan berpotongan di luar (Gambar 1.18 b). Kedudukan dua lingkaran berpotongan di dalam terjadi jika pusat lingkaran pertama P_1 berada pada lingkaran kedua L_2, atau sebaliknya. Kedudukan dua lingkaran berpotongan di luar terjadi, jika pusat lingkaran pertama P_1 tidak berada pada lingkaran kedua L_2, atau sebaliknya.



(a) Berpotogan di dalam (b) Berpotogan di luar

Gambar 1.18. Kedudukan Dua Lingkaran yang Saling Berpotongan.

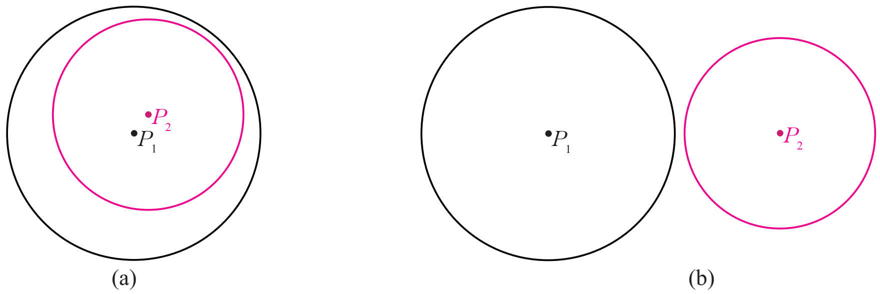
Kedudukan dua lingkaran saling bersinggungan dapat dilihat pada Gambar 1.19. Pada kedudukan ini, kemungkinan kedudukan yang terjadi terjadi yaitu bersinggungan di dalam (Gambar 1.19 a) dan bersinggungan di luar (Gambar 1.19 b). Kedudukan dua lingkaran bersinggungan di dalam, jika (1) lingkaran pertama L_1 dan lingkaran kedua L_2 berpotongan pada satu titik, dan (2) pusat lingkaran pertama P_1 berada pada lingkaran kedua L_2, atau sebaliknya. Kedudukan dua lingkaran bersinggungan di luar, jika (1) lingkaran pertama L_1 dan lingkaran kedua L_2 berpotongan pada satu titik, dan (2) pusat lingkaran pertama P_1 tidak berada pada lingkaran kedua L_2, atau sebaliknya.



(a) (b)

Gambar 1.19. Kedudukan Dua Lingkaran yang Saling Bersinggungan.

Kedudukan dua lingkaran tidak bersinggunggan maupun berpotongan dapat dilihat seperti yang digambarkan pada Gambar 1.20. Pada kedudukan ini, kemungkinan kedudukan yang terjadi terjadi yaitu tidak bersinggungan maupun berpotongan (Gambar 1.20 a) dan dua lingkaran saling lepas (Gambar 1.20 b). Pada kedudukan dua lingkaran yang tidak berpotongan maupun bersinggungan, kedudukan lingkaran pertama L_1 berada di dalam lingkaran kedua L_1, atau sebaliknya. Kedudukan dua lingkaran saling lepas, dapat terjadi jika kedudukan lingkaran pertama L_1 tidak berada pada lingkaran kedua L_2.



Gambar 1.20. Kedudukan Dua Lingkaran yang Tidak Saling Bersinggungan.

Selain ketiga kedudukan tersebut, masih ada kedudukan dua lingkaran lainnya yaitu dua lingkaran yang saling konsentris dan dua lingkaran berhimpit. Kedudukan dua lingkaran dikatakan konsentris jika dua lingkaran L_1 dan L_2 berada pada satu titik pusat lingkaran, walaupun kedua lingkaran ini memiliki jari-jari yang berbeda. Namun, jika kondisi konsentris ini, dua lingkaran memiliki jari-jari yang sama, maka kedudukan dua lingkaran dinamakan dengan berhimpit.

Contoh Soal 1.17

Tunjukkan bahwa kedudukan dua lingkaran $L_1 \equiv x^2 + y^2 = 9$ dan $L_2 \equiv x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 = 0$ saling berpotongan! Jika saling berpotongan, tentukan titik potong kedua lingkaran tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

Untuk menunjukkan bahwa dua lingkaran L_1 dan L_2 saling berpotongan, kalian dapat melihatnya dari nilai diskriminan. Apabila diperoleh nilai diskriminan $D > 0$ maka kedudukan dua lingkaran tersebut saling berpotongan di dua titik. Untuk memperoleh nilai diskriminan, perlu dihilangkan (dieliminasi) persamaan lingkaran satu dengan menggunakan persamaan lingkaran yang lainnya, sehingga

$$L_1 - L_2 \equiv (x^2 + y^2 - 9) - (x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9) = 6x + 6y - 18 = x + y - 3.$$

Dari sini, kalian telah memperoleh persamaan baru yaitu $x + y - 3 = 0$ atau dapat dinyatakan dengan $x = 3 - y$.

Substitusikan $x = 3 - y$ ke salah satu persamaan lingkaran (misalkan ke persamaan lingkaran L_1), sehingga

$$x^2 + y^2 - 9 = 0.$$
$$(3 - y)^2 + y^2 - 9 = 0.$$
$$2y^2 - 6y = 0.$$

Kalian telah memperoleh persamaan kuadrat dengan variabel y. Selanjutnya, ditunjukkan bahwa nilai diskriminan D bernilai positif ($D > 0$) agar kedua lingkaran saling berpotongan.

$$D = b^2 - 4ac = (6)^2 - 4(2)(0) = 36 > 0.$$

Karena diperoleh nilai diskriminan sebesar 36, maka kedudukan dua lingkaran tersebut saling berpotongan.

Selanjutnya, menentukan titik potong kedua lingkaran. Telah diperoleh persamaan kuadrat $2y^2 - 6y = 0$ atau dapat dinyatakan dengan $y(2y - 6) = 0$, sehingga diperoleh bahwa $y_1 = 0$ dan $y_2 = -3$.

- Untuk $y_1 = 0$ diperoleh bahwa $x^2 + y^2 - 9 = x^2 - 9$ atau $x = 3$ sehingga titik potongnya (3,0).
- Untuk $y_2 = -3$ diperoleh bahwa $x^2 + y^2 - 9 = x^2 - 0$ atau $x = 0$ sehingga titik potongnya (0,–3).

Ayo Mengingat Kembali

Diskusikan bersama kelompok kalian, mengapa untuk menunjukkan kedudukan dua lingkaran yang bersinggungan cukup dilihat nilai Diskriminan sama dengan nol ($D = 0$).

Selain itu, pada kedudukan dua lingkaran yang tidak berpotongan kalian cukup menunjukkan nilai diskriman bernilai negatif ($D < 0$).

Ayo Mencoba

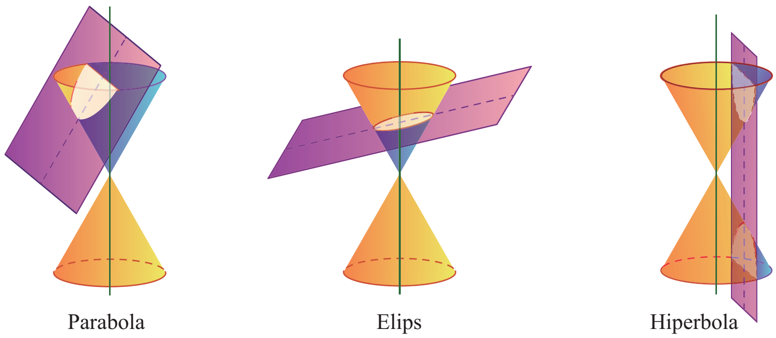
Latihan Soal 1.5

1. Tentukan titik potong dua lingkaran berikut!.
   a. $L_1 \equiv x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ dan $L_2 \equiv x^2 + y^2 - 2x - 8y + 9 = 0$.
   b. $L_1 \equiv x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ dan $L_2 \equiv x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$.

2. Tunjukkan bahwa dua lingkaran berikut saling bersinggungan. Kemudian tentukan titik singgungnya!
   a. $L_1 \equiv x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ dan $L_2 \equiv x^2 + y^2 - 8x - 12y + 43 = 0$.
   b. $L_1 \equiv x^2 + y^2 + 6x - 4y - 23 = 0$ dan $L_2 \equiv x^2 + y^2 - 12x + 20y + 55 = 0$.
3. Tunjukkan bahwa kedudukan dua lingkaran berikut ini tidak berpotongan dan tidak bersinggungan!
   a. $L_1 \equiv x^2 + y^2 + 4y + 3 = 0$ dan $L_2 \equiv x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$.
   b. $L_1 \equiv x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0$ dan $L_2 \equiv x^2 + y^2 + 2x + 8y - 8 = 0$.

B. Irisan Kerucut: Parabola, Elips, Hiperbola dan Parabola

Tahukah kalian, bagian irisan kerucut banyak diterapkan dalam kehidupan sehari-hari? Misalnya, sifat parabola dari sinar pantul yang sejajar sumbu simetri yang melewati titik fokus digunakan untuk kompor tenaga surya, reflektor lampu, radar, lampu hias, dan sebagainya. Jika dilihat dari orbit matahari pada bidang yang sama dengan planet, maka orbitnya berbentuk elips dengan matahari sebagai salah satu titik fokusnya. Seperti namanya, irisan kerucut dapat diperoleh dari sepasang kerucut yang puncaknya berimpitan dan dipotong oleh sebuah bidang datar dengan sudut tertentu. Terdapat beberapa kemungkinan bidang yang diperoleh dari irisan tersebut, yaitu elips, parabola, dan parabola (lihat Gambar 1.21)



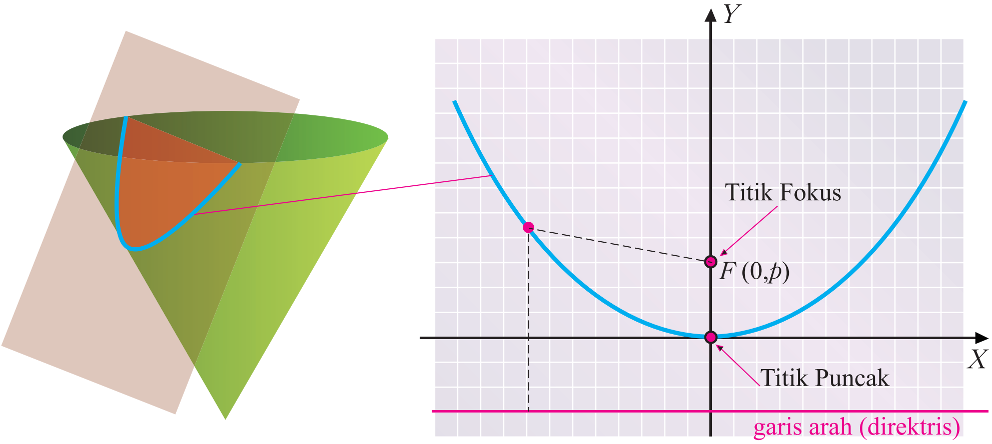
Gambar 1.21. Gambar Bidang Dari Irisan Kerucut.

1. Parabola

Pada buku matematika SMA/SMK Kelas X, telah dibahas tentang fungsi kuadrat $y = f(x) = ax^2 + x^2 + c$ dengan kurva berbentuk $\cap$ atau berbentuk $\cup$ yang simetris. Bentuk inilah yang dikenal dengan istilah parabola, walaupun ada bentuk kurva lainnya yang disebut dengan parabola juga, yaitu kurva berbentuk $\subset$ dan berbentuk $\supset$. Pada bagian ini, kalian akan dimempelajari kurva berbentuk parabola secara umum, mencakup pengamatan tentang geometri analitiknya dari kurva tersebut, seperti yang terlihat pada Gambar 1.22.

a. Definisi Parabola

Parabola merupakan tempat kedudukan titik-titik yang jaraknya terhadap titik tertentu selalu sama. Titik tertentu pada parabola disebut dengan titik fokus (f), sedangkan garis tertentu dinyatakan dengan garis direktris (d). Pada Gambar 1.22 bahwa titik fokusnya adalah titik $F(0,p)$ dengan persamaan garis direktriksnya adalah $y = -p$.



Gambar 1.22. Irisan Kerucut Berbentuk Parabola

Ayo Mengingat Kembali

Masih ingatkah kalian, unsur-unsur yang pada grafik fungsi parabola. Untuk mengingat kembali, kalian bisa membuka buku SMA/SMK kelas X pada bab Fungsi Kuadrat.

b. Persamaan Parabola

Untuk menentukan persamaan suatu parabola, kalian harus mengetahui unsur-unsur untuk menentukan persamaan parabola. Unsur tersebut di antaranya adalah sumbu simetri, puncak, fokus, dan persamaan garis direktris.

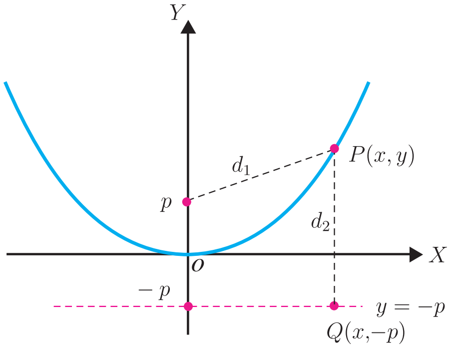
Ayo Mengingat Kembali

Beberapa konsep dasar yang dibutuhkan untuk menentukan persamaan parabola di antaranya adalah (1) Jarak di antara dua titik, (2) jarak titik terhadap garis, dan (3) titik dari dua titik yang diketahui.

1) Persamaan parabola berpuncak $O(0,0)$ dan sumbu simetris adalah sumbu Y $(x = 0)$

Perhatikan Gambar 1.23, misalkan d_1 adalah jarak titik $P(x,y)$ terhadap titik fokus $(0,p)$, dan d_2 adalah jarak titik $P(x,y)$ terhadap garis direktriks $y = -p$, maka diperoleh bahwa

$$d_1 = \sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} \text{ dan}$$
$$d_2 = \sqrt{(x-x)^2 + (y-p)^2} \text{ atau}$$
$$d_2 = p + y.$$



Gambar 1.23. Kurva Parabola Dengan Sumbu Simetris adalah Sumbu Y

Definisi parabola adalah jarak suatu titik ke titik fokus dan ke garis direktriks sama, maka $d_1 = d_2$, jadi $\sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = p + y$

Kuadratkan persamaan ini, sehingga diperoleh bahwa

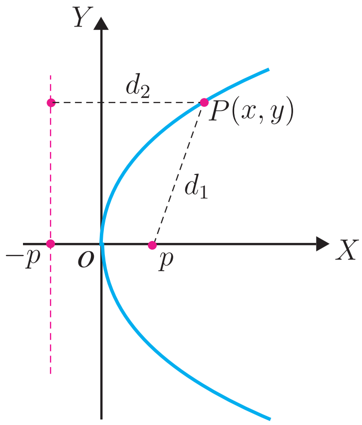
$$(x - 0)^2 + (y - p)^2 = (p + y)^2$$
$$x^2 + y^2 - 2yp + p^2 = p^2 + 2py + y^2.$$
$$x^2 = p^2 - p^2 + 2py + 2yp\ y^2 - y^2$$

Jadi, persamaan parabolanya adalah $\boldsymbol{x^2 = 4py}$.

Bentuk persamaan $x^2 = 4py$ merupakan persamaan parabola dengan titik fokus di $(0, p)$ dan persamaan direktriksnya adalah $y = -p$ atau $y = p$. Titik puncak parabola tersebut merupakan titik tengah antara fokus dan titik potong sumbu simetri dengan garis direktriksnya, dengan kata lain Puncak $P(x,y) = \left(0, \frac{p+(-p)}{2}\right) = (0,0)$.

2) Persamaan parabola berpuncak $O(0,0)$ dan sumbu simetris adalah sumbu X $(y = 0)$

Perhatikanlah Gambar 1.24, persamaan sumbu simetri adalah $y = 0$, puncak di O $(0,0)$, fokus pada $(p,0)$ dan persamaan garis direktriksnya adalah $l \equiv x = -p$ atau $l \equiv x + p = 0$.



Gambar 1.24. Grafik Parabola Dengan Puncak O (0,0) dan Sumbu Simetrisnya adalah Sumbu X

Berdasarkan definisi parabola maka $d_1 = d_2$, sehingga

$$\left(\sqrt{(x-p)^2+(y-0)^2}\right) = x+p$$

$$\left(\sqrt{(x-p)^2+(y-0)^2}\right)^2 = (x+p)^2.$$

$$(x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2$$

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2.$$

Jadi, persamaan parabolanya adalah $\boldsymbol{y^2 = 4px}$.

3) Persamaan parabola dengan puncak $H(m,n)$

Kasus pertama

Perhatikanlah Gambar 1.25, terlihat bahwa puncak berada di $H(m,n)$, sumbu simetri adalah $x = m$, persamaan direktriksnya adalah $y = n - p$, fokus pada $F(m,n+p)$.

Berdasarkan definisi parabola maka $d_1 = d_2$, sehingga

$$\sqrt{(x-m)^2+\left(y-(n+p)\right)^2} = \frac{\left|0.x+(n-p)-y\right|}{\sqrt{0^2+(-1)^2}}$$

$$\left(\sqrt{(x-m)^2+\left(y-(n+p)\right)^2}\right)^2 = \left(\left(y-n\right)-p\right)^2$$

$$(x-m)^2 + (y-(n+p))^2 = ((y-n)-y)^2 .$$

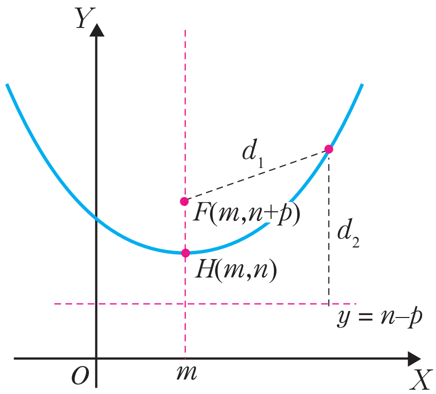
$$(x-m)^2 = ((y-n)-y)^2 - ((y-n)-y)^2.$$

$$(x-m)^2 = ((y-n)^2 - 2(y-n)y + y^2)$$

$$-((y-n)^2 - 2(y-n)y + y^2).$$

Jadi, persamaan parabolanya adalah

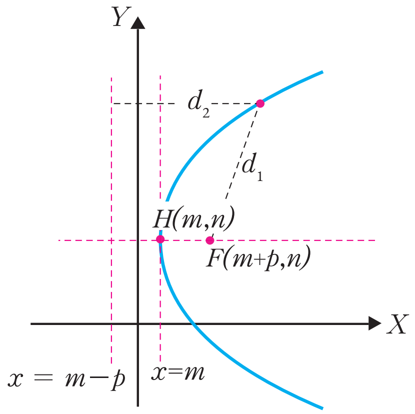
$\boldsymbol{(x-m)^2 = 4p(y-n)}$.



Gambar 1.25. Grafik Parabola Dengan Puncak $H(m,n)$ dan Sumbu Simetris Sejajar Sumbu X

Kasus kedua

Perhatikanlah Gambar 1.26, dapat dilihat bahwa puncak berada di $H(m,n)$, sumbu simetri adalah $y = n$, persamaan direktriksnya adalah $x = m-p$, fokus pada $F(m+p,n)$.



Gambar 1.26. Grafik Parabola Dengan Puncak $H(m,n)$ dan Sumbu Simetris Sejajar Sumbu Y

Berdasarkan definisi parabola maka $d_1 = d_2$, sehingga

$$\sqrt{\left(x-(m+p)\right)^2+\left(y-n\right)^2} = \frac{\left|x+(m-p)\right|}{\sqrt{1^2+0^2}}$$

$$\left(\sqrt{\left(x-(m+p)\right)^2+\left(y-n\right)^2}\right)^2 = \left(x-(m-p)\right)^2$$

$$(x-(m+p))^2+(y-n)^2 = (x-m+p)^2$$

$$(y-n)^2 = ((x-m)+p)^2-((x-m)-p)^2.$$

$$(y-n)^2 = ((x-m)^2+2(x-m)p+p^2)-((x-m)^2-2(x-m)p+p^2).$$

Jadi persamaan parabolanya adalah $\boldsymbol{(y-n)^2 = 4(x-m)p}$.

Contoh Soal 1.18

Jika sebuah parabola memiliki titik puncak (2,3) dan titik fokus (1,3), tentukan persamaan parabola tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

Karena parabola ini memiliki titik puncak (2,3) dan titik fokus (1,3), maka persamaan merupakan parabola terbuka ke kiri. Titik puncak suatu parabola berada pada (2,3) sehingga $m = 2$ dan $n = 3$.

Titik fokus suatu parabola berada pada (1,3) maka $p = 2-1$ karena p merupakan jarak titik puncak ke fokus atau jarak dari puncak ke direktriks.

Dengan menyubstitusikan ke persamaan $(y-n)^2 = -4(x-m)p$, sehingga

$$(y-3)^2 = -4(x-2)1.$$

$$y^2-6y+9 = -4x+8.$$

$$y^2-6y-4x+1 = 0.$$

Contoh Soal 1.19

Perhatikan parabola dengan persamaan $y^2 - 6y - 20x - 31 = 0$. Tentukan pusat parabola dan puncak parabola!

Alternatif Penyelesaian:

Persamaan parabola $y^2 - 6y - 20x - 31 = 0$ menunjukan bahwa parabola ini memiliki sumbu simetri yang sejajar dengan sumbu X, karena persaaan ini dapat dinyatakan persamaan kuadrat dengan variabel y, yaitu $x = \frac{1}{20}y^2 - \frac{6}{20}y - \frac{31}{20} = 0$ dan grafik fungsi ini simetris terhadap garis $y = n$, dengan n adalah bilangan real.

Dengan mengingat bahwa $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, maka koefisien 6 pada $6y$ dimodifikasi menjadi "2.3.y", sehingga

$$y^2 - 6y - 20x - 31 = 0.$$

$$y^2 - (2.3)y + 9 - 9 - 20x - 31 = 0.$$

$$(y^2 - (2.3)y + 9) - 20x - 40 = 0.$$

$$(y - 3)^2 + 20(x - 2) = 0.$$

$$(y - 3)^2 + 4(x - 2)5 = 0$$

$$(y - 3)^2 = 4(-5)(x - 2).$$

Dari persamaan ini diperoleh bahwa pusat parabola berada pada titik (2,3), dan $p = -5$. Dari pusat parabola pada titik (2,3), diperoleh bahwa $n = 3$ dan $m+p = 2$. Dengan menyubstitusikan $p = -5$ ke persamaan $m+p = 2$ diperoleh bahwa $m = 7$.

Misalnya titik puncak parabola $y^2 - 6y - 20x - 31 = 0$ adalah $H(m,n)$ maka titik puncaknya adalah $H(7,3)$.

Jadi, persamaan $y^2 - 6y - 20x - 31 = 0$ memiliki titik pusat (2,3) dan titik puncak (7,3).

Contoh Soal 1.20

Diketahui parabola dengan sumbu simetri $y = 1$, jarak fokus dengan direktriks adalah 2. Jika titik puncak parabola berada pada garis $x - y = 1$ dan parabola terbuka ke kanan. Tentukan persamaan parabola tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

Karena parabola sejajar sumbu X dan terbuka ke kanan maka persamaan parabola nantinya berbentuk $(y-n)^2 = 4(x-m)p$. Pada contoh soal diketahui bahwa jarak fokus ke direktriks adalah 2, sehingga $2p = 2$ atau $p = 1$

Sumbu simetri $y = 1$, sehingga $n = 1$

Karena puncak parabola melalui $x - y = 1$, dengan menyubstitusikan $y = 1$ diperoleh bahwa $x = 2$, sehingga $m = 2$.

Jadi, persamaan parabolanya adalah $(y-1)^2 = 4(x-2)1$ atau $(y-1)^2 = 4(x-2)$.

Ayo Mencoba

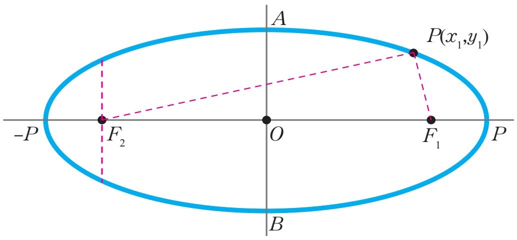
Latihan soal 1.6

1. Tentukan persamaan parabola jika diketahui unsur-unsur parabola sebagai berikut.
   a. Puncak parabola pada titik (2,3), sumbu simetri parabola sejajar sumbu Y, dan parabola melalui titik (3,4).
   b. Persamaan direktriks parabola adalah $y = 1$, dan titik fokus parabola adalah $F(-3,7)$.
   c. Titik fokus parabola di (3,0), dan persamaan direktriks parabola adalah $x = -3$.
2. Tentukan unsur-unsur parabola seperti titik fokus, persamaan garis direktriks, dan puncak dari persamaan parabola berikut
   a. $x^2 = -24y$.
   b. $y^2 - 16x = 0$.
3. Sebuah reflektor lampu sorot berbentuk parabola memiliki diameter 120 cm. Lampu sorot ditempatkan sebagai fokus reflektor parabola tersebut. Tentukan kedalaman reflektor lampu sorot berbentuk parabola tersebut jika penempatan lampu sorot adalah 12 cm di atas titik pusat! Tentukan persamaan yang digunakan oleh teknisi dalam membuat reflektor lampu sorot tersebut!
4. Sebuah roket air diluncurkan ke udara dan lintasan roket tersebut membentuk parabola. Diperkirakan ketinggian maksimum roket air mencapai 10 meter dan jarak lokasi pendaratan roket air adalah 3 meter dari lokasi awal peluncuran. Tentukan persamaan parabola untuk pemodelan lintasan roket air tersebut dan ketinggian roket air ketika jarak horizontal roket air 1 meter dari lokasi peluncuran!

2. Elips

a. Definisi

Elips adalah kumpulan titik titik dalam bidang datar yang jumlah jarak kedua titik tertentu selalu sama, kedua titik tersebut disebut dengan titik fokus. Seperti pada Gambar 1.27 bahwa fokus ditunjukkan dengan titik F_1 dan F_2.

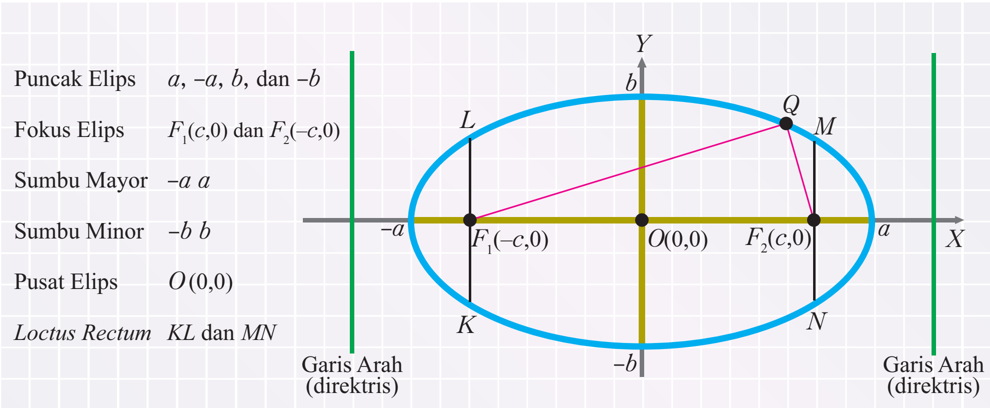


Gambar 1.27. Gambar Elips.

b. Unsur-Unsur Elips

Berdasarkan Gambar 1.28, dapat diketahui unsur-unsur dari pembentukkan elips di antaranya sebagai berikut:

1. Pada elips terdapat dua sumbu yaitu sumbu utama (pada Gambar 1.28 adalah garis terletak pada sumbu X) dan sumbu sekawan (pada Gambar 1.28 adalah garis terletak sumbu Y);
2. Titik fokus elips pada Gambar 1.28 Titik $F_1(-c,0)$ dan $F_2(c,0)$;
3. Titik pusat elips adalah titik tengah kedua fokus elips, pada Gambar 1.28 adalah titik tengah antara $F_1(-c,0)$ dan $F_2(c,0)$ yaitu titik O (0,0);
4. Sumbu fokal adalah garis lurus yang menghubungkan kedua titik fokus elips, pada Gambar 1.28 yaitu garis $F_1 F_2$;
5. Titik puncak elips adalah dua titik pada perpanjangan sumbu fokus yang membentuk elips, pada Gambar 1.28 yaitu a, $-a$, b, dan $-b$;
6. Sumbu mayor merupakan sebuah sumbu yang melalui dua titik fokus dan lebih panjang dari sumbu minor, pada Gambar 1.28 adalah sumbu $-aa$;
7. Sumbu minor, yaitu garis lurus melalui pusat elips dan tegak lurus sumbu mayor. Sumbu minor lebih pendek jika dibandingkan dengan sumbu mayor, pada Gambar 1.28 merupakan ruas garis $-bb$;
8. *Latus rectum* atau *focal chord* adalah garis yang melalui salah satu titik fokus dan tegak lurus dengan sumbu mayor. Pada Gambar 1.28 adalah garis KL dan MN. Panjang *latus rectum* adalah $|KL| = |MN| = \frac{2b^2}{a}$, dengan koordinat titik $K(-c, -\frac{b^2}{a})$, $L(-c, \frac{b^2}{a})$, $M(c, \frac{b^2}{a})$, dan $N(c, -\frac{b^2}{a})$.

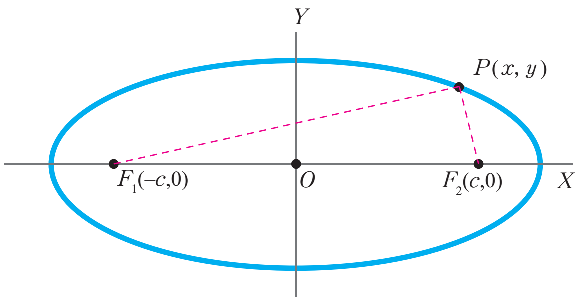


Gambar 1.28. Gambar Unsur-Unsur Elips.

c. Persamaan Elips

1) Persamaan Elips dengan Pusat $O(0,0)$ dan Sumbu Mayornya adalah Sumbu X

Perhatikan Gambar 1.29, ditunjukkan bahwa fokus $F_1(-c,0)$, fokus $F_2(c,0)$, sumbu mayor terletak pada sumbu X, pusat elips terletak pada $O(0,0)$, dan jumlah jarak titik sembarang $P(x,y)$ terhadap kedua fokus sama dengan $2a$.



Gambar 1.29. Elips dengan Pusat $O(0,0)$ dan Sumbu Mayor adalah Sumbu X

Karena titik $P(x, y)$ terletak pada elips, sehingga diperoleh

$$F_1P + F_2P = 2a.$$

$$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

dengan mengkuadratkan persamaan tersebut, diperoleh

$$(x-c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2$$

$$x^2-2cx+c^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+2cx+c^2$$

$$4cx+4a^2=4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$cx+a^2=a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

kuadratkan kembali persamaan ini, maka diperoleh

$$c^2x^2+2a^2cx+a^4=a^2((x+c)^2+y^2).$$

$$c^2x^2+2a^2cx+a^4=a^2x^2+2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2.$$

$$c^2x^2+a^4=a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2.$$

$$a^2(a^2-c^2)=x^2(a^2-c^2)+a^2y^2.$$

karena (a^2-c^2) nilainya selalu tetap, misalkan $(a^2-c^2) = b^2$ untuk $a > b$, maka $a^2b^2 = x^2b^2 + a^2y^2$ atau dapat pula ditulis dengan $x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

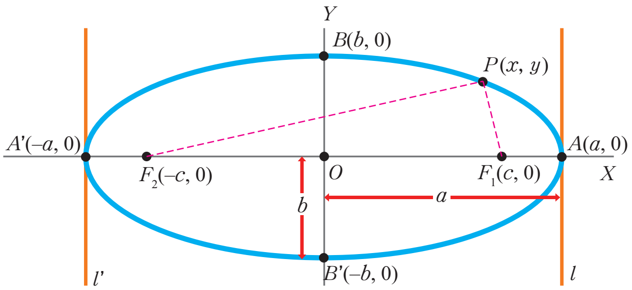
Selanjutnya, persamaan tersebut kalian bagi dengan a^2b^2, sehingga menjadi

$$\frac{x^2b^2}{a^2b^2} + \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Persamaan elips berbentuk $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ atau $x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ disebut dengan **Persamaan Elips Bentuk Baku**

Untuk memahami unsur-unsur tersebut pada elips, kalian dapat melihat pada Gambar 1.30



Gambar 1.30. Unsur Elips dengan Pusat $O(0,0)$ dan Sumbu Mayor adalah Sumbu X

Adapun unsur elips dengan persamaan $x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ atau $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ diantaranya adalah sebagai berikut:

1. Fokus elips adalah $(\pm c,0)$ dengan $c^2 = a^2 - b^2$;
2. Pusat elips terletak pada titik pusat koordinat yaitu $O(0,0)$;
3. Puncak elips adalah titik $(\pm a,0)$;
4. Panjang sumbu mayor adalah $2a$, sedangkan panjang sumbu minor adalah $2b$;
5. Eksentrisitas (e) adalah suatu ukuran untuk menentukan seberapa melengkungnya sebuah elips;

   Untuk menentukan eksentrisitas dapat dilakukan dengan cara $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$
6. Persamaan garis direktriksnya adalah

   $l \equiv x = \frac{a^2}{c}$ dan $l' \equiv x = -\frac{a^2}{c}$;
7. Panjang *latus rectum* $L = \frac{2b^2}{a}$.

Ayo Berdiskusi

Setelah kalian memahami proses menentukan persamaan elips dengan pusat $O(0,0)$ dan sumbu mayor terletak pada sumbu X, dapatkah kelompok kalian menunjukkan persamaan elips untuk (1) pusat elips berada di titik $O(0,0)$ dan sumbu mayor terletak pada sumbu Y; (2) pusat elips di titik $P(a,b)$ dan sumbu mayornya sejajar sumbu X; dan (3) pusat elips di titik $P(a,b)$ dan sumbu mayornya sejajar sumbu Y?

2) Persamaan Elips dengan Pusat $O(0,0)$ dan Sumbu Mayornya adalah Sumbu Y

Hasil diskusi kalian pada bagian sebelumnya, diharapkan memperoleh persamaan elips untuk pusat $O(0,0)$ dan sumbu mayornya sumbu Y adalah

$$b^2y^2 + a^2x^2 = a^2b^2 \text{ atau } \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Adapun unsur-unsur elips dengan pusat $O(0,0)$ dan sumbu mayor Sumbu Y dengan persamaan $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ adalah sebagai berikut:

a. Fokus elips adalah $(0,\pm c)$ dengan $c^2 = a^2 - b^2$;

b. Pusat elips terletak pada titik pusat koordinat yaitu $O(0,0)$;

c. Puncak elips adalah titik $(0,\pm a)$;

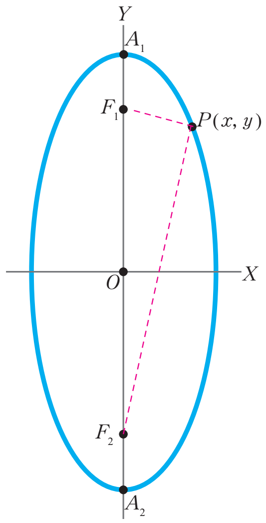
d. Panjang sumbu mayor adalah $2a$, sedangkan panjang sumbu minor adalah $2b$;

e. Eksentrisitas $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$;

f. Persamaan garis direktriksnya adalah

$$l \equiv y = \frac{a^2}{c} \quad \text{dan} \quad l' \equiv y = -\frac{a^2}{e};$$

g. Panjang *latus rectum* $L = \frac{2b^2}{a}$.

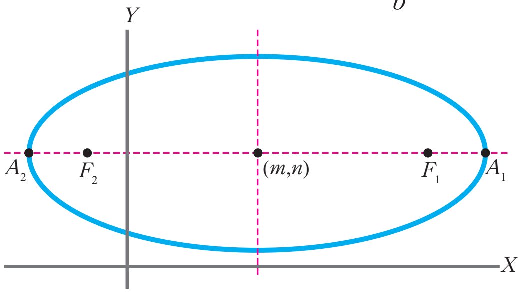


Gambar 1.31. Elips dengan Pusat $O(0,0)$ dan Sumbu Mayor adalah Sumbu Y

3) Persamaan Elips dengan Pusat $P(m,n)$ dan Sumbu Mayornya Sejajar Sumbu X

Hasil diskusi pada bagian sebelumnya, diharapkan kalian memperoleh persamaan elips untuk pusat $P(m,n)$ dan sumbu mayornya sumbu X adalah

$$b^2(x-m)^2 + a^2(y-n)^2 = a^2b^2 \text{ atau } \frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1$$



Gambar 1.32. Elips dengan Pusat (m,n) dan Sumbu Mayor Sumbu X

Adapun unsur-unsur elips dengan pusat (m,n) dan sumbu mayor adalah sumbu X dengan persamaan $\frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1$ adalah sebagai berikut:

a. Fokus elips adalah $(m \pm c, n)$;
b. Pusat elips terletak pada titik pusat koordinat di (m,n);
c. Puncak elips adalah titik $(m \pm a, n)$.

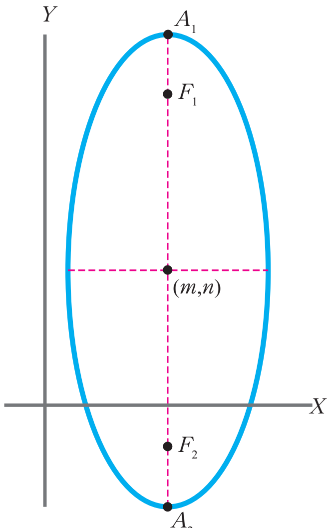
Sementara itu, untuk unsur-unsur lainnya dapat dilihat pada persamaan elips berpusat pada $O(0,0)$ dan sumbu mayornya sumbu X.

4) Persamaan Elips dengan Pusat $P(m,n)$ dan Sumbu Mayornya Sejajar Sumbu Y

Pada hasil diskusi bagian sebelumnya, kalian diharapkan kalian memperoleh persamaan elips untuk pusat $P(m,n)$ dan sumbu mayornya sumbu Y adalah

$$a^2(x-m)^2 + b^2(y-n)^2 = a^2b^2 \text{ atau}$$

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$



Gambar 1.33. Elips dengan Pusat $O(0,0)$ dan Sumbu Mayor adalah Sumbu Y

Adapun unsur-unsur elips dengan pusat (m,n) dan sumbu mayor adalah sumbu X dengan persamaan $\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$ adalah sebagai berikut:

a. Fokus elips adalah $(m,n \pm c)$;

b. Pusat elips terletak pada titik pusat koordinat di (m,n);

c. Puncak elips adalah titik $(m,n \pm a)$.

Sementara itu, untuk unsur-unsur yang lain dapat dilihat pada persamaan elips berpusat pada $O(0,0)$ dan sumbu mayornya sumbu Y.

Contoh soal 1.21

Tentukan persamaan elips dengan pusat $O(0,0)$, fokus $(4,0)$ dan $(-4,0)$ serta sumbu mayornya 12!

Alternatif Penyelesaian:

Karena fokus terletak pada titik $(4,0)$ dan $(-4,0)$, maka elips ini sejajar dengan sumbu X, kalian dapat menggunakan persamaan $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Pada contoh soal sudah diketahui bahwa fokus terletak pada $(4,0)$ dan $(-4,0)$, sehingga $c = 4$. Selain itu, diketahui pula bahwa sumbu mayornya adalah 12, sehingga $2a = 12$ dengan kata lain bahwa $a = 6$.

Setelah diperoleh $c = 4$ dan $a = 6$, maka $b^2 = a^2 - c^2 = 6^2 - 4^2 = 20$.

Jadi, persamaan elips adalah $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$.

Contoh Soal 1.22

Tentukan persamaan elips dengan pusat $(1,-2)$ jika salah satu fokusnya adalah $(1,1\frac{1}{2})$ dan panjang sumbu minornya adalah 1!

Alternatif Penyelesaian:

Karena fokus pada titik $(1,1\frac{1}{2})$ serta pusat elips pada $(1,-2)$, maka elips ini sejajar dengan sumbu X, sehingga dapat menggunakan persamaan $\frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1$

Dari contoh soal diketahui bahwa pusat elips pada $(1,-2)$, maka $m = 1$ dan $n = -2$. Selain itu, fokus terletak pada $(1,1\frac{1}{2})$, maka $m = 1$ dan $n \pm c = 1\frac{1}{2}$, apabila dikaitkan dengan $n = -2$ diperoleh bahwa $c = \pm 3\frac{1}{2}$ atau $c^2 = \frac{49}{4}$.

Selain itu, sumbu minor adalah 1 sehingga $b = \frac{1}{2}$. Akibatnya $a^2 = b^2 + c^2 =$
$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(3\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{49}{4} = \frac{50}{4}$

Jadi, persamaan elips adalah $\frac{(x-1)^2}{\frac{50}{4}} + \frac{\left(y-1\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{49}{4}} = 1$ atau $\frac{4(x-1)^2}{50} + \frac{4\left(y-1\frac{1}{2}\right)^2}{49} = 1$

Contoh Soal 1.23

Diketahui persamaan suatu elips yaitu $9x^2 + 4y^2 = 36$. Dapatkah kalian menentukan titik pusat elips, titik fokus elips, titik puncak elips, panjang sumbu mayor dan minor elips, panjang latus rectum elips, persamaan direktriks elips, dan nilai eksentris elips?

Alternatif Penyelesaian:

Bentuk persamaan elips $9x^2 + 4y^2 = 36$ harus dirubah dalam bentuk $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$$9x^2 + 4y^2 = 36$$
$$\frac{9x^2}{36} + \frac{4y^2}{36} = \frac{36}{36}$$
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Dari persamaan ini diperoleh bahwa: $a^2 = 9$, sehingga panjang sumbu mayor adalah $2a = 6$; $b^2 = 4$, sehingga panjang sumbu minor $2b = 4$; $c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5$; panjang *latus rectum* adalah $\frac{2b^2}{a} = \frac{2(4)}{9} = \frac{8}{9}$; eksentris $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$; karena $y = -\frac{a^2}{c} = -\frac{9}{\sqrt{5}}$ atau $y = \frac{a^2}{c} = \frac{9}{\sqrt{5}}$, maka persamaan direktriksnya adalah $x = -\frac{9}{\sqrt{5}}$ atau $x = \frac{9}{\sqrt{5}}$.

Pusat berada pada titik pusat koordinat $O(0,0)$, titik fokus berada sejajar sumbu Y yaitu $(0,-\sqrt{5})$ dan $(0,\sqrt{5})$, titik puncak sejajar sumbu Y, yaitu $(0,-3)$ dan $(0,3)$. Titik puncak sejajar sumbu X, yaitu $(2,0)$ dan $(-2,0)$.

Contoh Soal 1.24

Tentukan persamaan elips jika titik fokusnya adalah $(-2,1)$ dan $(4,1)$ serta titik puncak adalah $(-4,1)$ dan $(6,1)$!

Alternatif Penyelesaian:

Karena fokus terletak pada $(-2,1)$ dan $(4,1)$, maka elips sejajar dengan sumbu Y, sehingga persamaan elips dapat menggunakan $\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$

Titik pusat elips berada di tengah tengah titik fokus, sehingga

$$(m,n) = \left(\frac{(-2+4)}{2}, \frac{(1+1)}{2}\right) = (1, 1).$$

Sebelum mencari nilai a dan b, tentukan terlebih dahulu nilai c yang dapat diperoleh dari jarak dua titik fokus, sehingga $2c = \sqrt{(4-(-2))^2 - (1-1)^2} = 6$. Karena $2c = 6$ maka $\boldsymbol{c = 3}$.

Untuk menentukan nilai b, dapat diperoleh dari titik puncak (–4,1) dan (6,1). Jarak titik puncak ini merupakan sumbu minor karena elips sejajar dengan sumbu Y, sehingga $2b = \sqrt{(6-(-4))^2 - (1-1)^2} = 10$. Karena $2b = 10$ maka $\boldsymbol{b = 5}$.

Untuk menentukan nilai a, kalian dapat memperolehnya dari $a = \sqrt{b^2 - c^2} = \sqrt{25-9} = \sqrt{16}$, sehingga $\boldsymbol{a = 4}$.

Jadi, persamaan elips adalah $\dfrac{(x-1)^2}{16} + \dfrac{(y-1)^2}{25} = 1$.

Ayo Mencoba

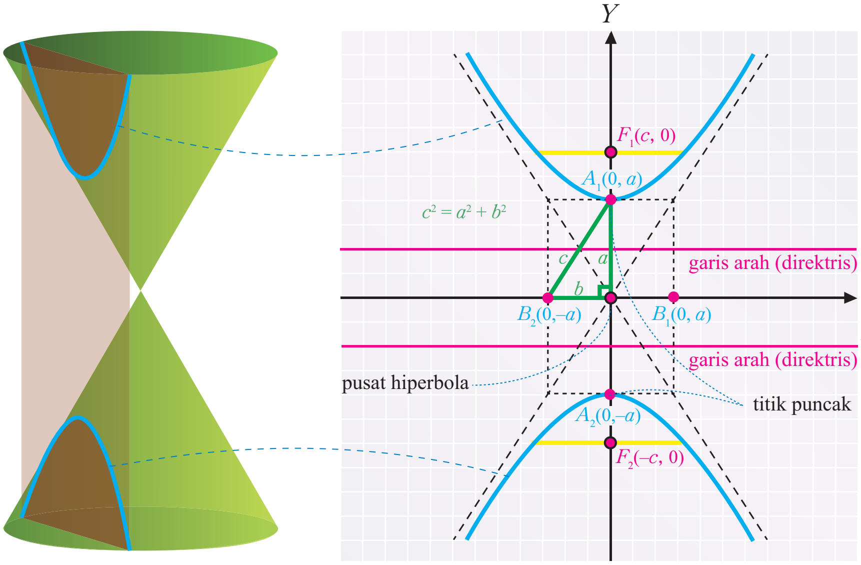
Latihan Soal 1.7

1. Tentukan fokus dan pusat elips jika persamaannya adalah
   a. $9x^2 + 25y^2 - 18x + 100y - 116 = 0$.
   b. $9x^2 + 25y^2 - 36x + 50y - 164 = 0$.
2. Tentukan persamaan elips jika diketahui
   a. titik fokus $(0,\pm 6)$ dan puncak $(0,\pm 7)$.
   b. titik puncak $(\pm 5,0)$ dan *latus rectum* $\frac{4}{5}$.
   c. titik fokus pada (1,–1) dan (1,–3) serta menyinggung sumbu Y.
   d. pusat di (–1,4), salah satu fokusnya adalah (–1,1), serta melalui titik (0,8).
3. Jika eksentrisitas suatu elips adalah $\frac{12}{13}$ dan jarak antara dua titik fokusnya adalah 36, tentukan persamaan elips tersebut!
4. Diketahui koordinat titik fokus suatu elips adalah $F_1(8,-1)$ dan $F_2(-4,-1)$ serta salah satu koordinat ujung sumbu minornya adalah (2,7). Tentukan persamaan elips tersebut!

3. Hiperbola

a. Definisi Hiperbola

Hiperbola merupakan sebuah kurva yang dibentuk oleh perpotongan dua kerucut yang berlawanan dan bidang yang memotong setengah dari kerucut tersebut. Hiperbola merupakan tempat lintasan titik-titik dengan eksentrisitasnya lebih besar dari satu. Selain itu, ada definisi lain yang menyatakan bahwa hiperbola adalah himpunan titik-titik yang jarak antara dua titik tertentu pada bidang selalu sama. Kedua titik tersebut disebut dengan fokus hiperbola, selisih kedua titik ini bisa disebut dengan $2a$.



Gambar 1.34. Unsur-Unsur Pada Hiperbola

Dari Gambar 1.34, dapat diketahui bahwa unsur-unsur dari pembentukan hiperbola di antaranya adalah sebagai berikut:

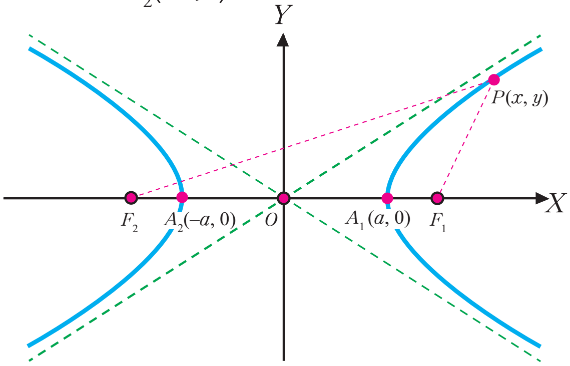
1. Garis yang melalui kedua fokus disebut dengan sumbu utama atau sumbu mayor;
2. Garis yang melalui pertengahan serta tegak lurus dengan sumbu mayor disebut sumbu sekawan (sumbu konjugasi) atau sumbu minor;
3. Titik potong kedua sumbu tersebut disebut pusat hiperbola;
4. Puncak hiperbola adalah titik potong kurva hiperbola dengan sumbu utama;
5. Hiperbola mirip dengan parabola, bedanya parabola hanya terdiri atas satu kurva, sedangkan hiperbola terdiri dari dua kurva, yang masing-masing kurva disebut cabang;

6. Suatu hiperbola memiliki dua buah asimtot berupa garis lurus. Asimtot hiperbola merupakan garis lurus yang semakin lama semakin didekati oleh garis lengkung (kurva hiperbola) tetapi garis lurus dan kurva tidak pernah berpotongan di suatu titik.

b. Persamaan Hiperbola

1) Persamaan Hiperbola dengan Pusat O (0,0) dan Fokusnya Terletak di Sumbu X

Perhatikan Gambar 1.35, pusat hiperbola berada pada pusat koordinat O (0,0), titik fokus hiperbola adalah titik $F_1(c,0)$ dan titik $F_2(-c,0)$, titik puncak hiperbola pada titik $A_1(a,0)$ dan titik $A_2(-a,0)$.



Gambar 1.35. Hiperbola dengan Pusat O (0,0) dengan Fokus pada sumbu X

Ambil sembarang titik $P(x,y)$ yang terletak pada hiperbola, berdasarkan definisi hiperbola, selisih jarak P ke F_2 dengan P ke F_1 selalu sama yaitu $2a$, sehingga

$$|F_2P| - |F_1P| = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Kuadratkan kedua ruas, sehingga diperoleh

$$(x+c)^2+y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2+y^2$$

$$(x+c)^2-(x-c)^2-4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$x^2+2xc+c^2-(x^2-2xc+c^2)-4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$4xc \quad 4a^2 = 4a\sqrt{(x \quad c)^2+y^2}$$

$$xc-a^2 = a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Kuadratkan kembali persamaan ini, maka diperoleh

$$(cx - a^2)^2 = \left(a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2$$

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2\left((x-c)^2 + y^2\right)$$

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2(x-c)^2 + a^2y^2$$

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$c^2x^2 - 2a^2cx - a^2x^2 + 2a^2xc - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Karena $a^2 > 0$ dan $c^2 - a^2 > 0$, maka kalian dapat membagi persamaan ini dengan $a^2 (c^2 - a^2)$, sehingga diperoleh

$$\frac{(c^2 - a^2)x^2}{a^2(c^2 - a^2)} - \frac{a^2y^2}{a^2(c^2 - a^2)} = \frac{a^2(c^2 - a^2)}{a^2(c^2 - a^2)}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{(c^2 - a^2)} = 1$$

Karena $c^2 - a^2 > 0$ dan $c^2 - a^2 = b^2$ maka $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Persamaan inilah yang disebut dengan persamaan hiperbola dengan pusat $O(0,0)$ dan fokusnya terletak di sumbu X.

Beberapa sifat dari hiperbola dengan titik pusat $O(0,0)$ dan titik fokusnya terletak di sumbu X, di antaranya adalah sebagai berikut:

a. Fokus berada pada $(\pm c,0)$, puncak berada pada $(\pm a,0)$;

b. Pusat hiperbola merupakan sebuah titik di pertengahan titik fokus dan terletak pada sumbu fokal. Pada Gambar 1.35, pusat hiperbola terletak pada $O(0,0)$;

c. Sumbu utama adalah sumbu X, dengan panjang sumbu mayor adalah $2a$;

d. Sumbu sekawan merupakan garis yang tegak lurus dengan sumbu utama dan melaui pusat hiperbola. Pada Gambar 1.35, yang menjadi sumbu utama adalah sumbu Y;

e. Nilai eksentrisitas $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$;

f. Persamaan asimtot adalah $y = \pm \frac{b}{a} x$;

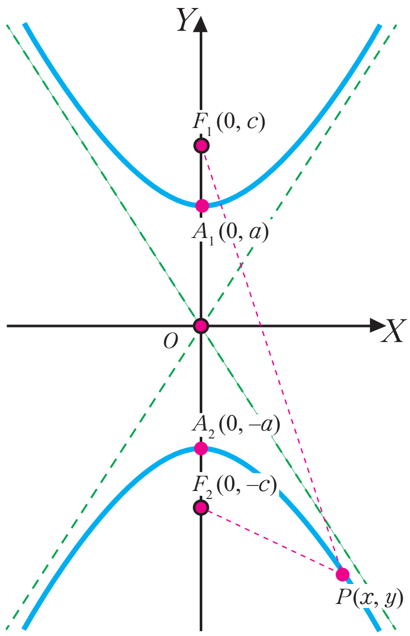
g. Persamaan direktris $x = \pm \frac{a^2}{c}$;

h. *Latus rectum* adalah $\frac{2b^2}{a}$.

2) Persamaan Hiperbola dengan Pusat O (0,0) dan Fokusnya Terletak di Sumbu Y

Ayo Berdiskusi

Setelah kalian memahami proses mencari persamaan hiperbola dengan pusat O (0,0), fokusnya terletak pada sumbu X, serta proses mencari persamaan hiperbola seperti pada persamaan hiperbola dengan titik pusat O (0,0) dan fokusnya berada pada sumbu X. Diskusikanlah dengan kelompok untuk menunjukkan bahwa persamaan hiperbola dengan titik pusat O (0,0) dan titik fokusnya terletak pada sumbu Y adalah $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ atau $b^2y^2 - a^2x^2 = a^2b^2$. Untuk mendiskusikan hal ini, kalian dapat menggunakan bantuan Gambar 1.36.



Gambar 1.36. Hiperbola dengan Pusat O(0,0) dengan Fokus pada sumbu Y

Perhatikan Gambar 1.36, pusat hiperbola berada pada pusat koordinat O(0,0), titik fokus hiperbola adalah $F_1(0,c)$ dan $F_2(0,-c)$, titik puncak hiperbola pada $A_1(0,a)$ dan $A_2(0,-a)$. Ambil sembarang titik $P(x,-y)$ yang terletak pada hiperbola, berdasarkan definisi hiperbola bahwa selisih jarak P ke F_2 dengan P ke F_1 selalu sama yaitu $2a$, sehingga diperoleh bahwa

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \text{ atau } b^2y^2 - a^2x^2 = a^2b^2.$$

Beberapa sifat dari hiperbola dengan titik pusat O(0,0) dan fokusnya terletak di sumbu X, di antaranya adalah sebagai berikut:

a. Fokus berada pada $(0,\pm c)$, puncak berada pada $(0,\pm a)$;

b. Pusat hiperbola merupakan sebuah titik di pertengahan titik fokus dan terletak pada sumbu fokal. Pada gambar 1.36, pusat hiperbola terletak pada O(0,0);

c. Sumbu utama adalah sumbu Y, dengan panjang sumbu mayor adalah $2a$;

d. Nilai eksentrisitas $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$;

e. Persamaan asimtot adalah $y = \pm\frac{a}{b}x$;

f. *Latus rectum* adalah $\frac{2b^2}{a}$.

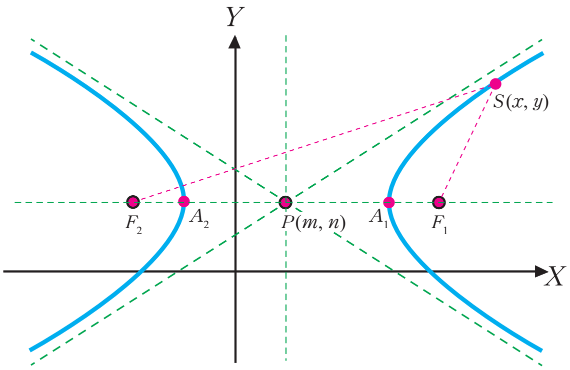
3) Persamaan Hiperbola dengan Pusat $P(m,n)$ dan Sumbu Utama Sejajar Sumbu X

Ayo Berdiskusi

Setelah kalian memahami proses menentukan persamaan hiperbola dengan pusat $O(0,0)$, serta proses menentukan persamaan hiperbola dengan pusat $O(0,0)$. Diskusikan dengan kelompok kalian untuk menunjukkan bahwa persamaan hiperbola dengan pusat (m,n) dan sumbu utama sejajar dengan sumbu X adalah

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1 \text{ atau } b^2(x-m)^2 - a^2(y-n)^2 = a^2b^2.$$

Untuk mendiskusikan hal ini, kalian dapat mengingat kembali materi translasi yang telah kalian pelajari pada jenjang sebelumnya. Selain itu kalian dapat menggunakan bantuan Gambar 1.37.



Gambar 1.37. Hiperbola dengan Pusat $P(m,n)$ Sumbu Utama Sejajar Sumbu X

Perhatikan Gambar 1.37, pusat hiperbola berada pada pusat koordinat $P(m,n)$, dan sumbu utama adalah adalah sumbu X, maka persamaan hiperbolanya adalah

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1 \text{ atau } b^2(x-m)^2 - a^2(y-n)^2 = a^2b^2.$$

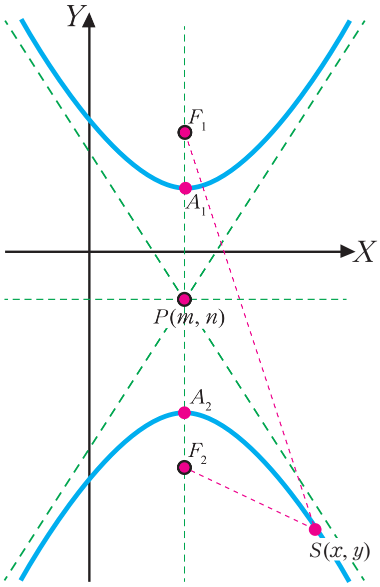
4) Persamaan Hiperbola dengan Pusat $P(m,n)$ dan Sumbu Utama Sejajar Sumbu Y

Ayo Berdiskusi

Setelah kalian memahami proses menentukan persamaan hiperbola dengan pusat $O(0,0)$, serta proses menentukan persamaan hiperbola dengan titik pusat $O(0,0)$. Diskusikan dengan kelompok kalian untuk menunjukkan bahwa persamaan hiperbola dengan pusat $P(m,n)$ dan sumbu utama sejajar dengan sumbu Y adalah

$$\frac{(y-n)^2}{a^2} - \frac{(x-m)^2}{b^2} = 1 \text{ atau } b^2(y-n)^2 - a^2(x-m)^2 = a^2b^2.$$

Untuk mendiskusikan hal ini, kalian dapat menggunakan bantuan Gambar 1.38.



Gambar 1.38. Hiperbola dengan Pusat $P(m,n)$ Sumbu Utama Sejajar Sumbu Y

Perhatikan Gambar 1.38, pusat hiperbola berada pada pusat koordinat $P(m,n)$ dan sumbu utama adalah adalah sumbu Y, maka persamaan hiperbolanya adalah $\frac{(y-n)^2}{a^2} - \frac{(x-m)^2}{b^2} = 1$ atau $b^2(y-n)^2 - a^2(x-m)^2 = a^2b^2$.

Contoh Soal 1.25

Tentukan unsur-unsur hiperbola yang terdiri dari titik pusat, titik fokus, titik puncak, panjang sumbu utama dan asimtot untuk persamaan hiperbola:

a. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1.$

b. $9y^2 - 16x^2 = 144.$

Alternatif Penyelesaian:

Untuk bagian a

Persamaan hiperbola $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. diperoleh $a^2 = 9$ atau $a = 3$, dan $b^2 = 16$ atau $b = 4$, sehingga $c = \sqrt{9+16} = 5$.

Titik pusat pada $O(0,0)$, fokus pada $(-5,0)$ dan $(5,0)$, titik puncak pada $(-3,0)$

dan (3,0), sumbu utama sejajar sumbu X dengan panjang 6, Nilai ekentrisitas $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$, persamaan direktriks $x = \frac{9}{5}$ dan $x = -\frac{9}{5}$, panjang *latus rectum* adalah $\frac{2b^2}{a} = \frac{2(4)^2}{3} = \frac{32}{3}$, persamaan asimtotnya adalah $y = \frac{4}{3}x$ dan $y = -\frac{4}{3}x$.

Ayo Mencoba

Pada bagian b, silakan kalian lengkapi jawaban yang masih terbuka. Jawaban yang hilang adalah yang masih tertulis "....".

Untuk bagian b

Ubahlah persamaan hiperbola $9y^2 - 16x^2 = 144$, menjadi persamaan $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ atau berbentuk $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$, sehingga $\frac{9y^2}{144} - \frac{16x^2}{144} = 1$ dapat dinyatakan dalam $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{16} = 1$.

Dari persamaan ini diperoleh bahwa ....

Ayo Mencoba

Ayo berkolaborasi dengan teman kalian untuk melengkapi jawaban pada Latihan Soal Terbimbing 1.14 yang masih terbuka. Jawaban yang hilang adalah yang masih tertulis "........".

Latihan Soal Terbimbing 1.14

Tentukan unsur-unsur hiperbola yang terdiri dari atas titik pusat, titik fokus, titik puncak, panjang sumbu utama dan asimtot untuk persamaan hiperbola $9x^2 - 4y^2 - 18x - 24y = 26$!

Alternatif Penyelesaian:

Persamaan hiperbola $9x^2 - 4y^2 - 18x - 24y = 26$, diubah menjadi persamaan $\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$ atau $\frac{(y-n)^2}{a^2} - \frac{(x-m)^2}{b^2} = 1$, sehingga

....

Contoh Soal 1.26

Tentukan persamaan hiperbola jika titik fokus terletak pada (8,0) dan (–8,0), titik puncak pada (5,0) dan (–5,0)!

Alternatif Penyelesaian:

Fokus terletak pada (±8,0) hal ini berarti $c = 8$, Titik puncak pada (±5,0), hal ini berarti $a = 5$, sehingga $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{64 - 25} = \sqrt{39}$

Jadi, persamaan hiperbolanya adalah $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{39} = 1$.

Contoh Soal 1.27

Tentukan persamaan hiperbola jika puncak hiperbola terletak pada (4,2) dan (–2,2), serta salah satu asimtot pada $2x - 3y + 4 = 0$!

Alternatif Penyelesaian:

Hiperbola memiliki titik puncak $(h \pm a, k)$ sehingga $k = 2$, selain itu $h + a = 4$ dan $h - a = -2$, dengan mengeliminasi h diperoleh bahwa $2a = 6$ atau $a = 3$. Dengan menyubstitusikan $a = 3$ pada salah satu persamaan tersebut, diperoleh bahwa $h = 1$.

Persamaan asimtot adalah $(y - h) = \frac{b}{a}(x - k)$, sehingga $(y - 2) = \frac{b}{3}(x - 1)$.

$3y - 6 = bx - b$ atau $3y = bx - b + 6$.

Pada contoh soal diketahui bahwa persamaan hiperbola memiliki asimtot $2x - 3y + 4 = 0$ atau $3y = 2x + 4$, sehingga $b = 2$.

Jadi, persamaan hiperbolanya adalah $\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$.

Ayo Mencoba

Latihan Soal 1.8

1. Tentukan titik pusat, titik fokus, titik puncak, jarak kedua fokus, dan persamaan asimtot dari hiperbola dengan persamaan
   a. $4x^2 - 9y^2 = 36$.
   b. $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y = 161$.
2. Tentukan persamaan hiperbola jika diketahui
   a. titik pusat $O(0,0)$, Titik fokus (8,0) dan (–8,0), titik puncak pada (6,0) dan (–6,0).

b. titik puncak (2,2) dan (−8,2) serta asimtot $3x-5y=19$.

c. puncak (7,3) dan (−1,3) serta melalui $(8,4\frac{1}{2})$.

d. hiperbola melalui $(1,\sqrt{3})$ dan asimtot $y=\pm 2x$.

3. Tentukan fokus, eksentrisitas, panjang *latus rectum*, dan persamaan direktris dari hiperbola

a. $4x^2-25y^2=100$.

b. $4x^2-9y^2-16x+18y=29$.

4. Pengayaan: Garis Singgung Pada Irisan Kerucut (Parabola, Elips dan Hiperbola).

Setelah kalian mempelajari tentang bentuk umum irisan kerucut (dalam hal ini adalah parabola, elips dan hiperbola), pada bagian pengayaan ini kalian akan mempelajari tentang garis singgung terhadap irisan kerucut. Hampir sama dengan konsep menentukan persamaan garis singgung terhadap lingkaran. Untuk menentukan persamaan garis singgung terhadap irisan kerucut, dapat digunakan tiga konsep, yaitu (1) menentukan persamaan garis singgung melalui titik pada irisan kerucut, (2) menentukan persamaan garis singgung dengan kemiringan m pada irisan kerucut, dan (3) menentukan persamaan garis singgung melalui titik di luar irisan kerucut.

a. Menentukan Persamaan Garis Singgung Melalui Titik $T(x_1, y_1)$ pada Irisan Kerucut

Untuk menentukan persamaan garis singgung melalui titik pada lingkaran, kalian dapat menggunakan prinsip "bagi adil" untuk menyelesaikan permasalahan tersebut. Begitu pula untuk menentukan persamaan garis singgung melalui titik $T(x_1, y_1)$ pada irisan kerucut, kalian dapat menggunakan prinsip bagi adil seperti Tabel 1.2.

Ayo Berdiskusi

Diskusikan bersama teman kalian, untuk menunjukkan prinsip bagi adil seperti pada Tabel 1.2.

Tabel 1.2 Persamaan Irisan Kerucut dan Persamaan Garis Singgungnya

Persamaan Irisan Kerucut	Persamaan Garis Singgung
$y = 4px$	$yy_1 = 2p\ (x + x_1)$
$y = 4py$	$xx_1 = 2p\ (y + y_1)$
$(x - m)^2 = 4p\ (y - n)$	$(x - m)\ (x_1 - m) = 2p\ (y - n)\ (y_1 - n)$
$(y - m)^2 = 4p\ (x - n)$	$(y - m)\ (y_1 - m) = 2p\ (x - n)\ (x_1 - n)$
$\dfrac{x^2}{a^2} \pm \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	$\dfrac{xx_1}{a^2} \pm \dfrac{yy_1}{b^2} = 1$
$x^2b^2 \pm a^2y^2 = a^2b^2$	$xx_1b^2 \pm yy_1a^2 = a^2b^2$
$b^2y^2 \pm a^2x^2 = a^2b^2$	$yy_1b^2 \pm xx_1a^2 = a^2b^2$
$\dfrac{x^2}{b^2} \pm \dfrac{y^2}{a^2} = 1$	$\dfrac{xx_1}{b^2} \pm \dfrac{yy_1}{a^2} = 1$
$b^2(x - m)^2 \pm a^2(y - n)^2 = a^2b^2$	$b^2(x - m)\ (x_1 - m) \pm a^2(y - n)\ (y_1 - n) = a^2b^2$
$\dfrac{(x-m)^2}{b^2} \pm \dfrac{(y-n)^2}{a^2} = 1$	$\dfrac{(x-m)(x_1-m)}{b^2} \pm \dfrac{(y-n)(y_1-n)}{a^2} = 1$
$a^2(x - m)^2 \pm b^2(y - n)^2 = a^2b^2$	$a^2(x - m)\ (x_1 - m) \pm b^2(y - n)\ (y_1 - n) = a^2b^2$
$\dfrac{(x-m)^2}{a^2} \pm \dfrac{(y-n)^2}{b^2} = 1$	$\dfrac{(x-m)(x_1-m)}{a^2} \pm \dfrac{(y-n)(y_1-n)}{b^2} = 1$

Contoh Soal 1.28

Tentukan persamaan dari garis singgung $y^2 = 2x$ pada titik A(2,–2)!

Alternatif Penyelesaian:

Dari prinsip bagi adil yang ada pada Tabel 1.2 untuk persamaan $y^2 = 2x$, maka persamaan garis singgungnya adalah

$$yy_1 = 2\frac{(x + x_1)}{1}$$

$$-2y = 2\frac{(x+2)}{1}$$

$-2y = 2x + 4$ atau dapat pula dinyatakan dengan $2x + 2y + 4 = 0$.

Ayo Mencoba

Ayo berkolaborasi dengan teman kalian untuk melengkapi jawaban pada Latihan Soal Terbimbing 1.15 yang masih terbuka. Jawaban yang hilang adalah yang masih tertulis ".........".

Latihan Soal Terbimbing 1.15

Tentukan persamaan garis singgung $4x^2+9y^2 - 12x + 6y - 7 = 0$ pada titik (1,1)!

Alternatif Penyelesaian:

Dari konsep bagi adil yang ada pada Tabel 1.2 untuk persamaan $4x^2+9y^2 - 12x + 6y - 7 = 0$, maka persamaan garis singgungnya adalah ....

....

b. Menentukan Persamaan Garis Singgung dengan Kemiringan *m* Pada Irisan Kerucut

Untuk menentukan persamaan garis singgung dengan kemiringan m pada irisan kerucut, kalian dapat menyubstitusikan persamaan garis dengan kemiringan m pada persamaan irisan kerucut. Konsep ini mirip dengan konsep menentukan persamaan garis singgung m pada lingkaran.

Contoh Soal 1.29

Tentukan persamaan garis singgung hiperbola $4x^2 - 9y^2 = 36$ yang tegak lurus dengan garis $x + 4y + 10 = 0$!

Alternatif Penyelesaian:

Langkah pertama adalah menentukan kemiringan garis singgung. Karena garis singgung hiperbola tegak lurus terhadap $x + 4y + 10 = 0$, maka $m_g(-\frac{1}{4}) = -1$ atau $m_g = 4$.

Misalkan persamaan garis singgung hiperbola adalah $y = m_g x + c$, dengan menyubstitusikan m_g pada persamaan ini maka diperoleh $y = 4x + c$. Substitusikan persamaan ini ke persamaan hiperbola, sehingga

$$4x^2 - 9y^2 = 36.$$
$$4x^2 - 9(4x + c)^2 = 36.$$
$$4x^2 - 9(16x^2 + 8cx + c^2 = 0.$$
$$4x^2 - 144x^2 - 72cx - 9c^2 = 0.$$
$$-140x^2 - 72cx - 9c^2 = 0.$$

Dengan memperhatikan bentuk persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, dari persamaan $-140x^2 - 72cx - 9c^2 = 0$ diperoleh bahwa $a = -140$, $b = -72c$ dan $c = -9c^2$, dengan menggunakan syarat $D = 0$ diperoleh

$D = b^2 - 4ac = (-72c)^2 - 4(-140)(-9c^2) = 5184c^2 - 5040c^2$.

Substitusikan $c = 0$ pada persamaan $y = 4x + c$, sehingga persamaan garis singgungnya adalah $y = 4x$.

Ayo Mencoba

Ayo berkolaborasi dengan teman kalian untuk melengkapi jawaban pada Latihan Soal Terbimbing 1.16 yang masih terbuka. Jawaban yang hilang adalah yang masih tertulis "....".

Latihan Soal Terbimbing 1.16

Tentukan persamaan garis singgung elips $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{16} = 1$ dengan kemiringan $m = 2$!

Alternatif Penyelesaian:

Seperti yang telah dituliskan pada bagian sebelumnya bahwa untuk menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan garis singgung irisan kerucut (elips, parabola, dan hiperbola), kalian dapat menggunakan konsep persamaan garis singgung pada lingkaran. Berkaitan dengan masalah ini, kalian dapat menggunakan konsep menentukan persamaan garis singgung lingkaran yang diketahui kemiringan garis singgung, yaitu $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$. Pada contoh soal terbimbing ini, persamaan elips $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{16} = 1$, diperoleh bahwa $a^2 = 20$, $b^2 = 16$ dan kemiringan garis singgung adalah 2. Dengan mensubstitusikan nilai-nilai ini ke persamaan

$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$ diperoleh bahwa ....

c. Menentukan Persamaan Garis Singgung Melalui Titik di Luar Irisan Kerucut

Untuk mencari persamaan garis singgung melalui suatu titik di luar irisan kerucut, kalian dapat menggunakan persamaan kutub atau persamaan polar. Konsep menyelesaikan sama dengan konsep penentuan persamaan garis singgung yang melalui suatu titik di luar lingkaran. Untuk memahami garis singgung melalui titik di luar irisan kerucut, pahami beberapa contoh soal berikut.

Contoh Soal 1.30

Diketahui persamaan parabola $y^2 - 8x = 0$. Tentukan persamaan garis singgung parabola tersebut yang melalui titik $A(2,5)$!

Alternatif Penyelesaian:

Parabola $y^2 - 8x = 0$ dapat dinyatakan dalam $y^2 = 8x$ dengan $p = 2$, dengan menggunakan konsep yang ada pada persamaan garis singgung melalui titik di luar lingkaran, kalian bisa menggunakan pertolongan garis polar atau garis kutub. Persamaan kutub untuk parabola $y^2 = 8x$ dengan titik $A(2,5)$ adalah:

$$yy_1 = 8\,\frac{(x + x_1)}{2}.$$

$$5y = 4(x + 2).$$

$$y = \frac{4x + 8}{5}.$$

Substitusikan persamaan $y = \dfrac{4x + 8}{5}$ ke persamaan parabola $y^2 = 8x$, diperoleh bahwa

$$\left(\tfrac{4x+8}{5}\right)^2 = 8.$$

$$\frac{16x^2 + 64x + 64}{25} = 8x.$$

$$16x^2 + 64x + 64 = 200x.$$

$$16x^2 + 136x + 64 = 0.$$

$$2x^2 + 17x + 8 = 0.$$

$$(2x - 1)(x - 8) = 0.$$

sehingga diperoleh bahwa $x_1 = \frac{1}{2}$ dan $x_2 = 8$.

Untuk $x = 8$,

Substitusikan $x = 8$ persamaan $y = \dfrac{4x + 8}{5} = \dfrac{4(8) + 8}{5} = 8$, sehingga titik singgungnya adalah (8,8). Dengan menyubstitusikan $x = 8$ dan $y = 8$ ke persamaan polar atau

kutub $yy_1 = 8\dfrac{(x+x_1)}{2}$ diperoleh bahwa $8y = 8\dfrac{(x+8)}{2}$ atau $8y = 4x + 32$.
Dapat dinyatakan dengan $x - 2y + 8 = 0$.

Untuk $x = \frac{1}{2}$,
Substitusikan $x = \frac{1}{2}$ persamaan $y = \dfrac{4x+8}{5} = \dfrac{4\left(\frac{1}{2}\right)+8}{5} = 2$, sehingga titik singgungnya adalah $(\frac{1}{2}, 2)$. Dengan menyubstitusikan $x = \frac{1}{2}$ dan $y = 2$ ke persamaan polar atau kutub $yy_1 = 8\dfrac{(x+x_1)}{2}$ diperoleh bahwa

$$2y = 8\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)}{2} = 4\left(x+\tfrac{1}{2}\right) = 4x + 2.$$

Atau dapat dinyatakan dengan $y - 2x - 1 = 0$.
Jadi, persamaan garis singgung parabola $y^2 - 8x = 0$ melalui titik A(2,5) adalah

$$x - 2y + 8 = 0 \text{ dan } y - 2x - 1 = 0.$$

Ayo Mencoba

Ayo berkolaborasi dengan teman kalian untuk melengkapi jawaban pada Latihan Soal Terbimbing 1.17 yang masih terbuka. Jawaban yang hilang adalah yang masih tertulis "....".

Latihan Soal Terbimbing 1.17

Tentukan persamaan garis singgung elips $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ melalui titik $A(1,3)$!

Alternatif Penyelesaian:

Dengan menggunakan konsep yang ada pada persamaan garis singgung yang melalui titik di luar lingkaran, kalian bisa menggunakan pertolongan garis polar atau garis kutub. Persamaan kutub untuk elips $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ dengan titik $A(1,3)$ adalah

$$\frac{xx_1}{9} + \frac{yy_1}{4} = 1.$$

$$\frac{x}{9} + \frac{3y}{4} = 1.$$

$4x + 27y = 36$ atau $y = \dfrac{36-4x}{27}$.
Substitusikan persamaan $y = \dfrac{36-4x}{27}$ ke persamaan elips $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$, diperoleh bahwa ....

Sehingga diperoleh bahwa $x_1 =$ .... dan $x_2 =$ ....

Untuk x = ...,

Substitusikan x = ... persamaan $y = \frac{36-4x}{27} = \frac{16}{17}$, sehingga titik singgungnya adalah .... Dengan menyubstitusikan ke persamaan polar atau kutub $\frac{xx_1}{9} + \frac{yy_1}{4} = 1$ diperoleh ....

Untuk x = ...,

Substitusikan x = ... persamaan $y = \frac{36-4x}{27} = \frac{16}{17}$, sehingga titik singgungnya adalah .... Dengan menyubstitusikan ke persamaan polar atau kutub $\frac{xx_1}{9} + \frac{yy_1}{4} = 1$ diperoleh ....

Ringkasan dan Refleksi

Ayo Mengomunikasikan

Setelah kalian mempelajari materi geometri ini, apa simpulan terkait materi ini? Untuk membantu menyimpulkan, kalian bisa uraikan dengan kalimat sendiri mengenai hal berikut.

1. Apa yang membedakan persamaan lingkaran, parabola, elips, dan hiperbola?
2. Bagaimana cara menemukan unsur-unsur pada lingkaran, parabola, elips, dan hiperbola?
3. Bagaimana cara menentukan persamaan lingkaran, parabola, elips, dan hiperbola, jika diketahui unsur unsurnya?
4. Bagaimana menentukan persamaan garis singgung terhadap lingkaran, parabola, elips dan hiperbola?

Ayo Gunakan Teknologi

Untuk melakukan pemeriksaan ulang jawaban yang telah kalian peroleh dalam menyelesaikan soal-soal yang ada pada latihan soal terbimbing dan latihan soal, kalian dapat menggunakan aplikasi *GeoGebra* untuk melihat apakah jawaban yang telah kalian peroleh sudah benar atau belum.

GeoGebra
Dynamic Mathematics for Everyone

GeoGebra adalah *software* matematika dinamis yang menggabungkan geometri, aljabar, dan kalkulus (Lestari, 2018). Aplikasi ini dikembangkan oleh Markus Hohenwarter di Universitas Florida Atlantic, dan aplikasi ini dapat digunakan sebagai alat bantu untuk belajar matematika (Ekawati, 2016). Menarik, bukan?

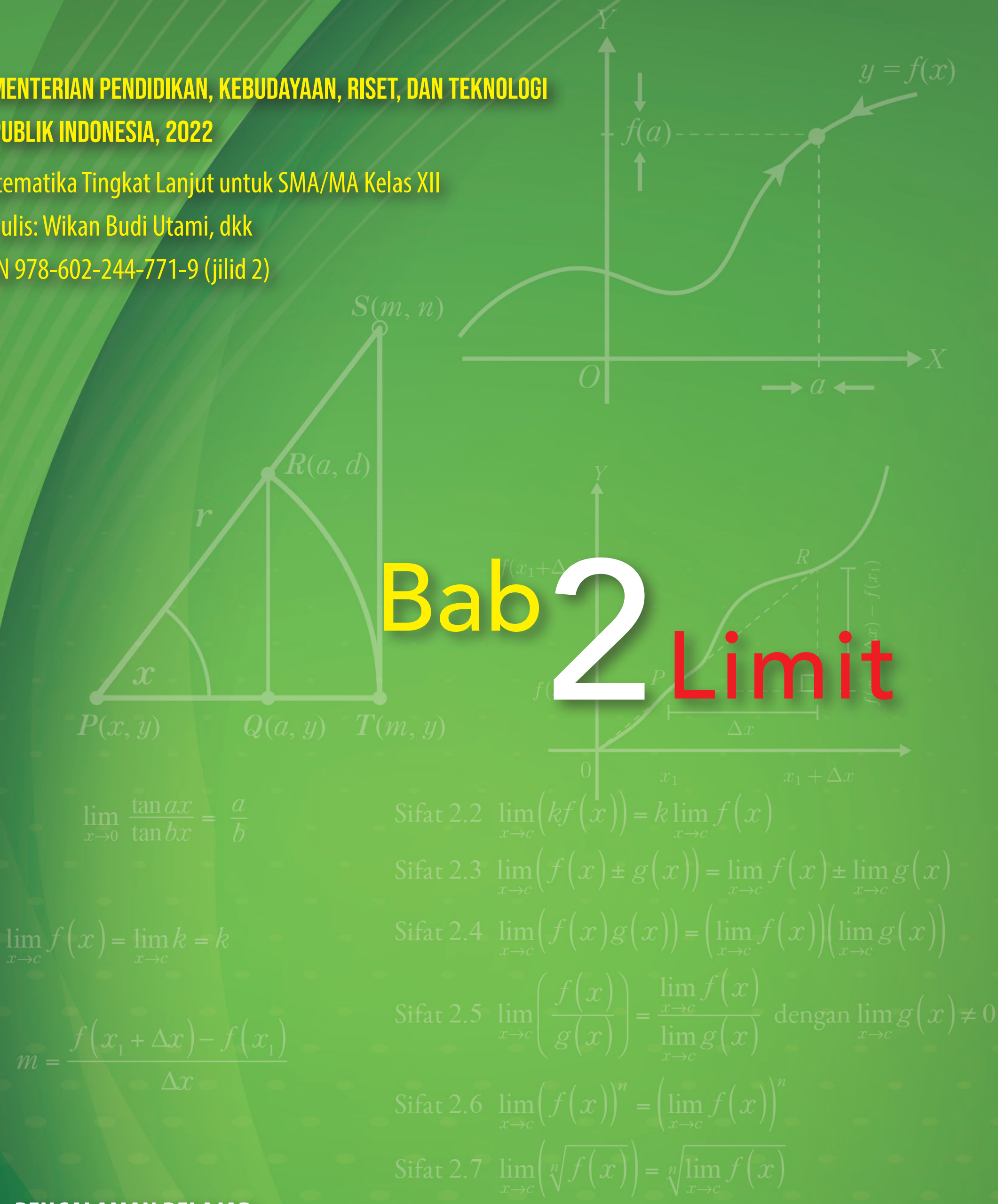
Uji Kompetensi

1. Diketahui lingkaran $L \equiv (x-4)^2 - (y-4)^2 = 16$ memotong garis $y = 4$. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran yang melalui titik potong lingkaran dan garis tersebut!
2. Tentukan persamaan garis sejajar dengan $x + 2y - 5 = 0$ yang membagi lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 + 10x - 6y - 2 = 0$ menjadi dua bagian yang sama!
3. Jika kuasa titik $M(a, 4) = 0$ terhadap lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 25 = 0$, tentukanlah nilai dari a!

Soal Berpikir Kreatif

4. Jika titik A dan B berada pada lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 6x - 2y + k = 0$, maka garis singgung lingkaran yang melalui titik A dan B berpotongan di titik $C(8,1)$. Jika luas persegi panjang yang melalui titik A, B, dan C serta pusat lingkaran adalah 12, tentukanlah nilai dari k!
5. Tunjukkan bahwa puncak kedua parabola $x^2 - 2x - 5y + 11 = 0$ dan $y^2 + 5x - 9$ adalah sama, dan tentukan titik perpotongan kedua parabola!
6. Diketahui dua fokus elips terletak pada sumbu X. Sumbu mayor dan sumbu minor secara berturut turut adalah 10 dan 8. Tentukan persamaan elips yang menyinggung sumbu Y!
7. Hiperbola dengan persamaan $xy = 1$ merupakan salah satu bentuk hiperbola paling sederhana dan berbentuk siku-siku. Hiperbola $xy = 1$, dapat diperoleh dengan memutar parabola sejauh 45° di sekitar titik asal. Selidikilah sifat-sifat hiperbola $xy = 1$!

KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET, DAN TEKNOLOGI
REPUBLIK INDONESIA, 2022
Matematika Tingkat Lanjut untuk SMA/MA Kelas XII
Penulis: Wikan Budi Utami, dkk
ISBN 978-602-244-771-9 (jilid 2)



Bab 2 Limit

PENGALAMAN BELAJAR

Setelah mempelajari bab ini diharapkan kalian mampu:

- Menjelaskan konsep limit dan limit fungsi;
- Mengidentifikasi sifat-sifat limit fungsi;
- Menentukan nilai limit fungsi;
- Menentukan nilai limit fungsi di tak hingga;
- Menerapkan konsep dasar limit fungsi dalam menyelesaikan masalah kehidupan sehari-hari.

Tradisi dan budaya di Indonesia sangatlah beragam. Tahukah kalian tentang Pacu Jawi? Pacu Jawi merupakan salah satu tradisi di Kabupaten Tanah Datar, Sumatra Barat, Indonesia. Pacu Jawi hampir sama dengan tradisi Karapan Sapi yang berasal dari Madura, Jawa Timur, Indonesia. Kesamaan dua kegiatan berbalut budaya tersebut melibatkan satu penunggang yang memacu sepasang sapi dengan kecepatan tinggi dan harus bergerak lurus kurang lebih 100 m di sawah. Selain dapat dilihat dari panjang lintasan antara Pacu Jawi dan Karapan Sapi, perbedaan dua tradisi ini dapat dilihat dari waktu dilaksanakan kegiatan tersebut, Karapan Sapi dilakukan pada sekitar bulan Agustus hingga Oktober, sedangkan Pacu Jawi dilaksanakan pada akhir panen padi.

Gambar 2.1. Tradisi Pacu Jawi di Kabupaten Tanah Datar Sumatra Barat.
Sumber www.freepik.com/omcayip (2019)

Penunggang Pacu Jawi atau penunggang Karapan Sapi (sering disebut dengan joki), perlu memperkirakan kecepatan yang tepat agar mampu mengendalikan arah laju sepasang sapi tersebut hingga dapat bergerak lurus. Oleh karena itu, terdapat batas atau limit kecepatan yang dapat ditoleransi oleh penunggang ketika mengendalikan laju sepasang sapi dalam tradisi Pacu Jawi dan Karapan Sapi. Menurut kalian, bagaimanakah cara memperkirakan batas atau limit kecepatan tersebut? Adakah suatu cara matematis untuk memperkirakan batas kecepatan tersebut?

Limit secara bahasa dapat dimaknai dengan batas, mendekati sesuatu, atau teramat dekat tetapi tidak dapat menjangkaunya. Begitu juga pada matematika, konsep limit secara umum dapat dimaknai dengan batas.

Limit merupakan salah satu konsep matematika yang dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan seperti yang terjadi pada Karapan Sapi dan Pacu Jawi. Pada bab Limit akan membahas tentang limit fungsi aljabar dan limit fungsi trigonometri. Faktor penting dalam mempelajari limit adalah kalian harus memahami konsep dan definisi limit, termasuk sifat-sifat limit.

Bagaimanakah menerapkan konsep dasar limit dalam menyelesaikan permasalahan? Adakah permasalahan bentuk lain yang dapat diselesaikan menggunakan konsep limit? Semua pertanyaan tersebut akan terjawab ketika kalian mempelajari materi pada bab ini.

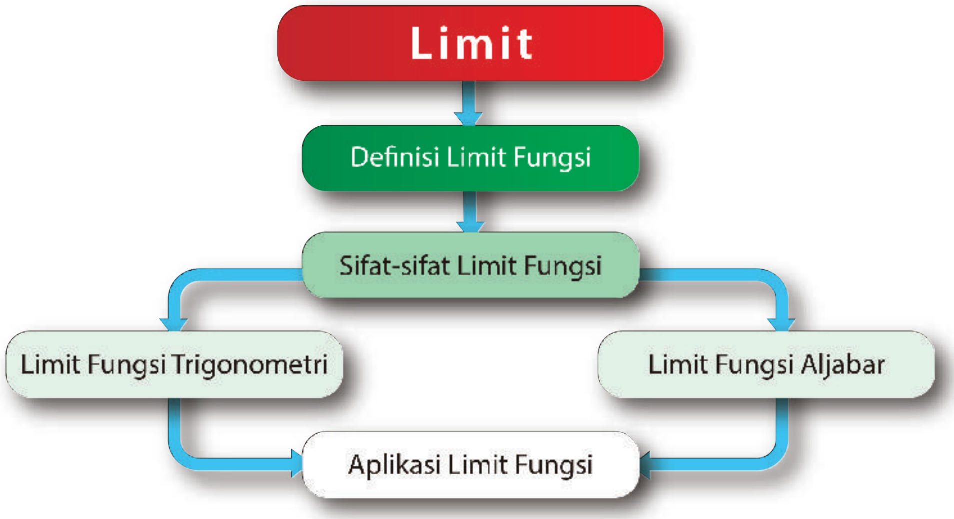
Pertanyaan Pemantik

1. Bagaimanakah menentukan limit fungsi?
2. Bagaimanakah menerapkan sifat-sifat limit fungsi dalam menentukan nilai limit fungsi?
3. Bagaimanakah menerapkan konsep dasar limit fungsi dalam menyelesaikan masalah sehari-hari?

Kata Kunci

Limit, Limit Fungsi Aljabar, Limit Fungsi Trigonometri, Sifat-sifat Limit Fungsi, Limit Fungsi di Tak Hingga.

Peta Konsep



A. Definisi Limit Fungsi

Ayo Bereksplorasi

Eksplorasi 2.1 Definisi Limit Fungsi

Pada permasalahan sebelumnya, kalian telah mengenal batas atau limit kecepatan sapi dalam Pacu Jawi. Dalam Pacu Jawi, penunggang (joki) mengendalikan sapi dengan cara menggenggam ekornya. Semakin kuat penunggang menggenggam ekor sapi, semakin cepat pula laju sapi tersebut. Hal ini berarti besarnya kekuatan genggaman pada ekor sapi mengakibatkan kecepatan meningkat, sedangkan besar kecilnya kecepatan berpengaruh terhadap arah laju sapi. Oleh karena itu, penunggang perlu menentukan besarnya kekuatan genggaman yang tepat pada ekor sapi, agar kecepatannya tidak mengakibatkan arah laju sapi menyimpang meskipun dengan kecepatan tinggi.

Misalkan seorang joki Pacu Jawi menggenggam ekor sapi dengan kekuatan sebesar 38 kg, ternyata sapi dapat bergerak lurus dengan kecepatan 1 meter per detik (m/s). Kekuatan genggaman terus dinaikan yang mengakibatkan kecepatan semakin tinggi, namun sapi masih bergerak lurus. Saat penunggang menaikkan kekuatan genggaman menjadi sebesar 40 kg, kecepatan sapi mencapai 1,9 m/s, namun sapi bergerak menyimpang. Kekuatan genggaman kemudian diturunkan secara perlahan hingga arah gerak sapi berangsur mulai lurus. Perubahan kekuatan genggaman penunggang dan kecepatan sapi tersebut dapat dilihat pada Tabel 2.1.

Tabel 2.1. **Kecepatan Sapi dalam Pacu Jawi.**

Kekuatan Genggaman (kg)	38,00	38,40	38,80	38,90	.....	39,00	.....	39,10	39,20	39,60	40,00
Kecepatan (m/s)	1,00	1,25	1,59	1,599	.....	?	.....	1,6001	1,601	1,65	1,9

Ayo Berdiskusi

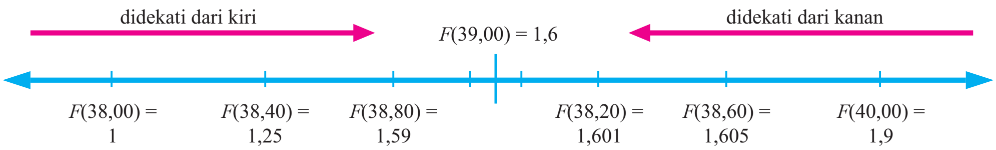
Diskusikan dengan teman kalian untuk menjawab pertanyaan berikut:

1. Taksirlah besar kecepatan sapi saat kekuatan genggaman penunggang mendekati 39 Kg!
2. Apakah besar kecepatan sapi yang kalian taksir merupakan nilai yang tepat?

3. Apabila kecepatan sapi dinyatakan dalam sebuah fungsi $f(x)$ dengan x menyatakan kekuatan genggaman penunggang. Jika nilai x mendekat ke 39, maka nilai $f(x)$ akan mendekat ke kecepatan berapa?

Definisi limit fungsi secara intuitif

Pada kegiatan Ayo Bereksplorasi ini, kalian dapat menyatakan kecepatan sapi sebagai suatu fungsi $f(x)$ dengan x menyatakan kekuatan genggaman penunggang dalam Pacu Jawi. Nilai fungsi $f(x)$ tersebut secara sederhana dapat diilustrasikan dalam sebuah garis bilangan yang dapat dilihat pada Gambar 2.2.



Gambar 2.2. Ilustrasi Nilai Fungsi $f(x)$ dalam Garis Bilangan.

Pada Gambar 2.2, nilai $f(x)$ untuk x = 38,00 bernilai 1; nilai $f(x)$ untuk x = 38,40 bernilai 1,25; nilai $f(x)$ untuk x = 38,80 bernilai 1,59; nilai $f(x)$ untuk x = 38,90 bernilai 1,599; dan nilai $f(x)$ untuk x = 39,00 bernilai 1,6. Ini berarti bahwa limit $f(x)$ untuk x mendekati 39 dari arah kiri bernilai 1,6. Apabila kalian melihat dari sisi kanan, diperoleh bahwa nilai $f(x)$ untuk x = 40,00 bernilai 1,9; nilai $f(x)$ untuk x = 39,60 bernilai 1,65; nilai $f(x)$ untuk x = 39,20 bernilai 1,601, dan nilai $f(x)$ untuk x = 39,10 bernilai 1,6001.

Dari penjelasan ini, dari arah kiri limit $f(x)$ untuk x mendekati 39 bernilai 1,6. Begitu juga dengan nilai limit $f(x)$ untuk x mendekati 39 dari arah kanan juga bernilai 1,6. Hal ini berarti bahwa limit $f(x)$ untuk x mendekati 39 bernilai 1,6. Kesimpulan ini menjadi dasar dalam memformulasikan definisi limit fungsi berikut.

Definisi

Misalkan f sebuah fungsi $f : R \to R$.

- $\lim\limits_{x \to c} f(x)$, berarti untuk x mendekati c, maka $f(x)$ mendekati L,
- jika limit kiri $\lim\limits_{x \to c^-} f(x)$ ada dan limit kanan $\lim\limits_{x \to c^+} f(x)$ ada, sehingga $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = \lim\limits_{x \to c^+} f(x) = L$ maka $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$

Catatan: $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ dibaca limit $f(x)$, untuk x mendekati c sama dengan L

Contoh Soal 2.1

Perkirakan nilai $\lim_{x \to 5}(x+1)$ dengan definisi intuitif!

Alternatif Penyelesaian:

Nilai fungsi $f(x) = x + 1$ untuk x mendekati 5, dapat dilihat pada Tabel 2.2 berikut.

Tabel 2.2. Nilai $f(x) = x + 1$ untuk x mendekati 5

x	4	4,5	4,99	4,999	.....	5	.....	5,001	5,01	5,5	6
$f(x)$	5	5,5	5,99	5,999	.....	6	.....	6,001	6,01	6,5	7

Berdasarkan Tabel 2.2 di atas, diperoleh.

Untuk x mendekati 5 dari sebelah kiri, nilai $f(x)$ mendekati 6, artinya $\lim_{x \to 5^-}(x+1) = 6$

Untuk x mendekati 5 dari sebelah kanan, nilai $f(x)$ mendekati 6, artinya $\lim_{x \to 5^+}(x+1) = 6$

Hal ini berarti $\lim_{x \to 5^-}(x+1) = \lim_{x \to 5^+}(x+1) = 6$, akibatnya $\lim_{x \to 5}(x+1) = 6$.

Ayo Mencoba

Pada bagian ini, kalian dapat melengkapi jawaban Latihan Soal Terbimbing 2.1 dan 2.2 yang masih terbuka. Jawaban yang hilang ditulis dengan "....". Kegiatan ini bertujuan agar kalian dapat memahami konsep definisi limit.

Latihan Soal Terbimbing 2.1

Perkirakan nilai $\lim_{x \to 6}(3x-1)$ dengan pemahaman intuitif!

Alternatif Penyelesaian:

Untuk menentukan nilai fungsi $f(x) = 3x - 1$ untuk x mendekati 6, kalian dapat melengkapi Tabel 2.3 berikut.

Tabel 2.3. Nilai $f(x) = 3x - 1$ untuk x mendekati 6.

x	....	....	....	....	....	6	....	....	....	....	....
$f(x)$	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....

Berdasarkan Tabel 2.3, diperoleh ....

Jadi, ...

Latihan Soal Terbimbing 2.2

Perkirakan nilai $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ dengan pemahaman intuitif!

Alternatif Penyelesaian:

Untuk menentukan nilai fungsi $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ untuk x mendekati 3, kalian dapat melengkapi Tabel 2.4 berikut.

Tabel 2.4. Nilai $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ untuk x mendekati 3.

x	....	....	....	....	....	3	....	....	....	....	....
$f(x)$	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....

Berdasarkan Tabel 2.4, diperoleh ....

Jadi, ...

Latihan Soal Terbimbing 2.3

Perkirakan nilai $\lim_{x \to 2} (x - 2)(x^2 + 2)$ dengan pemahaman intuitif!

Alternatif Penyelesaian:

Untuk menentukan nilai fungsi $f(x) = (x - 2)(x^2 + 2)$ untuk x mendekati 2, kalian dapat melengkapi Tabel 2.5 berikut.

Tabel 2.5. Nilai $f(x) = (x - 2)(x^2 + 2)$ untuk x mendekati 2

x	....	....	....	....	....	2	....	....	....	....	....
$f(x)$	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....

Berdasarkan Tabel 2.4, diperoleh ....

Jadi, ...

Video Pembelajaran

Kalian dapat melihat penjelasan definisi limit fungsi dengan *scan barcode* disamping, atau berselancar pada link *Youtube* https://www.youtube.com/watch?v=We67Bimd6cA

Ayo Mencoba

Latihan Soal 2.1

1. Tentukan limit fungsi $f(x)$, dengan cara menentukan nilai-nilai fungsi di sekitar titik yang didekati
   a. $f(x) = x^2 - 1$, jika x mendekati 0.
   b. $f(x) = (x^2 - 4x)$, jika x mendekati 3.
2. Perkirakan nilai dari fungsi $f(x)$ berikut dengan menggunakan definisi intuitif
   a. $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2 - 2x + 1\right)$.
   b. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(x^2 - 4\right)}{x-2}$.
3. Suatu fungsi $f(x)$ ditentukan dengan aturan $f(x)\begin{cases} -2x, \text{untuk } x > 0 \\ \frac{1}{2}x, \text{untuk } x \le 0 \end{cases}$

   Tentukan limit berikut ini dengan cara menentukan nilai-nilai fungsi $f(x)$ di sekitar titik yang di dekati
   a. $\lim\limits_{x\to 1} f\left(x\right)$.
   b. $\lim\limits_{x\to 0} f\left(x\right)$.

B. Sifat-Sifat Limit Fungsi

Ayo Bereksplorasi

Eksplorasi 2.2 Sifat-sifat Limit Fungsi

Pada kegiatan sebelumnya, kalian telah mempelajari definisi limit fungsi. Pada kegiatan kali ini, kalian akan mempelajari sifat-sifat limit fungsi melalui pemahaman intuitif. Sifat-sifat limit fungsi tersebut akan menjadi dasar dalam menentukan limit fungsi aljabar dan trigonometri.

Misalkan fungsi $f(x)$:$R\to R$ didefinisikan oleh $f(x) = 4$. Gantilah kolom yang berisi tanda tanya (?) dengan nilai $f(x)$ yang tepat pada beberapa Tabel 2.6, kemudian tentukan nilai limitnya!

Tabel 2.6. Nilai $f(x)$ untuk x mendekati 1

x	0	0,9	0,99	0,999	.....	1	.....	1,001	1,01	1,1	1,2
$f(x)$	4	?	4	?	.....	?	.....	4	?	4	2

Misalkan fungsi $g(x) : R \to R$ didefinisikan oleh $g(x) = x$. Gantilah kolom yang berisi tanda tanya (?) dengan nilai $g(x)$ yang tepat pada Tabel 2.7, kemudian tentukan nilai limitnya!

Tabel 2.7. Nilai $g(x)$ untuk x mendekati 1

x	0	0,9	0,99	0,999	.....	1	.....	1,001	1,01	1,1	1,2
$f(x)$	?	?	1	?	.....	?	.....	1	?	1	?

Ayo Berpikir Kritis

Berdasarkan kegiatan eksplorasi pada sifat-sifat limit, jika $f(x) = k$ dan $g(x) = x$ berapakah nilai dari $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ dan $\lim\limits_{x \to c} g(x)$, untuk c dan k anggota bilangan real?

Sifat-sifat

Sifat 2.1

Misalkan $f(x) = k$ dan $g(x) = x$ adalah fungsi-fungsi yang terdefinisi di R dan mempunyai limit di c, serta k konstanta, maka $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} k = k$ dan $\lim\limits_{x \to c} g(x) = \lim\limits_{x \to c} x = c$.

Melalui kegiatan yang sama, kalian dapat menemukan beberapa sifat limit fungsi lainnya seperti:

Misalkan $f(x)$ dan $g(x)$ adalah fungsi-fungsi yang terdefinisi di R dan mempunyai limit di c, k konstanta, dan $n > 0$, maka berlaku:

Sifat 2.2 $\lim\limits_{x \to c} \left(kf(x)\right) = k \lim\limits_{x \to c} f(x)$

Sifat 2.3 $\lim\limits_{x \to c} \left(f(x) \pm g(x)\right) = \lim\limits_{x \to c} f(x) \pm \lim\limits_{x \to c} g(x)$

Sifat 2.4 $\lim\limits_{x \to c} \left(f(x) g(x)\right) = \left(\lim\limits_{x \to c} f(x)\right)\left(\lim\limits_{x \to c} g(x)\right)$

Sifat 2.5 $\lim\limits_{x \to c} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{\lim\limits_{x \to c} f(x)}{\lim\limits_{x \to c} g(x)}$ dengan $\lim\limits_{x \to c} g(x) \neq 0$

Sifat 2.6 $\lim\limits_{x \to c} \left(f(x)\right)^n = \left(\lim\limits_{x \to c} f(x)\right)^n$

Sifat 2.7 $\lim\limits_{x \to c} \left(\sqrt[n]{f(x)}\right) = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to c} f(x)}$

Ayo Berpikir Kreatif

Bagaimana cara kalian menunjukkan Sifat 2.2 hingga Sifat 2.7?
Buatlah kegiatan untuk menunjukkan sifat-sifat tersebut, berkolaborasilah dengan teman kalian!

Contoh Soal 2.2

Tentukan nilai dari $\lim\limits_{x \to 4}\left(\dfrac{x\sqrt{x}}{x^2+3}\right)$ dengan menerapkan sifat-sifat limit!

Alternatif Penyelesaian:

$$\lim_{x \to 4}\left(\frac{x\sqrt{x}}{x^2+3}\right) = \frac{\lim\limits_{x\to 4}\left(x\sqrt{x}\right)}{\lim\limits_{x\to 4}\left(x^2+3\right)} \qquad \text{(Sifat 2.5).}$$

$$= \frac{\left(\lim\limits_{x\to 4} x\right)\left(\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x}\right)}{\left(\lim\limits_{x\to 4} x^2\right)+\left(\lim\limits_{x\to 4} 3\right)} \qquad \text{(Sifat 2.4 dan 2.3).}$$

$$= \frac{\left(\lim\limits_{x\to 4} x\right)\left(\sqrt{\lim\limits_{x\to 4} x}\right)}{\left(\lim\limits_{x\to 4} x^2\right)+\left(\lim\limits_{x\to 4} 3\right)} \qquad \text{(Sifat 2.7).}$$

$$= \frac{\left(\lim\limits_{x\to 4} x\right)\left(\sqrt{\lim\limits_{x\to 4} x}\right)}{\left(\lim\limits_{x\to 4} x\right)^2+\left(\lim\limits_{x\to 4} 3\right)} \qquad \text{(Sifat 2.6).}$$

$$= \frac{4\left(\sqrt{4}\right)}{4^2+3} = \frac{8}{19} \qquad \text{(Sifat 2.1).}$$

Contoh Soal 2.3

Tentukan nilai dari $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2-3x+2}$ dengan menerapkan sifat-sifat limit!

Alternatif Penyelesaian:

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{x^2-3x+2} = \sqrt{\lim_{x\to 0}\left(x^2-3x+2\right)} \qquad \text{(Sifat 2.7)}$$

$$= \sqrt{\lim_{x\to 0}\left(x^2\right)-\lim_{x\to 0}\left(-3x\right)+\lim_{x\to 0}\left(2\right)} \qquad \text{(Sifat 2.3)}$$

$$= \sqrt{\lim_{x\to 0}\left(x^2\right)-3\lim_{x\to 0}\left(x\right)+\lim_{x\to 0}\left(2\right)} \qquad \text{(Sifat 2.2)}$$

$$= \sqrt{\left(\lim_{x\to 0} x\right)^2-3\lim_{x\to 0}\left(x\right)+\lim_{x\to 0}\left(2\right)} \qquad \text{(Sifat 2.6)}$$

$$= \sqrt{0^2-3\left(0\right)+2} = \sqrt{2} \qquad \text{(Sifat 2.1)}$$

Ayo Mencoba

Pada bagian ini, kalian dapat melengkapi jawaban Latihan Soal Terbimbing 2.4 dan 2.5 yang masih terbuka. Jawaban yang hilang ditulis dengan "....". Kegiatan ini bertujuan agar kalian dapat memahami konsep sifat-sifat limit.

Latihan Soal Terbimbing 2.4

Dengan menggunakan sifat-sifat limit yang sudah kalian pelajari, tentukan nilai $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{\dfrac{x^3+8}{x\sqrt{3x}}}$!

Alternatif Penyelesaian:

$$\lim_{x \to 1} \sqrt{\frac{x^3+8}{x\sqrt{3x}}} = \text{........................} \quad \text{(Sifat 2.7)}$$

$$= \text{........................}$$

Latihan Soal Terbimbing 2.5

Dengan menggunakan sifat-sifat limit yang sudah kalian pelajari, tentukan nilai $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-6}{x^2-16x}$!

Alternatif Penyelesaian:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-6}{x^2-16x} = \text{........................} \quad \text{(Sifat 2.5)}$$

$$= \text{........................}$$

Latihan Soal 2.2

Gunakanlah sifat-sifat limit yang sudah kalian pelajari untuk menyelesaikan soal berikut.

1. Tentukan nilai dari
   a. $\lim\limits_{x \to 3} \left(x^2+2\right)$
   b. $\lim\limits_{x \to 2} \left(6x(x-3)(5x+6)\right)$
   c. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\left(\sqrt{5x+4}-\sqrt{16-7x}\right)\right)$
   d. $\lim\limits_{y \to 2} \sqrt{\frac{y^2}{2y^2-7y+3}}$
   e. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{x^2-4}{x-2}\right)$

2. Jika $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 2$, tentukan $\lim\limits_{x \to 0} \frac{g(x)}{1+\sqrt{x+1}}$! !

3. Jika $\lim\limits_{x \to 3} g(x) = 2$, tentukan $\lim\limits_{x \to 3} \left(g(x) \frac{-3}{\sqrt{x}+\sqrt{3}} \right)$!

C. Limit Fungsi Aljabar

Ayo Bereksplorasi

Eksplorasi 2.3 Nilai Limit Fungsi Aljabar

Kalian telah mempelajari bagaimana menentukan nilai limit fungsi menggunakan sifat-sifat limit fungsi. Pada sub bab ini, kalian akan mempelajari bagaimana menentukan nilai limit fungsi menggunakan beberapa cara. Sebelumnya, lakukanlah kegiatan berikut ini.

Latihan Soal Terbimbing 2.6

Dengan menggunakan sifat-sifat yang kalian pelajari pada bagian sebelumnya, tentukan $\lim\limits_{x \to 2} \left(x^4 - 5x^3 + x^2 - 7 \right)$!

Alternatif Penyelesaian:

$$\lim_{x \to 2} \left(x^4 - 5x^3 + x^2 - 7 \right) = \lim_{x \to 2} \ldots\ldots - \lim_{x \to 2} \ldots\ldots + \lim_{x \to 2} \ldots\ldots - \lim_{x \to 2} \ldots\ldots \quad \text{(Sifat 2.3)}$$

$$= \ldots\ldots\ldots - \ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots - \ldots\ldots\ldots \quad \text{(Sifat 2.2)}$$

$$= (2)^4 - \ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots - \ldots\ldots\ldots \quad \text{(Sifat 2.1 dan 2.6)}$$

$$= \ldots\ldots\ldots$$

Latihan Soal Terbimbing 2.7

Dengan menggunakan sifat-sifat yang kalian pelajari pada bagian sebelumnya, tentukan $\lim\limits_{x \to 2} \left(x^2 - 2x + 1 \right)$!

Alternatif Penyelesaian:

$$\lim_{x \to 2} \left(x^2 - 2x + 1 \right) = \lim_{x \to 2} \ldots\ldots - \lim_{x \to 2} \ldots\ldots + \lim_{x \to 2} \ldots\ldots - \lim_{x \to 2} \ldots\ldots \quad \text{(Sifat 2.3)}$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ayo Berpikir Kritis

Bersama dengan kelompok kalian, bandingkanlah soal berikut:

1. Hasil yang telah kalian peroleh pada Latihan Soal Terbimbing 2.5 dengan nilai $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 + 16x + 28}$ untuk $x = 2$.
2. Hasil yang telah kalian peroleh pada Latihan Soal Terbimbing 2.6 dengan nilai $f(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 - 7$ untuk $x = 2$.
3. Hasil yang telah kalian peroleh pada Latihan Soal Terbimbing 2.7 dengan nilai $f(x) = x^2 - 2x + 1$ untuk $x = 1$.

Kegiatan yang telah kalian lakukan pada Ayo Bereksplorasi dan Ayo Berpikir Kritis, akan menghasilkan sifat berikut.

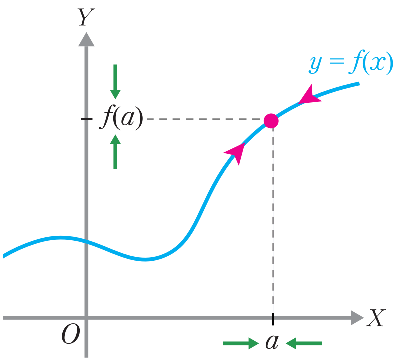
Sifat-sifat

Sifat Nilai Limit Fungsi

Misalkan f sebuah fungsi $f : R \to R$ yang kontinu di c, maka $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$

Catatan: fungsi polinomial, fungsi akar, fungsi rasional dan fungsi trigonometri merupakan fungsi yang kontinu di setiap titik dalam domainnya.

Pada sifat nilai limit fungsi tersebut, terdapat istilah fungsi kontinu, lalu apa fungsi kontinu? Untuk mempelajari fungsi kontinu perhatikan Gambar 2.3. Berdasarkan Gambar 2.3, jika f kontinu maka titik $(x, f(x))$ pada grafik f akan mendekati titik $(a, f(a))$. Untuk lebih jelas lagi, kalian dapat membandingkan dua buah fungsi $f(x) = x^2 - x$ dan $g(x) = \frac{1}{x-1}$. Dari kedua fungsi ini dapat dengan mudah diperoleh bahwa nilai $\lim\limits_{x \to 1}(x^2 - x) = 0$ dan $f(1) = 0$, artinya bahwa nilai $f(x)$ di $x = 1$ sama dengan nilai limitnya, yaitu 0. Fungsi $f(x)$ inilah yang disebut dengan fungsi kontinu di $x = 1$.



Gambar 2.3. Grafik Fungsi f Kontinu

Berbeda pada fungsi $g(x) = \frac{1}{x-1}$, untuk $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = \infty$, dan $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = -\infty$, diperoleh $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = \infty$. Hal ini berarti $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$ tidak ada. Begitu juga nilai fungsi $g(x)$ pada $x = 1$ adalah tidak terdefinisi. Beberapa temuan tersebut, menunjukkan fungsi $g(x)$ tidak kontinu.

Berdasarkan dua kasus di atas, diperoleh definisi berikut.

Definisi

Fungsi Kontinu

Fungsi $f: R \to R$ dikatakan kontinu di $a \in R$, jika

i. $f(a)$ ada (tertentu);

ii. $\lim_{x \to a} f(x)$ ada;

iii. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Kalian akan lebih memahami konsep fungsi kontinu dengan memperhatikan contoh berikut.

Contoh Soal 2.4

Diberikan fungsi $f : R \to R$ yang didefinisikan oleh $f(x) = x^2 - 2x + 1$. Selidiki apakah fungsi f kontinu di $x = 1$ dan gambarkan grafiknya!

Alternatif Penyelesaian:

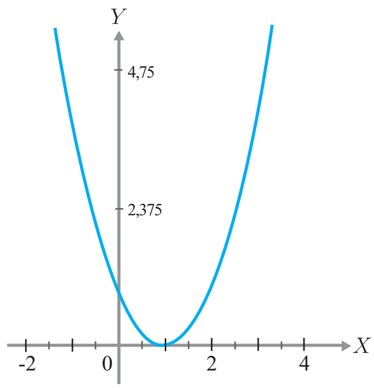
Untuk mengetahui apakah fungsi f kontinu di $x = 1$ cukup ditunjukkan bahwa f memenuhi tiga syarat suatu fungsi dikatakan kontinu, yaitu:

i. $f(1) = 1^2 - 2(1) + 1 = 0$ artinya $f(1)$ ada.

ii. $$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\left(x^2-2x+1\right) &= \lim_{x\to1}x^2 - \lim_{x\to1}2x + \lim_{x\to1}1\\ &= \left(\lim_{x\to1}x \lim_{x\to1}x\right) - \lim_{x\to1}2x + \lim_{x\to1}1\\ &= (1)(1) - 2(1) + 1 = 0\end{aligned}$$

iii. Berdasarkan i) dan ii) diperoleh bahwa $\lim_{x\to1}\left(x^2-2x+1\right) = f(1)$.

Karena ketiga syarat terpenuhi, maka dapat dikatakan bahwa fungsi f kontinu di $x = 1$. Adapun Grafik fungsi $f(x) = x^2 - 2x + 1$ dapat dilihat pada Gambar 2.4.

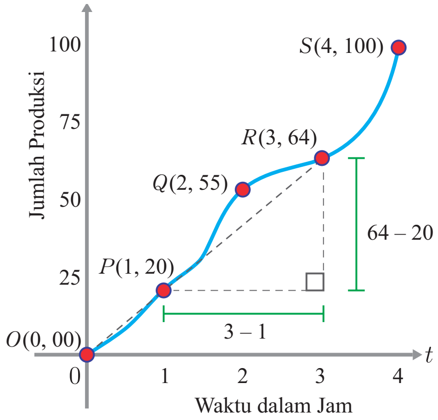


Gambar 2.4. Grafik Fungsi $f(x) = x^2 - 2x + 1$

Pada fungsi kontinu, terdapat beberapa kejadian khusus, salah satunya adalah garis sekan. Kalian dapat memahami garis sekan dengan mencermati kegiatan Ayo Bereksplorasi 2.4.

Eksplorasi 2.4

Kurva pada Gambar 2.5 menunjukkan produksi sepatu sebuah industri rumah tangga di Jakarta Selatan, Indonesia, dari jam 08.00 WIB hingga jam 12.00 WIB. Bagaimanakah kalian menentukan rata-rata produksi sepatu dari jam 09.00 WIB sampai jam 11.00 WIB? Pertanyaan tersebut dapat kalian jawab setelah melakukan kegiatan berikut ini.



Gambar 2.5. Kurva Laju Produksi Sepatu

Ayo Mengingat Kembali

Masih ingatkah kalian bagaimana menentukan kemiringan suatu garis lurus yang melalui dua buah titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$? Kemiringan garis yang melalui dua buah titik tersebut dapat ditentukan menggunakan formula $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

1. Pada Gambar 2.5 terdapat garis lurus $\overleftrightarrow{PR}$. Tentukan kemiringan garis tersebut!
2. Isilah titik-titik di bawah ini untuk menentukan rata-rata laju produksi sepatu dari jam 09.00 WIB sampai jam 11.00 WIB!

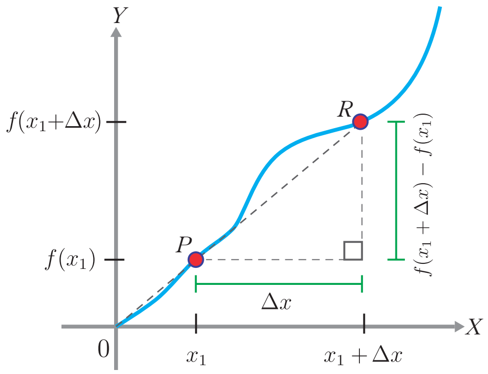
   Produksi dari jam 09.00 WIB sampai 11.00 WIB = 64 – 20 = 44 buah sepatu. Selang waktu =.... – .... = ... jam.

   Rata-rata laju produksi $= \frac{\text{Jumlah Produksi}}{\text{Waktu Produksi}} = \frac{44}{\ldots} = \ldots$ buah sepatu per jam.
3. Bandingkan kedua perhitungan tersebut! Apakah sama?

Ayo Berpikir Kritis

Cobalah simpulkan hasil dari membandingkan perhitungan pada kegiatan di atas!

Pada kegiatan ini, kalian menemukan bahwa laju perubahan produksi sepatu sama dengan kemiringan garis $\overleftrightarrow{PR}$ Misalkan koordinat titik P adalah $(x_1, f(x_1))$, maka dapat diperoleh hubungan seperti pada Gambar 2.6. Garis $\overleftrightarrow{PR}$ pada Gambar 2.6 merupakan garis sekan, yang didefinisikan sebagai berikut.



Gambar 2.6. Bentuk Lain dari Kurva Laju Produksi Sepatu

Definisi

Misalkan $f: R \to R$ fungsi kontinu, titik $P(x_1, f(x_1))$ dan $R(x_1 + \Delta x, f(x_1 + \Delta x))$ terletak pada kurva f. Garis yang menghubungkan titik P dan R adalah **Garis Sekan** dengan kemiringan

$$m = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Ayo Mengingat Kembali

Masih ingatkah kalian bentuk umum fungsi polinomial, rasional dan akar?
Berikut ini merupakan **bentuk umum** fungsi-fungsi tersebut.

- **Fungsi polinomial**
  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0$, n adalah anggota bilangan cacah, a_n, $a_{n-1}, \ldots, a_0$ anggota bilangan real.
- **Fungsi rasional**
  $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ dengan $P(x)$ dan $Q(x)$ fungsi polinomial dan $Q(x) \neq 0$.
- **Fungsi akar** tidak memiliki bentuk umum. Fungsi akar adalah yang memuat bentuk akar dari variabelnya yang dianggap sebagai fungsi akar.
- **Fungsi aljabar** terdiri dari tiga fungsi yang telah disebutkan di atas atau kombinasinya.

Ayo Berpikir Kreatif

Sifat nilai limit fungsi yang telah disampaikan sebelumnya, selanjutnya akan menjadi dasar dalam kalian menentukan nilai limit fungsi baik untuk fungsi aljabar dan fungsi trigonometri. Adakalanya, dalam menentukan nilai limit fungsi menggunakan sifat nilai limit fungsi tersebut hasilnya bentuk tak tentu seperti $\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}; \infty \pm \infty$; maupun bentuk 0^0 atau ∞^∞, seperti saat kalian menyelesaikan soal berikut:

1. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$
2. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 2x - 8}$
3. $\lim\limits_{x \to \infty} \left((2x - 1) - \sqrt{x^2 - 2x + 9} \right)$

Pada soal pertama, dengan menyubstitusikan $x = 2$ pada $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, diperoleh nilai sebesar $\frac{0}{0}$. Untuk soal kedua diperoleh nilai limit $\frac{\infty}{\infty}$, dan untuk soal ketiga diperoleh nilai limit $\infty - \infty$. Nilai yang diperoleh tersebut bukan merupakan nilai limitnya. Oleh karena itu, dibutuhkan strategi penyelesaian yang berbeda, menyesuaikan dengan bentuk fungsinya.

Secara umum, untuk menentukan nilai limit dari fungsi aljabar tersebut dapat ditentukan dengan mengikuti langkah berikut:

1. Terapkan sifat nilai limit fungsi yaitu $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$;
2. Pada fungsi rasional dan fungsi akar, jika hasilnya bentuk tak tentu yaitu: $\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}; \infty \pm \infty$; maupun bentuk 0^0 atau ∞^∞, terapkan (a) kaidah sifat-sifat limit fungsi, (b) ubah fungsi dengan cara memfaktorkan, (c) ubah fungsi dengan cara mengalikan dengan sekawannya, atau (d) bagi dengan pangkat tertingginya.

Kalian dapat memahami menerapkan sifat limit fungsi $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$ dengan mencermati Contoh Soal 2.5 dan Contoh Soal 2.6.

Contoh Soal 2.5

Tentukan nilai dari $\lim\limits_{x \to 2} (-3x^3 + 4x - 1)$!

Alternatif Penyelesaian:

$\lim\limits_{x \to 2} (-3x^3 + 4x - 1) = -3(2)^3 + 4(2) - 1 = -24 + 8 - 1 = -17.$

Jadi, nilai $\lim\limits_{x \to 2} (-3x^3 + 4x - 1) = -17.$

Contoh Soal 2.6

Tentukan nilai dari $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x^2-8}{x-2}\right)$!

Alternatif Penyelesaian:

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2-8}{x-2}\right)=\frac{3^2-8}{3-2}=\frac{9-8}{1}=1.$$

Jadi, nilai $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x^2-8}{x-2}\right)=1.$

Untuk materi tentang menentukan nilai limit fungsi bentuk tak tentu, kalian dapat mencermati Contoh Soal 2.7 hingga Contoh Soal 2.9.

Contoh Soal 2.7

Tentukan nilai dari $\lim\limits_{x\to -3}\left(\dfrac{x^2-x-12}{x+3}\right)$!

Alternatif Penyelesaian:

Untuk $\lim\limits_{x\to -3}\left(\dfrac{x^2-x-12}{x+3}\right)$ merupakan bentuk limit tak tentu, karena nilai $\lim\limits_{x\to -3}\left(\dfrac{x^2-x-12}{x+3}\right)$ adalah $\frac{0}{0}$. Untuk itu diperlukan strategi selain menggunakan sifat-sifat limit. Kalian bisa menggunakan strategi pemfaktoran, sehingga alternatif untuk menyelesaikannya adalah $\lim\limits_{x\to -3}\left(\dfrac{x^2-x-12}{x+3}\right)=\lim\limits_{x\to -3}\left(\dfrac{(x-4)(x+3)}{x+3}\right)=\lim\limits_{x\to -3}(x-4)=(-3-4)=-7.$

Jadi, nilai $\lim\limits_{x\to -3}\left(\dfrac{x^2-x-12}{x+3}\right)=-7.$

Contoh Soal 2.8

Tentukan nilai dari $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}\right)$!

Alternatif Penyelesaian:

Untuk $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}\right)$ merupakan bentuk limit tak tentu, karena nilai $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}\right)$ adalah $\frac{0}{0}$. Untuk itu diperlukan strategi selain menggunakan sifat-sifat limit. Kalian bisa menggunakan strategi mengalikan dengan faktor sekawannya, sehingga alternatif untuk menyelesaikannya adalah

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\right)\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}\right)\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{(\sqrt{x})^2-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right)=\frac{1}{\sqrt{1}+1}=\frac{1}{2}$$

Jadi, nilai $\lim_{x \to 1} \left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \right) = \frac{1}{2}$.

Contoh Soal 2.9

Tentukan nilai dari $\lim_{x \to \infty} \frac{7x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 10}{x^4 - 4x^3 - 3x^2 - 1}$!

Alternatif Penyelesaian:

Untuk $\lim_{x \to \infty} \frac{7x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 10}{x^4 - 4x^3 - 3x^2 - 1}$ merupakan bentuk limit tak tentu, karena nilai $\lim_{x \to \infty} \frac{7x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 10}{x^4 - 4x^3 - 3x^2 - 1}$ adalah $\frac{\infty}{\infty}$. Untuk itu diperlukan strategi selain menggunakan sifat-sifat limit. Kalian bisa menggunakan strategi membagi bilangan pangkat tertinggi. Pada persamaan polinomial $\frac{7x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 10}{x^4 - 4x^3 - 3x^2 - 1}$ pangkat tertingginya adalah x^4, sehingga dengan pembagi x^4 diperoleh

$$\lim_{x \to \infty} \frac{7x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 10}{x^4 - 4x^3 - 3x^2 - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{\left(\frac{7x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 10}{x^4} \right)}{\left(\frac{x^4 - 4x^3 - 3x^2 - 1}{x^4} \right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{7 - \frac{6}{x} + \frac{5}{x^2} + \frac{10}{x^4}}{1 - \frac{4}{x} - \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^4}} = \lim_{x \to \infty} \frac{7 - \frac{6}{\infty} + \frac{5}{\infty} + \frac{10}{\infty}}{1 - \frac{4}{\infty} - \frac{3}{\infty} - \frac{1}{\infty}}$$

$$= \frac{7}{1} = 7$$

Jadi, nilai $\lim_{x \to \infty} \frac{7x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 10}{x^4 - 4x^3 - 3x^2 - 1} = 7$.

Ayo Mencoba

Pada bagian ini, kalian dapat melengkapi jawaban Latihan Soal Terbimbing 2.8 hingga 2.11 yang masih terbuka. Jawaban yang hilang ditulis dengan "....". Kegiatan ini bertujuan agar kalian dapat memahami konsep nilai limit fungsi aljabar.

Latihan Soal Terbimbing 2.8

Tentukan nilai dari $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}$!

Alternatif Penyelesaian:

Untuk $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}$ merupakan bentuk limit tak tentu, karena nilai $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}$ adalah $\frac{0}{0}$.

Dengan menggunakan faktorisasi, kalian dapat menyelesaikan $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}$.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[6]{x}+2\right)}{\sqrt[3]{x}}$ ....

Jadi, nilai $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}$ adalah ....

Latihan Soal Terbimbing 2.9

Tentukan nilai dari $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{x}$!

Petunjuk

Faktor sekawan dari $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$ adalah $\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}$

Alternatif Penyelesaian:

Untuk $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{x}$ merupakan bentuk limit tak tentu, karena nilai $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{x}$ adalah $\frac{0}{0}$. Dengan menggunakan faktor sekawan , kalian dapat menyelesaikan

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{x}$.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{x}\right)\left(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}\right)$ ....

Jadi, nilai $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{x}$ adalah ....

Cek Dengan *Photomath*

Kalian dapat cek jawaban yang telah kalian peroleh menggunakan *Photomath*. Hasil yang diperoleh untuk Latihan Soal terbimbing 2.9 adalah 1.

Latihan Soal Terbimbing 2.10

Tentukan nilai dari $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2}\right)$!

Alternatif Penyelesaian:

Untuk $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2}\right)$ merupakan bentuk limit tak tentu, karena nilai $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2}\right)$ adalah $\infty - \infty$. Dengan menggunakan faktor sekawan, kalian dapat menyelesaikan $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2}\right)$.

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2}\right)\left(\text{..............................}\right)\right)$ ....

Jadi, nilai $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{x}$ adalah ....

Latihan Soal Terbimbing 2.11

Tentukan nilai dari $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-4}{2x^2+x+1}$!

Alternatif Penyelesaian:

Untuk menyelesaikan $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-4}{2x^2+x+1}$, kalian bisa menggunakan pembagi pangkat tertinggi. Dengan menggunakan x^2 untuk membagi fungsi $\frac{3x^2-4}{2x^2+x+1}$, diperoleh

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-4}{2x^2+x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2-4}{x^2}}{\frac{2x^2+x+1}{x^2}}.$$

....

Jadi, nilai $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-4}{2x^2+x+1}$ adalah ....

Ayo Mencoba

Latihan Soal 2.3

1. Tentukan nilai dari limit berikut

   a. $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\frac{x^3-7}{x-3}}$

   b. $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{\frac{x^2-16}{x-4}}$

   c. $\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{(h-1)^3+1}{h}\right)$

   d. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$

2. Tentukan nilai limit berikut

   a. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+7}{\sqrt{4x^2+3x}}\right)$

   b. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{2x-2}\right)$

   c. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3-2x-x^2+6x^5+6}{3x^4-5-2x+2x^5}$

   d. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+4x-3}-(2x-5)\right)$

3. Jika fungsi $f(x)=x+\frac{x^2}{\sqrt{x^2-2x}}$, tentukan $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$!

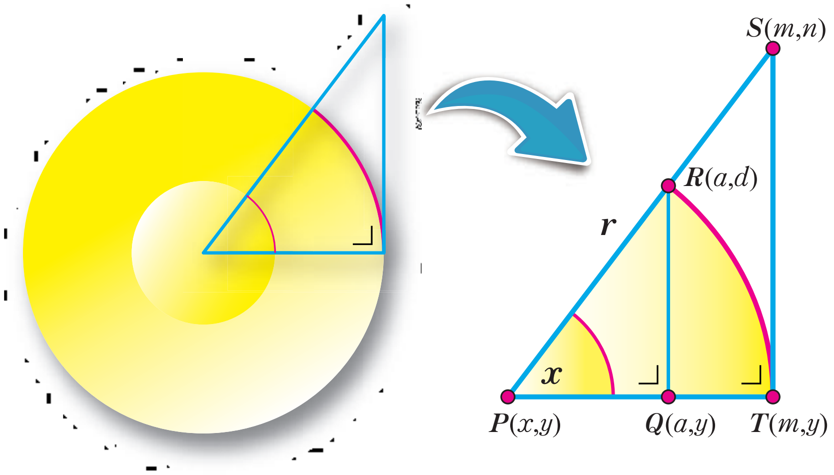
D. Limit Fungsi Trigonometri

Cara yang digunakan dalam menentukan nilai limit fungsi trigonometri tidak jauh berbeda ketika menentukan nilai limit fungsi aljabar, yaitu dengan menggunakan sifat $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$. Namun, terdapat formula tertentu untuk menentukan nilai limit fungsi trigonometri tertentu menyesuaikan dengan bentuk fungsinya. Bagaimanakah bentuk formula tersebut? Untuk mengetahuinya kalian lakukan kegiatan Eksplorasi 2.5.

Ayo Bereksplorasi

Eksplorasi 2.5

Perhatikan Gambar 2.7, lengkapilah beberapa pertanyaan yang muncul. Jawaban dari pertanyaan tersebut dapat diisikan pada bagian yang belum terisi. Dalam hal ini bagian yang perlu diisi adalah bagian yang masih tertulis "....".



Gambar 2.7. Interpretasi Geometri Sudut Pusat Lingkaran.

Berdasarkan Gambar 2.7, titik $P(x,y)$ adalah pusat lingkaran yang berjari-jari $PR = PT = r$. Sudut TPR $\angle TPR$ adalah sudut lancip, misalkan besar sudut tersebut adalah x (dalam radian). Garis singgung di titik $T(m,y)$ memotong garis PR di titik $S(m,n)$. Titik $Q(a,y)$ adalah proyeksi titik $R(a,d)$ pada garis PT. Dari pernyataan ini diperoleh:

1. Terdapat 2 buah segitiga, yaitu ΔPQR dan ΔPTS.
2. Terdapat juring lingkaran yaitu juring PTR.

3. Luas ΔPQR adalah

$$L_{\Delta PQR} = \frac{1}{2}(PQ)(QR)$$
$$= \frac{1}{2}(\ldots\cos x)(\ldots\sin x)$$
$$= \frac{1}{2}(\ldots\ldots)^2 \cos x \sin x$$

4. Luas ΔPTS adalah

$$L_{\Delta PTS} = \frac{1}{2}(PT)(TS)$$
$$= \frac{1}{2}(\ldots\ldots)(\ldots\tan x)$$
$$= \frac{1}{2}(\ldots\ldots)^2 \tan x$$

5. Luas juring $PTR = \frac{x}{2\pi}$ (luas lingkaran).

Luas juring $PTR = \frac{x}{2\pi} \times (\ldots) = \frac{1}{2}\, x(\ldots)^2$.

Dari luas ΔPQR, ΔPTS dan luas juring PTR, dapat diperoleh hubungan Luas $\Delta PQR <$ Luas Juring $PTR <$ Luas ΔPTR, sehingga diperoleh

$$\frac{1}{2}r^2 \cos x \sin x < \frac{1}{2}xr^2 < \frac{1}{2}r^2 \tan x.$$
$$\cos x \sin x < x < \tan x.$$
$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Pada kegiatan Eksplorasi 2.4 ini kalian telah memperoleh hubungan antara luas ΔPQR, ΔPTS dan Luas juring PTR adalah $\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$.

Jika $x \to 0$, maka $\cos x = 1$. Hal ini berarti bahwa $1 < \frac{x}{\sin x} < 1$. Jadi, nilai $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$.

Bentuk $\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$, dapat pula dinyatakan dalam $\cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}$,

Jika $x \to 0$, maka $\cos x = 1$. Hal ini berarti bahwa $1 < \frac{\sin x}{x} < 1$. Jadi, nilai $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Ayo Berdiskusi

Kalian telah memperoleh sifat $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ dan $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Diskusikanlah dengan kelompok kalian untuk menunjukkan sifat

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\tan x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$

Sifat-sifat

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin ax}{bx} = \dfrac{a}{b}$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{bx}{\sin ax} = \dfrac{b}{a}$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{bx}{\tan ax} = \dfrac{b}{a}$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan ax}{bx} = \dfrac{a}{b}$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin ax}{\sin bx} = \dfrac{a}{b}$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan ax}{\tan bx} = \dfrac{a}{b}$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin ax}{\tan bx} = \dfrac{a}{b}$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan ax}{\sin bx} = \dfrac{a}{b}$

Ayo Berpikir Kreatif

Dengan menggunakan hubungan yang telah kalian peroleh pada Ayo Bereksplorasi. Dapatkah kalian menunjukkan sifat-sifat limit fungsi trignometri tersebut?

Beberapa sifat limit fungsi aljabar yang telah dipelajari sebelumnya masih digunakan untuk menyelesaikan permasalahan yang berkaitan dengan limit fungsi trigonometri. Perhatikan contoh soal berikut untuk memahami penggunaan sifat limit fungsi trigonometri tersebut!

Contoh Soal 2.10

Tentukan nilai dari $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x^2}{3x}$!

Alternatif Penyelesaian:

Dari $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x^2}{3x}$, dengan menggunakan rumus $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin ax}{bx} = \dfrac{a}{b}$, diperoleh bahwa $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{3x} = \dfrac{2}{3}$.

Jadi, nilai dari $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x^2}{3x}$ adalah $\dfrac{2}{3}$.

Contoh Soal 2.11

Tentukan nilai dari $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x}$!

Alternatif Penyelesaian:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = 2$$

Jadi, nilai dari $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x}$ adalah 2.

Contoh Soal 2.12

Tentukan nilai dari $\lim_{t \to 0} \frac{\cot 5t}{\cot 10t}$!

Alternatif Penyelesaian:

Apabila kalian menyubstitusikan $t = 0$ ke $\lim_{t \to 0} \frac{\cot 5t}{\cot 10t}$, maka kalian akan memperoleh nilai limit tak tentu, karena kalian akan memperoleh nilai $\frac{0}{0}$.

Ayo Mengingat Kembali

Pada materi nilai limit fungsi aljabar, jika diperoleh nilai limit tak tentu, maka dapat digunakan (a) kaidah sifat-sifat limit fungsi, (b) ubah fungsi dengan cara memfaktorkan, (c) ubah fungsi dengan cara mengalikan dengan sekawannya, atau (d) bagi dengan pangkat tertingginya.

Pada nilai limit fungsi-fungsi trigonometri, selain kalian menggunakan sifat-sifat limit fungsi aljabar, kalian juga harus mengingat kembali definisi sinus sudut, cosinus sudut, tangen sudut, dan identitas trigonometri.

Dengan menggunakan definisi $\cot x = \frac{1}{\tan x}$, maka $\lim_{t \to 0} \frac{\cot 5t}{\cot 10t}$ menjadi

$$\lim_{t \to 0} \frac{\cot 5t}{\cot 10t} = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{1}{\tan 5t}}{\frac{1}{\tan 10t}} = \lim_{t \to 0} \frac{\tan 10t}{\tan 5t} = \lim_{t \to 0} \left(\frac{\tan 10t}{\tan 5t}\right).$$

Dengan menggunakan sifat $\lim_{x \to 0} \frac{\tan ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$, maka $\lim_{t \to 0} \left(\frac{\tan 10t}{\tan 5t}\right) = \frac{10}{5} = 2.$

Jadi, nilai $\lim_{t \to 0} \left(\frac{\tan 10t}{\tan 5t}\right)$ adalah 2.

Contoh Soal 2.13

Tentukan nilai dari $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{x\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}$!

Alternatif Penyelesaian:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\left(\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{x}\right)\left(\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}\right)\right)$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{x}\right) \lim_{x\to\frac{1}{2}\pi} \left(\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}\right) = \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}}\right)\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{0}{\left(\frac{\pi}{2}\right)}(0) = 0$$

Jadi, nilai $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}$ adalah 0.

Ayo Mencoba

Pada bagian ini, kalian dapat melengkapi jawaban Latihan Soal Terbimbing 2.12 hingga 2.14 yang masih terbuka. Jawaban yang hilang ditulis dengan "....". Kegiatan ini bertujuan agar kalian dapat memahami konsep nilai limit fungsi aljabar.

Latihan Soal Terbimbing 2.12

Tentukan nilai dari $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x + 2x}{\sin x + 2x}$!

Alternatif Penyelesaian:

Dari $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x + 2x}{\sin x + 2x}$ dengan mengalikan $\frac{1}{2x}$ untuk pembilang dan penyebut diperoleh bahwa $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x + 2x}{\sin x + 2x} = \lim_{x\to 0} \left(\left(\frac{2x + \tan x}{2x + \sin x}\right)\left(\frac{\frac{1}{2x}}{\frac{1}{2x}}\right)\right)$

....

.Jadi, nilai $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x + 2x}{\sin x + 2x}$ adalah ....

Cek Dengan *Photomath*

Kalian dapat memeriksa jawaban yang telah kalian peroleh menggunakan *Photomath*. Hasil yang diperoleh untuk Latihan Soal terbimbing 2.12 adalah 1.

Latihan Soal Terbimbing 2.13

Tentukan nilai dari $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin x}$!

Alternatif Penyelesaian:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\left(\left(\frac{1-\cos x}{\sin x}\right)\left(\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right)\right).$$

....

.Jadi, nilai $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin x}$ adalah ....

Latihan Soal Terbimbing 2.14

Tentukan nilai dari $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}$!

Alternatif Penyelesaian:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\left(\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x}\right)$$

....

Jadi, nilai $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}$ adalah ....

Petunjuk

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
$= 1 - 2\sin^2 x$
$= 2\cos^2 x - 1$

Ayo Mencoba

Latihan Soal 2.4

1. Tentukan nilai dari:

   a. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 6x}$ b. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 7x + \tan 3x - \sin 5x}{\tan 9x - \tan 3x - \sin x}\right)$ c. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x^2 + x}{\sin x}\right)$ d. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos^2 x}{5x^2}\right)$

2. Tentukan nilai dari

   a. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2 x}{\cos^2 x}$ b. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\frac{2x-\pi}{\cos x}\right)$ c. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sec^2 x}{\tan^2 x}\right)$ d. $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sin x - \cos x}{1-\tan x}\right)$

3. Tentukan nilai dari $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, untuk fungsi $f(x) = \sin 2x$.

4. Tunjukkan bahwa $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{x}\right) = 1$

E. Aplikasi Limit Fungsi

Masalah Penyebaran Virus

Pada saat ini, seluruh dunia menghadapi masalah Covid-19. Seluruh negara di dunia menerapkan berbagai strategi untuk mengatasi penyebaran Covid-19. Salah satu strateginya adalah dengan pemberian vaksin kepada seluruh penduduknya. Dengan pemberian vaksin Covid-19, diharapkan dapat meringankan gejala bagi penduduk yang positif Covid-19 dan dapat memberikan imun yang baik bagi penduduk yang tidak terpapar Covid-19.

Gambar 2.8. Tenaga medis dan masyarakat yang menyukseskan program vaksin Covid-19
Sumber www.freepik.com/rawpixel-com (2021)

Permasalahannya, apakah vaksinasi tersebut dapat menekan jumlah penduduk terpapar virus Covid-19? Jika vaksinasi dilakukan untuk seluruh penduduk di suatu kota, berapa estimasi jumlah kasus positif Covid-19 pada kota tersebut? Pertanyaan tersebut dapat kalian jawab dengan menerapkan konsep dasar limit fungsi.

Contoh Soal 2.14

Salah satu kota di Indonesia akan melakukan vaksinasi untuk menekan jumlah kasus positif Covid-19. Target vaksinasi adalah penduduk dengan umur di atas 18 tahun karena belum ada vaksin untuk umur di bawahnya dan hanya bisa dilakukan pada penduduk yang belum pernah terpapar Covid-19. Jumlah penduduk kota tersebut adalah 57.260 orang, dengan 30% dari penduduk tersebut terkonfirmasi positif Covid-19. Satuan tugas penanganan Covid-19 di kota tersebut memodelkan fungsi $N(t) = 285000 - \sqrt{t^2 - t + (190,68)^3}$ yang mewakili jumlah penduduk positif Covid-19, dengan t menyatakan banyaknya vaksinasi. Jika terdapat 121.015 orang belum pernah terpapar Covid-19 berumur di bawah 18 tahun, berapakah penduduk yang positif Covid-19 dan sudah divaksin? Tentukan total kasus positif Covid-19 di kota tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

Berdasarkan permasalahan di atas, diketahui bahwa jumlah penduduk kota tersebut adalah 57.260, 30% dari penduduk positif Covid-19, dan terdapat 121.015 orang belum pernah terpapar Covid-19 yang berumur di bawah 18 tahun. Karena vaksin hanya bisa diberikan pada penduduk dengan umur tidak kurang dari 18 tahun, maka target vaksinasi dapat ditentukan dengan menggunakan formula $= \left(576260 - \left(\frac{30}{100} \times 576260\right)\right) - 121015 = 282367$ orang. Fungsi $N(t) = 285000 - \sqrt{t^2 - t + (190,68)^3}$ mewakili jumlah penduduk positif Covid-19 dengan t mewakili banyaknya vaksinasi. Untuk menentukan jumlah penduduk yang positif Covid-19 yang divaksin dan total kasus positif Covid-19 di kota tersebut, perhatikan penyelesaian di bawah ini.

1. Vaksinasi tidak bisa dilakukan secara serentak, sehingga jumlah vaksinasi akan mendekati 282.367 orang. Berdasarkan hal ini, jumlah penduduk yang positif Covid-19 selama vaksinasi dapat dicari dengan formula

$$\lim_{t \to 282367} \left(285000 - \sqrt{t^2 - t + (190,68)^3}\right) = 285000\sqrt{(282367)^2 - 282367 + (190,68)^3}$$
$$= 2621,2238 \approx 2622 \text{ orang.}$$

   Jadi, jumlah penduduk yang positif Covid-19 selama vaksinasi adalah 2622 jiwa.

2. Total kasus positif Covid-19 di kota tersebut $= \left(\frac{30}{100} \times 576260\right) + 2622 =$ 175.500 orang.

Selain Contoh Soal 2.14, masih banyak permasalahan aplikasi limit fungsi dalam berbagai bidang. Oleh karena itu, untuk mengenal berbagai permasalahan tersebut, lakukanlah kegiatan Eksplorasi 2.6.

Ayo Bereksplorasi

Eksplorasi 2.6

Tema : Mengumpulkan soal aplikasi limit fungsi

Tujuan : Mempelajari penerapan limit fungsi dalam berbagai bidang ilmu

Alat dan Bahan : Alat tulis, buku kerja, komputer, smartphone, dan teknologi lain.

Kegiatan :

1. Buatlah kelompok yang terdiri dari 4 – 5 orang.
2. Carilah 5 soal penerapan limit fungsi dari berbagai sumber.
3. Selesaikan soal tersebut dengan cara berkolaborasi, diskusi, dan kerja sama dengan kelompok.
4. Salin hasil penyelesaian di buku kerja kelompok.
5. Presentasikan strategi penyelesaian di depan kelas.
6. Evaluasi hasil kerja kelompok kalian berdasarkan persentasi yang telah dilakukan.
7. Simpulkan hasil evaluasi tersebut.

Soal Berpikir Kreatif

Latihan Soal 2.5

1. Seorang dokter melakukan pemeriksaan denyut nadi pada pasiennya yang baru saja sembuh dari penyakit jantung. Pemeriksaan tersebut dilakukan untuk mengetahui apakah pasien tersebut kemungkinan akan mengalami serangan jantung lagi atau tidak. Banyaknya denyut nadi pasien tersebut dihitung dengan mengikuti fungsi estimasi $f(x) = 85 + \frac{(x^2 + x - 2)\cos\left(\frac{1}{x-1}\right)}{x^2 - 2x + 1}$ dengan x adalah waktu jantung berdetak. Apabila variabel yang menyebabkan penyakit jantung kambuh atau tidak hanya dilihat dari denyut nadi seseorang (standar denyut nadi manusia 60 sampai 100 kali per menit), apakah pasien tersebut berpeluang mengalami serangan jantung lagi? Berikan alasanmu!

2. Posisi suatu benda di udara yang jatuh dari ketinggian h_0 (dalam meter) dapat dinyatakan dengan persamaan $h(t) = h_0 - gt^2$ dengan $g = 10\ m/s^2$ merupakan percepatan gravitasi di tempat benda jatuh dan t (dalam detik) menyatakan lama benda telah berada di udara. Apabila suatu benda dijatuhkan dari ketinggian 250 meter dari permukaan tanah, tentukan setelah t detik benda ini berada pada ketinggian $h(t) = 250 - 10t^2$!

3. Jumlah penduduk kota A untuk t tahun dari sekarang ditaksir dan dinyatakan oleh fungsi berikut $f(t) = 50.000 + 10.000\ (t + 2)^2$. Berapa perkiraan jumlah penduduk kota A dalam waktu yang sangat lama di masa yang akan datang?

Ringkasan

Definisi Limit Fungsi

Misalkan f sebuah fungsi $f : R \to R$.

- $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ berarti untuk x mendekati c, maka $f(x)$ mendekati L.
- jika limit kiri ($\lim\limits_{x \to c^-} f(x)$) ada, dan limit kanan ($\lim\limits_{x \to c^+} f(x)$) ada, sehingga $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = \lim\limits_{x \to c^+} f(x) = L$ maka $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$.

Sifat-sifat Limit Fungsi

Misalkan $f(x)$ dan $g(x)$ adalah fungsi-fungsi yang terdefinisi di R dan mempunyai limit di c, k konstanta dan $n > 0$, maka berlaku sifat-sifat berikut

- $\lim\limits_{x \to c} k = k$ dan $\lim\limits_{x \to c} x = c$
- $\lim\limits_{x \to c} \left(kf(x)\right) = k \lim\limits_{x \to c} f(x)$
- $\lim\limits_{x \to c} \left(f(x) \pm g(x)\right) = \lim\limits_{x \to c} f(x) \pm \lim\limits_{x \to c} g(x)$
- $\lim\limits_{x \to c} \left(f(x)g(x)\right) = \left(\lim\limits_{x \to c} f(x)\right)\left(\lim\limits_{x \to c} g(x)\right)$
- $\lim\limits_{x \to c} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{\lim\limits_{x \to c} f(x)}{\lim\limits_{x \to c} g(x)}$ dan $\lim\limits_{x \to c} g(x) \neq 0$
- $\lim\limits_{x \to c} \left(f(x)\right)^n = \left(\lim\limits_{x \to c} f(x)\right)^n$
- $\lim\limits_{x \to c} \left(\sqrt[n]{f(x)}\right) = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to c} f(x)}$

Sifat Nilai Limit Fungsi

Misalkan f sebuah fungsi $f : R \to R$ yang kontinu di c, maka $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$

Strategi Menentukan Nilai Limit Fungsi

Terapkan menentukan nilai limit fungsi adalah

1. terapkan sifat nilai limit fungsi yaitu $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$;
2. pada fungsi rasional dan fungsi akar, jika hasilnya bentuk tak tentu yaitu: $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\infty \pm \infty$; maupun bentuk 0^0 atau ∞^∞ terapkan (a) kaidah sifat-sifat limit fungsi, (b) ubah fungsi dengan cara memfaktorkan, (c) ubah fungsi dengan cara mengalikan dengan sekawannya, atau (d) bagi dengan pangkat tertingginya.

Sifat-sifat Limit Fungsi Trigonometri

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin ax}{bx} = \dfrac{a}{b}$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin ax}{\sin bx} = \dfrac{a}{b}$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{bx}{\sin ax} = \dfrac{b}{a}$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan ax}{\tan bx} = \dfrac{a}{b}$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{bx}{\tan ax} = \dfrac{b}{a}$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin ax}{\tan bx} = \dfrac{a}{b}$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan ax}{bx} = \dfrac{a}{b}$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan ax}{\sin bx} = \dfrac{a}{b}$

Refleksi

Ayo Mengomunikasikan

Dalam bab ini, kalian telah mempelajari konsep dasar limit dan bagaimana menggunakan konsep tersebut dalam menentukan nilai limit fungsi maupun untuk menyelesaikan masalah sehari-hari.

- Apakah makna dari $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$?
- Bagaimanakah cara kalian menentukan nilai limit dari suatu fungsi di suatu titik?
- Bagaimanakah cara kalian menentukan nilai limit dari suatu fungsi di tak hingga?
- Berikan contoh permasalahan sehari-hari yang berkaitan dengan limit fungsi!

Uji Kompetensi

1. Tentukan nilai dari:

   a. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{(x+1)-\sqrt{10+2x}}$

   b. $\lim\limits_{x\to 1}\left(3x^2-2x+5\right)$

   c. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x-4}-\sqrt{9x-1}}{\sqrt{4x+5}-\sqrt{x-7}}\right)$

   d. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{10x^3+8x}{x+1}\right)^{\frac{1}{5}}$

2. Tentukan nilai dari:

   a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3 2x}{(x+1)-\sqrt{10+2x}}$

   b. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\cos x}{\sin 3x+\sin x}$

   c. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{8}}\left(\dfrac{\tan\left(6x-\frac{3}{4}\pi\right)}{\tan\left(2x-\frac{1}{4}\pi\right)}\right)$

   d. $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}\right)$

3. Sebuah mobil bergerak dapat dinyatakan dengan suatu fungsi $S(t) = t^2 + 5t$ (s dalam meter dan t dalam detik). Tentukan kecepatan mobil pada $t = 2$ detik!

Soal Berpikir Kreatif

4. Suatu lembaga sensus diminta memprediksi kepadatan penduduk maksimal di sebuah kota dengan luas 100 km^2. Lembaga menyatakan jumlah penduduk di kota tersebut dalam bentuk fungsi estimasi $f(x) = 35.000 + x\sin\frac{40.000}{x}$ dengan x mewakili tahun. Berapakah kepadatan penduduk maksimal kota tersebut? Apakah kota tersebut layak dihuni hingga jangka panjang? Berikan alasannya! (**Catatan**: suatu kota dikatakan layak huni jika tingkat kepadatan penduduknya tidak lebih dari 500 penduduk per km^2).

5. Sejenis penyakit menular disebabkan oleh bakteri yang memiliki spesifikasi kerja menyerang paru-paru. Bakteri tersebut biasanya menyebabkan batuk hebat pada orang yang terinfeksi saat jumlah bakteri mencapai 4000. Misalkan jumlah bakteri dinyatakan sebagai fungsi $N(t) = \frac{12000t}{15+2t}$ dalam puluhan, dengan t menyatakan waktu membelah diri dalam jam.

   a. Berapakah jumlah maksimum bakteri tersebut selama ia hidup?

   b. Kapankah orang yang terinfeksi dapat berpotensi menularkan kepada orang lain?

KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET, DAN TEKNOLOGI
REPUBLIK INDONESIA, 2022
Matematika Tingkat Lanjut SMA/MA Kelas XII
Penulis: Wikan Budi Utami, dkk
ISBN 978-602-244-771-9 (jilid 2)

Bab 3 Turunan Fungsi

PENGALAMAN BELAJAR

Setelah mempelajari bab ini diharapkan kalian mampu:

- Menjelaskan konsep turunan fungsi;
- Menemukan sifat-sifat turunan fungsi meliputi: formula turunan fungsi aljabar dan trigonometri, turunan hasil jumlah, selisih, kali dan bagi dua fungsi, serta turunan komposisi fungsi;
- Menentukan turunan fungsi aljabar dan trigonometri menggunakan sifat-sifat turunan;
- Mengidentifikasi konsep kemonotonan fungsi, titik dan nilai stasioner, serta jenis ekstrimnya;
- Menyelesaikan masalah sehari-hari dengan menerapkan konsep kemonotonan fungsi, titik dan nilai stasioner, serta jenis ekstrimnya.

Gambar 3.1. Pabrik Pembuatan Sepatu
Sumber www.freepik.com/(2021)

Tahukah kalian bahwa Indonesia termasuk 4 besar negara produsen sepatu di dunia? Pabrik pembuatan sepatu di Indonesia tercatat memproduksi minimal 1,41 miliar pasang sepatu per tahun. Besarnya produksi tersebut, tentunya tidak lepas dari Rencana Anggaran Pendapatan dan Belanja (RAPB) perusahaan yang bertujuan untuk melakukan estimasi keuntungan atau kerugian. Dalam RAPB tersebut terdapat rencana produksi meliputi banyaknya produksi, bahan produksi, anggaran biaya produksi, pendapatan minimal, dan sebagainya. Beberapa rancangan tersebut biasanya dinyatakan dalam suatu fungsi tertentu, sehingga dapat digunakan untuk memprediksi keuntungan atau kerugian dalam jangka waktu yang panjang. Bagaimanakah fungsi tersebut dapat memprediksi elemen-elemen dalam RAPB? Pertanyaan ini dapat kalian jawab setelah mempelajari materi pada bab ini. Turunan fungsi sangat bermanfaat untuk menentukan pendapatan maksimum dalam suatu produksi. Selain itu, konsep turunan fungsi dapat digunakan untuk memprediksi produksi barang yang telah disesuaikan dengan pajak dan subsidi.

Pertanyaan Pemantik

1. Bagaimanakah kalian menggunakan konsep dasar turunan fungsi untuk menyelesaikan masalah sehari-hari?
2. Bagaimanakah kalian menemukan konsep turunan fungsi dan sifat-sifat turunan fungsi?
3. Bagaimanakah cara kalian menentukan turunan fungsi aljabar dan trigonometri?
4. Bagaimanakah aplikasi turunan dalam kemonotonan fungsi dan titik stasioner?

Kata Kunci

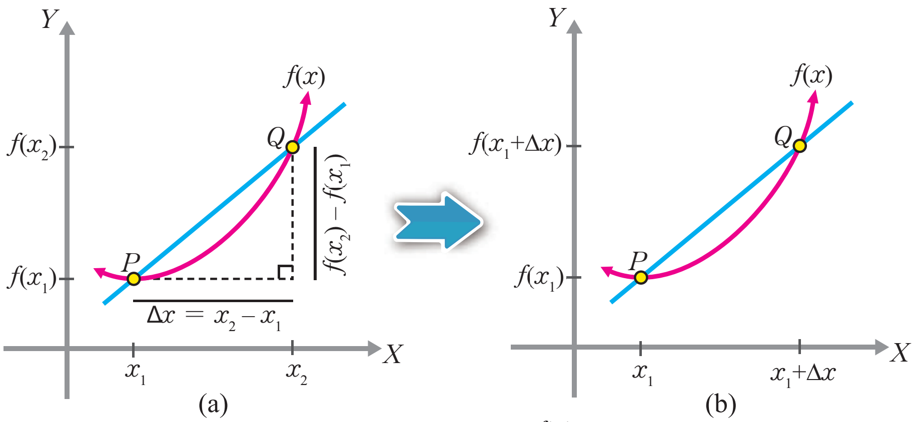
Turunan, Turunan Fungsi, Sifat-sifat Turunan Fungsi, Turunan Fungsi Aljabar dan Trigonometri, Kemonotonan fungsi, Nilai dan Titik Stasioner, Nilai dan Jenis Ekstrim.

Peta Konsep

A. Definisi Turunan Fungsi

1. Konsep Turunan Fungsi

Pada kegiatan Eksplorasi 2.4 bab sebelumnya, kalian telah memperoleh simpulan bahwa laju perubahan titik pada kurva sama dengan kemiringan garis lurus yang melalui titik-titik tersebut. Simpulan tersebut dapat diperumum untuk sembarang kurva $f(x)$ yang dapat kalian cermati pada Gambar 3.2.



Gambar 3.2. Kurva $f(x)$

Garis $\overleftrightarrow{PQ}$ pada Gambar 3.2 disebut sebagai garis sekan dengan kemiringan

$$m = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Ayo Berpikir Kritis

Pada Gambar 3.2, jika titik Q bergerak mendekati titik P, dapatkah kalian menentukan kemiringan garis sekan?

Pergerakan titik Q mendekati titik P mengakibatkan Δx mendekati 0, sehingga kemiringan garis sekan ketika titik Q mendekati titik P dapat dicari menggunakan formula $m = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$. Garis sekan dengan kemiringan di atas disebut sebagai garis singgung kurva $f(x)$ pada titik P.

Definisi

Turunan fungsi $f(x)$ di x dinotasikan $f(x)$ adalah $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ jika limitnya ada.

Video Pembelajaran

Kalian dapat melihat penjelasan definisi limit fungsi dengan *scan barcode* disamping, atau daring *Youtube* https://www.youtube.com/watch?v=eYC3V4tsYbM&t=8s

2. Penulisan Turunan Fungsi

Simbol turunan suatu fungsi berbeda-beda. Beberapa simbol penulisan turunan yang umum digunakan adalah sebagai berikut.

a. Notasi Newton, berbentuk $f(x)$ atau y' dan dikatakan turunan pertama fungsi $f(x)$.

b. Notasi Leibniz, berbentuk $\frac{df(x)}{dx}$ atau $\frac{dy}{dx}$ dan dikatakan turunan pertama fungsi $f(x)$.

B. Sifat-Sifat Turunan Fungsi

Pada bagian sebelumnya, kalian telah mengetahui definisi turunan suatu fungsi. Bentuk suatu fungsi beragam, sehingga dalam menurunkan suatu fungsi perlu menggunakan kaidah yang sesuai dengan jenis fungsinya. Oleh karena itu, terdapat beberapa sifat dalam menurunkan suatu fungsi. Kalian akan memahami sifat-sifat tersebut, setelah melakukan kegiatan berikut.

Ayo Bereksplorasi

Eksplorasi 3.1

Misalkan fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ kontinu pada R, dan didefinisikan oleh $f(x) = k$, $g(x) = ax^n$, dengan n bilangan asli maka:

1. $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{k-k}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 0 = 0.$

2. $g'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{a(x+\Delta x)^n - ax^n}{\Delta x}$ (Gunakan Binomial Newton).

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(a\left(x^n + nx^{n-1}\Delta x + c_2^n x^{n-2}\Delta x^2 + ... + \Delta x^n\right)\right) - ax^n}{\Delta x}.$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{ax^n + anx^{n-1}\Delta x + ac_2^n x^{n-2}\Delta x^2 + ... + a\Delta x^n - ax^n}{\Delta x}.$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{anx^{n-1}\Delta x + ac_2^n x^{n-2}\Delta x^2 + ... + a\Delta x^n}{\Delta x}.$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\left(anx^{n-1} + ac_2^n x^{n-2}\Delta x + ... + a\Delta x^n\right)}{\Delta x}.$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(anx^{n-1} + ac_2^n x^{n-2}\Delta x + ... + a\Delta x^n\right) = anx^{n-1} + 0 = anx^{n-1}.$$

Ayo Berpikir Kritis

Apakah nilai turunan $g(x)$ pada kegiatan Eksplorasi 3.1 juga berlaku untuk $n \neq 0$ dan $n \in R$? Selidikilah!

Sifat-sifat

Sifat 3.1

Misalkan $f(x) = k$ dan $g(x) = ax^n$ adalah fungsi-fungsi kontinu di R, $n \neq 0$, serta a dan k konstanta, maka $f'(x) = 0$ dan $g'(x) = anx^{n-1}$.

Melalui kegiatan yang sama, kalian dapat menemukan beberapa sifat turunan fungsi berikut.

Misalkan fungsi f kontinu, maka berlaku

Sifat 3.2 $f(x) = k\ u(x) \Rightarrow f'(x) = k\ u'(x)$.

Sifat 3.3 $f(x) = u(x) \pm v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$.

Sifat 3.4 $f(x) = u(x)v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.

Sifat 3.5 $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$, dengan $v(x) \neq 0$.

Sifat ini berakibat $f(x) = \dfrac{1}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-v'(x)}{v(x)^2}$, dengan $v(x) \neq 0$.

Sifat 3.6 $f(x) = [u(x)]^n \Rightarrow f(x) = n[u(x)]^{(n-1)}\, u'(x)$ dengan $u'(x)$ ada.

Ayo Berpikir Kreatif

Bagaimana cara kalian menunjukkan Sifat 3.2 hingga Sifat 3.6? Buatlah kegiatan untuk menunjukkan sifat-sifat tersebut! Lakukanlah bersama dengan teman kalian!

1. Turunan Fungsi Aljabar

Pada bagian sebelumnya, kalian telah mengetahui definisi turunan suatu fungsi dan sifat-sifat turunan fungsi. Fungsi aljabar terdiri dari tiga fungsi yaitu fungsi polinomial, rasional, dan akar, atau kombinasinya, sehingga dalam menurunkan fungsi aljabar perlu menggunakan kaidah yang sesuai dengan jenis fungsinya. Kaidah yang digunakan mengikuti sifat-sifat turunan fungsi yang telah kalian pelajari. Kalian akan memahami penggunaan sifat-sifat turunan fungsi tersebut setelah mencermati contoh di bawah ini.

Contoh Soal 3.1

Tentukan turunan pertama dari:

a. $y = f(x) = 4x^2 + x + 2$

b. $y = f(x) = x\sqrt{x^3}$

c. $y = f(x) = 2\left(\dfrac{x^2 + 2}{x}\right)$

Alternatif Penyelesaian:

a. $y' = 4(2)x^{2-1} + 1x^{1-1} = 8x^1 + x^0 = 8x + 1$ (Sifat 3, 1, Eksponen)

b. $y = x\sqrt{x^3} = x\left(x^{\frac{3}{2}}\right)$

Cara I: Misalkan $x = u(x)$ dan $x^{\frac{3}{2}} = v(x)$, maka

$y' = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$ (Sifat 3.4).

$$y' = \left(1x^{1-1}\right)\left(x^{\frac{3}{2}}\right) + \left(\frac{3}{2}\left(x^{\frac{3}{2}-1}\right)\right)x \qquad \text{(Sifat 3.1)}$$

$$y' = \left(x^{0}\right)\left(x^{\frac{3}{2}}\right) + \left(\frac{3}{2}\left(x^{\frac{3}{2}-1}\right)\right)x = 1\left(x^{\frac{3}{2}}\right) + \left(\frac{3}{2}\left(x^{\frac{3}{2}-1}\right)\right) \qquad \text{(Sifat Eksponen)}$$

$$y' = x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}\left(x^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} \qquad \text{(Sifat Aljabar)}$$

Cara II

$$y = x\left(x^{\frac{3}{2}}\right) = x^{1+\frac{3}{2}} = x^{\frac{5}{2}} \qquad \text{(Sifat Eksponen)}$$

$$y' = \frac{5}{2}\left(x^{\frac{5}{2}-1}\right) = \frac{5}{2}\left(x^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} \qquad \text{(Sifat 3.1)}$$

c. $y = 2\left(\frac{x^2+2}{x}\right)$

Misalkan $u(x) = x^2 + 2$ dan $v(x) = x$, maka maka $u'(x) = 2x$ dan $v'(x)$

$$y' = 2\left(\frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}\right) \qquad \text{(Sifat 3.2, 3.5)}$$

$$y' = 2\left(\frac{(2x^{2-1}+0)x - (x^2+2)(1x^{1-1})}{x^2}\right) \qquad \text{(Sifat 3.1)}$$

$$y' = 2\left(\frac{(2x)x - (x^2+2)(x^0)}{x^2}\right) \qquad \text{(Aljabar)}$$

$$y' = 2\left(\frac{2x^2 - (x^2+2)}{x^2}\right) = 2\left(\frac{x^2-2}{x^2}\right) = 2 - \frac{4}{x^2} \qquad \text{(Sifat Eksponen, Aljabar)}$$

Ayo Berpikir Kreatif

Carilah strategi lain untuk menyelesaikan Contoh Soal 3.1 bagian c!

Latihan Soal Terbimbing 3.1

Tentukan turunan pertama dari $y = \frac{\sqrt{x} + x^2}{2x}$!

Alternatif Penyelesaian:

Persamaan $y = \frac{\sqrt{x} + x^2}{2x}$ dapat dinyatakan dengan

$$y = \frac{\sqrt{x} + x^2}{2x} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{x} + x^2}{2x}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^{\frac{1}{2}} + x^2}{x}\right).$$

Misalkan $u(x) = x^{\frac{1}{2}} + x^2$ dan $v(x) = x$ maka $u'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 2x$ dan $v'(x) = 1$.

$$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{u(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} \right) = \frac{1}{2}\left(\frac{(\dots + \dots)x - (\dots + \dots)1x^{1-1}}{x^2} \right)$$ (Sifat 3.5, 3.1).

....

....

Cek Dengan *Photomath*

Kalian dapat cek jawaban yang telah kalian peroleh menggunakan *Photomath*. Hasil yang diperoleh untuk Latihan Soal Terbimbing 3.1 adalah

$$y' = -\frac{1}{4x\sqrt{x}} + \frac{1}{2}$$

Ayo Berpikir Kreatif

Carilah strategi lain untuk menyelesaikan Latihan Soal Terbimbing 3.1!

2. Turunan Fungsi Trigonometri

Cara yang digunakan dalam menentukan turunan fungsi trigonometri tidak jauh beda ketika menentukan turunan fungsi aljabar, yaitu dengan menggunakan sifat-sifat turunan fungsi. Sebelum menggunakan sifat-sifat turunan fungsi tersebut, kalian perlu mengetahui turunan fungsi trigonometri dasar. Bagaimanakah turunan fungsi trigonometri dasar tersebut? Untuk mengetahuinya lakukanlah kegiatan eksplorasi berikut.

Ayo Bereksplorasi

Eksplorasi 3.2

Misalkan fungsi f, g kontinu pada R, dan didefinisikan oleh $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$.

a. Menentukan turunan $f(x) = \sin x$.

Sesuai definisi turunan $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, maka

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin(x)}{\Delta x}.$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos\left(\frac{1}{2}(2x + \Delta x)\right)\sin\left(\frac{1}{2}\,x\right)}{\Delta x} \qquad \text{(Identitas Trigonometri)}$$

$$f'(x) = \left(\lim_{\Delta x \to 0} 2\cos\left(\frac{1}{2}(2x + \Delta x)\right)\right)\left(\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta x}{\Delta x}\right)\right) \qquad \text{(Sifat 2.4)}$$

$$f'(x) = \left(2\cos\left(\frac{1}{2}(2x)\right)\right)\left(\frac{1}{2}\right) = (2\cos x)\left(\frac{1}{2}\right) \qquad \text{(Sifat Limit Fungsi Trigonometri)}$$

$$f'(x) = 2\left(\frac{1}{2}\right)\cos x = \cos x$$

Petunjuk

$$\sin A - \sin B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Jadi, jika $f(x) = \sin x$ maka $f'(x) = \cos x$.

b. Menentukan turunan $g(x) = \cos x$.

Sesuai definisi turunan $g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$, maka

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos(x)}{\Delta x}.$$

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2\sin\frac{1}{2}(2x + \Delta x)\sin\frac{1}{2}x}{\Delta x} \qquad \text{(Identitas Trigonometri).}$$

$$g'(x) = \left(\lim_{\Delta x \to 0} -2\sin\left(\frac{1}{2}(2x + \Delta x)\right)\right)\left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{1}{2}\Delta x}{\Delta x}\right) \qquad \text{(Sifat 2.4).}$$

$$g'(x) = \left(-2\sin\left(\frac{1}{2}(2x)\right)\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \left(-2\sin x\right)\left(\frac{1}{2}\right) \qquad \text{(Sifat Limit Fungsi Trigonometri).}$$

$$g'(x) = (-2)\left(\frac{1}{2}\right)\sin x = -\sin x.$$

Jadi, jika $f(x) = \cos x$ maka $f(x) = -\sin x$.

Sifat-sifat

Sifat Turunan Trigonometri 3.1

Misalkan $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ adalah fungsi-fungsi yang kontinu di R, maka

$$f'(x) = \cos x \;\text{ dan }\; g(x) = -\sin x.$$

Melalui kegiatan yang sama, kalian dapat menemukan sifat-sifat turunan fungsi trigonometri berikut.

Misalkan fungsi f kontinu, maka berlaku

Sifat Turunan Trigonometri 3.2 $f(x) = \tan x \Rightarrow f'(x) = \sec^2 x$.
Sifat Turunan Trigonometri 3.3 $f(x) = \text{ctg}\ x \Rightarrow f'(x) = -\csc^2 x$.
Sifat Turunan Trigonometri 3.4 $f(x) = \sec x \Rightarrow f'(x) = \sec x\ \tan x$.
Sifat Turunan Trigonometri 3.5 $f(x) = \csc x \Rightarrow f'(x) = -\csc x\ \cot x$.

Ayo Berpikir Kreatif

Bagaimana cara kalian menunjukkan Sifat Turunan Trigonometri 3.2 hingga Sifat Turunan Trigonometri 3.5? Buatlah kegiatan untuk menunjukkan sifat-sifat tersebut, berkolaborasi dengan teman kalian!

Sifat-sifat yang dijelaskan di atas adalah turunan fungsi trigonometri dasar, tetapi untuk menentukan turunan dari bentuk fungsi trigonometri yang lebih kompleks, kalian dapat menggunakan sifat-sifat fungsi turunan yang telah kalian pelajari di bagian sebelumnya. Kalian akan memahami pernyataan tersebut setelah mencermati beberapa contoh berikut.

Contoh Soal 3.2

Tentukan turunan pertama dari:

a. $x = 2\sin x + 5x$.
b. $y = 2\sin x\ \tan x$.
c. $y = \dfrac{1+\cos x}{\sin x}$.

Alternatif Penyelesaian:

a. $y' = 2(\cos x) + 5x^{1-1}$ (Sifat 3.3, 3.2, 3.1, STT 3.1).
$y' = 2\cos x + 5x^0$ (Sifat Aljabar).
$y' = 2\cos x + 5$ (Sifat Eksponen).

b. $y = 2\sin x\ \tan x$.
Misalkan $\sin x = u(x)$ dan $\tan x = v(x)$, maka
$y' = 2(u'(x)v(x) + v'(x)\,u(x))$ (Sifat 3.2, 3.4).
$y' = 2(\cos x\ \tan x + \sec^2 x\ \sin x)$ (STT 3.1, 3.2).
$y' = 2\left(\cos x\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right) + \left(\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)\sin x\right)$ (Identitas Trigonometri).
$y' = 2\left(\sin x + \dfrac{\tan x}{\cos x}\right)$ (Identitas Trigonometri).
$y' = 2\sin x + \dfrac{2\tan x}{\cos x}$ (Sifat Aljabar).

c. $y = \dfrac{1+\cos x}{\sin x}$.

Misalkan 1 + cos $x = u(x)$ dan sin $x = v(x)$, maka

$$y' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} \qquad \text{(Sifat 3.5).}$$

$$y' = \frac{(-\sin x)\sin x - (1+\cos x)\cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos x - \cos^2 x}{\sin^2 x} \qquad \text{(STT 3.1, Sifat Aljabar).}$$

$$y' = \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x) - \cos x}{\sin^2 x} \qquad \text{(Sifat Aljabar).}$$

$$y' = \frac{-1-\cos x}{-1-\cos^2 x} \qquad \text{(Identitas Trigonometri).}$$

$$y' = -\frac{1+\cos x}{(1+\cos x)(1-\cos x)} = -\frac{1}{1-\cos x} = \frac{1}{\cos x - 1} \qquad \text{(Sifat Aljabar)}$$

Ayo Berpikir Kreatif

Carilah strategi lain untuk menyelesaikan Contoh Soal 3.2 nomor c!

Ayo Mencoba

Pada bagian ini, kalian dapat melengkapi jawaban Latihan Soal Terbimbing 3.2 yang masih terbuka. Jawaban yang hilang ditulis dengan "....". Kegiatan ini bertujuan agar kalian dapat memahami konsep turunan fungsi trigonometri.

Latihan Soal Terbimbing 3.2

Tentukan turunan fungsi $y = \dfrac{2\sqrt{x} + \sin x}{\cos x}$!

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan $2\sqrt{x}$ + sin $x = u(x)$ dan cos $x = v(x)$, maka

$$y' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v(x)'}{v(x)^2} \qquad \text{(Sifat 3.5).}$$

$$y' = \frac{\left(\left(2\left(\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}}\right) + ...\right)\cos x - (.....+.....)(-\sin x)}{..........} \qquad \text{(Sifat 3.1, STT 1).}$$

$$y' = \frac{\left(\frac{1}{.....} + ...\right)\cos x + \sin x(.....+.....)}{..........} = \frac{\frac{\cos x}{\sqrt{x}} + ... + \sin^{2x} + 2\sqrt{x}\,.....}{..........} \qquad \text{(Sifat Aljabar).}$$

$$y' = \frac{\frac{\cos x}{\sqrt{x}} + 1 + 2\sqrt{x}\,.....}{..........} \qquad \text{(Identitas Trigonometri).}$$

$$y' = \frac{\text{.........}}{\sqrt{x}\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\text{.........}}{\cos^2 x}$$ (Sifat Aljabar).

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x}\text{.....}} + \frac{1}{\text{.....}} + \frac{2\sqrt{x}\text{.....}}{\cos x}$$ (Identitas Trigonometri).

$$y' = \frac{1}{\text{.....}}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\cos x} + 2\sqrt{x}\text{.....}\right)$$ (Sifat Aljabar).

$$y' = \sec x\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sec x + 2\sqrt{x}\text{.....}\right)$$ (Identitas Trigonometri).

Ayo Berpikir Kreatif

Carilah strategi lain untuk menyelesaikan Latihan Soal terbimbing 3.2!

3. Aturan Rantai pada Turunan

Misalkan suatu fungsi komposisi $y = (f \circ g)(x)$ yang didefinisikan dengan $f(g(x))$, sehingga $y = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(u)$, dengan $u = g(x)$.

Jika $u = g(x)$ mengalami perubahan sebesar Δx menjadi $(x+\Delta x)$, maka

- $u = g(x)$ mengalami perubahan sebesar $\Delta g(x)$ menjadi $g(x+\Delta x)$, sehingga diperoleh $\Delta g(x) = g(x+\Delta x) - g(x)$ atau $g(x+\Delta x) = g(x) + \Delta g(x)$.
- $u = g(x)$ mengalami perubahan sebesar $\Delta g(x)$ menjadi $g(x+\Delta x)$, sehingga terdapat hubungan $\Delta f(g(x)) = f(g(x+\Delta x)) - g(x)$ atau $f(g(x+\Delta x)) = g(x) + \Delta f(g(x))$.

Dalam menyelesaikan permasalahan turunan yang berkaitan dengan fungsi komposisi, kalian dapat menggunakan teorema turunan fungsi komposisi.

Teorema

Jika fungsi $y = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(u)$, dengan $u = g(x)$, maka turunan fungsi komposisi $(f \circ g)(x)$ ditentukan oleh

$$(f \circ g)(x) = f'(g(x)) \text{ atau } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Teorema ini sering disebut dengan teorema rantai atau dalil rantai.

Contoh Soal 3.3

Tentukan turunan dari $y = (x^2 - 4x - 2)^8$!

Alternatif Penyelesaian:

$y = (x^2 - 4x - 2)^8$, misalkan $u = x^2 - 4x - 2$, maka $\frac{du}{dx} = 2x - 4$.

$y = (x^2 - 4x - 2)^8$ dapat dinyatakan dengan $y = u^8$, sehingga $y = u^8$ adalah $8u^7$.

Dengan menggunakan aturan rantai, maka $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 8u^7(2x - 4)$.

Substitusikan $u = x^2 - 4x - 2$ pada persamaan ini, sehingga diperoleh

$\frac{dy}{dx} = 8u^7(2x - 4) = 8(x^2 - 4x - 2)^7 (2x - 4) = (16x - 32)(x^2 - 4x - 2)^7$.

Jadi, turunan pertama dari $y = (x^2 - 4x - 2)^8$ adalah $y' = (16x - 32)(x^2 - 4x - 2)^7$.

Ayo Mencoba

Pada bagian ini, kalian dapat melengkapi jawaban Latihan Soal Terbimbing 3.3 yang masih terbuka. Jawaban yang hilang ditulis dengan "....". Kegiatan ini bertujuan agar kalian dapat memahami konsep aturan rantai pada turunan.

Latihan Soal Terbimbing 3.3

Tentukan turunan dari $y = \sqrt[4]{(3x^2 - 1)^3}$!

Alternatif Penyelesaian:

$y = \sqrt[4]{(3x^2 - 1)^3}$, misalkan $u = 3x^2 - 1$ maka $\frac{du}{dx} = 6x$.

$y = \sqrt[4]{u^3}$ maka y dapat dinyatakan dengan $y = u^{\frac{3}{4}}$, sehingga $\frac{dy}{du} = \frac{3}{4}u^{-\frac{1}{4}}$.

Dengan menggunakan aturan rantai, maka diperoleh

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \text{...}$$

Substitusikan $u = 3x^2 - 1$ pada persamaan, sehingga diperoleh

$$\frac{dy}{dx} = \text{...}$$

Contoh Soal 3.4

Tentukan turunan pertama dari $y = \cos^4(3 - 4x)$!

Alternatif Penyelesaian:

$y = \cos^4(3 - 4x)$, misalkan $u = 3 - 4x$ maka $\frac{du}{dx} = -4$.

$y = \cos^4 u$ maka $\frac{dy}{du} = -4\cos^3 u \sin u$.

Dengan menggunakan aturan rantai, maka diperoleh

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (-4\cos^3 u \sin u)(-4) = 16 \cos^3 u \sin u.$$

Substitusikan $u = 3 - 4x$ pada persamaan, sehingga diperoleh

$$\frac{dy}{dx} = 16\cos^3 (3 - 4x) \sin(3 - 4x).$$

Ayo Berdiskusi

Diskusikan bersama kelompok kalian untuk memecahkan masalah berikut.

Seekor laba-laba merayap pada bidang kartesius XOY. Pada posisi t detik, laba-laba berada pada posisi $(x(t), y(t))$. Nilai $x(t)$ ditentukan oleh persamaan kurva $x(t) = t^2 - 4$, sedangkan $y(t)$ ditentukan oleh kurva $y(t) = t^2 - 2t + 6$. Tentukanlah:

a. persamaan yang menunjukkan pergerakan laba-laba pada bidang kartesius XOY.
b. posisi laba-laba pada $t = 2$ detik.
c. kecepatan laba-laba pada $t = 2$ detik (kecepatan dapat kalian temukan dengan mencari turunan pertama).

Ayo Mencoba

Latihan Soal 3.1

1. Tentukan turunan dari fungsi:

   a. $y = (3x^2 - 5)\cos x$ b. $y = \left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right)^{-4}$

   c. $y = \sqrt{\frac{1}{(2x+3)^3}}$ d. $y = (2 + \cos x)^4$

2. Jari-jari sebuah balon berbentuk bola bertambah panjang dengan laju 2 cm per detik. Tentukan laju bertambahnya luas permukaan dan volume balon berbentuk bola, jika jari-jari balon tersebut 30 cm!

3. Diketahui persamaan fungsi trigonometri $f(x) = 2 - 2 \sin \left(\frac{1}{2}\pi x\right)$ terdefinisi pada daerah asal $D_f = \{x \mid 0 \le x \le 4, x \in R\}$.

   Tentukan turunan pertama dari $f(x)$!

   Jika $f'(x)$ bernilai nol pada $x = x_1$ dan $x = x_2$, tentukan nilai dari $x_1^2 + x_2^2$!

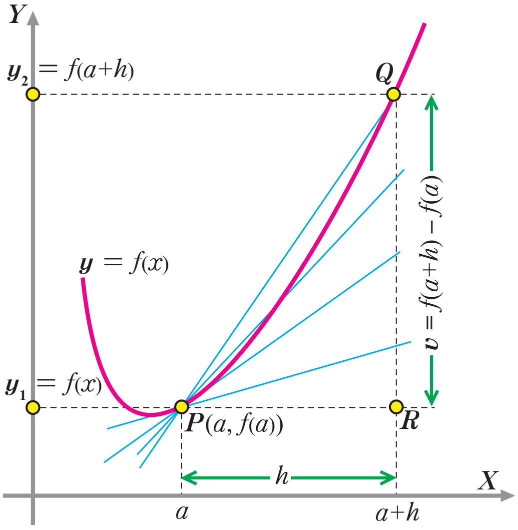
C. Aplikasi Turunan

1. Persamaan Garis Singgung pada Kurva

Ayo Bereksplorasi

Eksplorasi 3.3

Pada kegiatan ini kalian akan mempelajari tentang turunan fungsi $f(x)$ pada $x = a$ dengan persepsi geometri. Diberikan Gambar 3.3, terdapat kurva $y = f(x)$ dengan P dan Q adalah titik pada kurva tersebut. Titik $P(a,b)$ merupakan titik tetap dan titik Q adalah titik yang bergerak sepanjang lintasan kurva. Apabila ditarik garis lurus yang melalui titik P dan titik Q, maka garis lurus tersebut merupakan tali busur. Jika Q bergerak mendekati P sepanjang lintasan kurva $y = f(x)$, maka tali busur tersebut merupakan garis singgung kurva $y = f(x)$ pada titik $P(a,b)$. Jadi dengan kata lain, garis singgung kurva $y = f(x)$ pada titik $P(a,b)$ merupakan proses limit dari tali busur PQ ketika titik Q bergerak mendekati titik P.



Gambar 3.3. Garis Singgung Kurva $f(x)$

Pada Gambar 3.3, titik $P(a,b)$ atau $P(a,f(a))$, dan titik $Q((a+h), f(a+h))$, sehingga absis titik Q adalah $(a+h)$ dan ordinat titik Q adalah $f(a+h)$. Dengan menggunakan konsep kemiringan, diperoleh bahwa

$$m_{PQ} = \frac{QR}{PR} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Jika titik Q mendekati titik P maka nilai h akan mendekati nol, sehingga kemiringan tali busur PQ mendekati kemiringan garis singgung kurva $y = f(x)$ di titik P. sehingga kemiringan garis singgung kurva $y = f(x)$ dapat menggunakan konsep perhitungan limit.

$$m = \lim_{h\to 0} m_{PQ} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Berdasarkan definisi turunan bahwa $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$, maka untuk menentukan kemiringan persamaan garis singgung kurva $y = f(x)$ di titik $P(a,f(a))$, kalian dapat menggunakan konsep turunan fungsi $y = f(x)$ pada $x = a$. Dengan kata lain, kemiringan persamaan garis singgung $y = f(x)$ pada titik $(a,f(a))$ dapat dinyatakan dengan $f'(a) = \frac{d}{dx} f(a)$.

Untuk menentukan persamaan garis singgung kurva $y = f(x)$ pada titik $P(a,b)$ yang telah diketahui kemiringan garis singgung, kalian dapat mengunakan konsep menentukan persamaan garis yang diketahui kemiringan dan satu titik

$$(y - y_a) = m(x - x_a).$$

Sifat-sifat

Misalkan $P(a,b)$ adalah titik singgung kurva $y = f(x)$, maka
- kemiringan garis singgung kurva y pada titik P adalah $m = f(a)$;
- persamaan garis singgung kurva y pada titik P adalah $(y - b) = m(x - a)$.

Kalian dapat memperhatikan contoh di bawah ini agar lebih memahami konsep persamaan garis singgung $y = f(x)$.

Contoh Soal 3.5

Tentukan persamaan garis singgung pada parabola $y = 2 - 4x^2$ di titik $(1,-2)$!

Alternatif Penyelesaian:

Dari persamaan parabola $y = 2 - 4x^2$, maka $\frac{d}{dx} f(a) = -8x$. Kemiringan persamaan garis singgung pada titik $(1,-2)$ adalah $\frac{d}{dx} f(1) = -8$, sehingga persamaan garis singgung $y = 2 - 4x^2$ di titik $(1,-2)$ adalah $(y - y_a) = m(x - x_a)$.

$$(y + 2) = -8(x - 1).$$
$$y = -8x + 6.$$

Jadi, persamaan garis singgung $y = 2 - 4x^2$ di titik $(1,-2)$ adalah $y = -8x + 6$.

Ayo Mencoba

Pada bagian ini, kalian dapat melengkapi jawaban Latihan Soal Terbimbing 3.4 dan 3.5 yang masih terbuka. Jawaban yang hilang ditulis dengan "....". Kegiatan ini bertujuan agar kalian dapat memahami konsep persamaan garis singgung menggunakan turunan.

Latihan Soal Terbimbing 3.4

Tentukan persamaan garis singgung kurva $y = x^2 - x + 2$ di titik A dengan absis 1!

Alternatif Penyelesaian:

Titik singgung (x,y) dapat ditentukan dengan cara mensubstitusikan $x = 1$ pada kurva $y = f(x) = x^2 - x + 2$. Diperoleh $y = (1)^2 - 1 + 2 = 2$, sehingga titik singgungnya adalah $A(1,2)$. Selanjutnya, untuk menentukan kemiringan persamaan garis singgungnya, kalian dapat menggunakan cara

$\frac{d}{dx}f(1)$..

Berikutnya persamaan garis singgung kurva $y = x^2 - x + 2$ di titik $A(1,2)$, adalah

$(y - y_a) = m(x - x_a)$ ....

Latihan Soal Terbimbing 3.5

Tentukan persamaan garis singgung di titik potong garis $y = x + 1$ dengan parabola $y = x^2 + 2x + 1$!

Alternatif Penyelesaian:

Titik potong garis $y = x + 1$ dengan parabola $y = x^2 + 2x + 1$ adalah

$x + 1 = x^2 + 2x + 1.$

$x^2 + x = 0,$

diperoleh $x_1 = 0$ dan $x_2 = -1$.

Untuk $x_1 = 0$, maka $y = 0 + 1 = 1$, sehingga titik singgungnya adalah (0,1).

Untuk menentukan kemiringan persamaan garis singgung parabola $y = x^2 + 2x + 1$ di titik (0, 1) adalah

$\frac{d}{dx}f(0)$ ....

Berikutnya, persamaan garis singgung kurva $y = x^2 - x + 2$ di titik $A(1,2)$, adalah

....

Untuk $x_2 = -1$, maka $y = -1 + 1 = 0$, sehingga titik singgungnya adalah (–1,0).

Untuk menentukan kemiringan persamaan garis singgung parabola $y = f(x) = x^2 + 2x + 1$ di titik (–1,0) adalah

$\frac{d}{dx}f(-1)$...

Berikutnya, persamaan garis singgung kurva $y = x^2 + 2x + 1$ di titik $A(-1,0)$ adalah

....

Ayo Mencoba

Latihan Soal 3.2

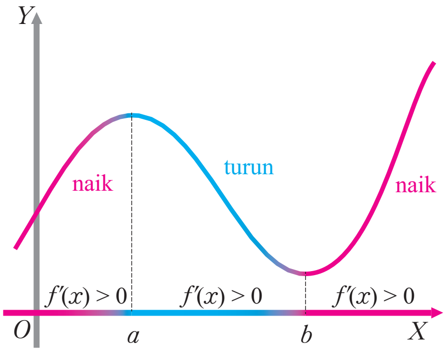
1. Carilah persamaan garis singgung dari:
   a. kurva $y = x^2 - 6\frac{1}{5}x + 14\frac{1}{2}$ yang sejajar dengan garis $x + 2y + 3 = 0$.
   b. parabola $y = 2x^2 - 3x + 5$ pada titik yang berordinat 4.
2. Suatu kurva $y = 3x - \frac{3}{x^2}$ memotong sumbu X di P. Carilah persamaan garis singgung kurva tersebut pada titik P !
3. Kurva $y = (x^2 + 2)^2$ memotong sumbu Y pada titik A. Tunjukkan bahwa garis singgung pada kurva tersebut melalui titik A sejajar sumbu X dan berjarak 4 satuan terhadap titik pusat koordinat!
4. Tentukan koordinat titik pada kurva $y = 2x^2 - 7x + 1$, jika garis singgung kurva melalui titik tersebut dan membentuk sudut 45° terhadap sumbu X positif. Tentukan pula persamaan garis singgung kurva yang melalui titik tersebut!

2. Fungsi Naik, Fungsi Turun, dan Diam (Stasioner)

Ayo Bereksplorasi

Eksplorasi 3.4

Perhatikan grafik fungsi $y = f(x)$ pada Gambar 3.4, untuk $x < a$ fungsi $f(x)$ naik, hal ini dikarenakan nilai absis (x) bergerak ke kanan tetapi grafik fungsi tersebut bergerak ke atas atau naik. Begitu juga pada $x > b$ merupakan fungsi naik. Untuk x di antara a hingga b atau $a < x < b$ merupakan fungsi turun karena nilai absis (x) bergerak ke kanan tetapi grafik fungsi tersebut bergerak ke bawah atau turun. Berdasarkan pernyataan tersebut, maka fungsi naik dan fungsi turun dapat didefinisikan sebagai berikut.



Gambar 3.4. Kemonotonan Grafik Fungsi $f(x)$

Definisi

Misalkan fungsi $f(x)$ terdefinisi dalam interval I.

Fungsi $f(x)$ dikatakan fungsi naik dalam interval I, jika untuk setiap bilangan x_1, x_2 dalam interval I dengan $x_1 < x_2$ maka berlaku $f(x_1) < f(x_2)$, atau ditulis

$$\text{Jika } x_1 < x_2 \text{ maka } f(x_1) < f(x_2).$$

Fungsi $f(x)$ dikatakan fungsi turun dalam interval I, jika untuk setiap bilangan x_1, x_2 dalam interval I dengan $x_1 < x_2$ maka berlaku $f(x_1) > f(x_2)$ atau ditulis

$$\text{Jika } x_1 < x_2 \text{ maka } f(x_1) > f(x_2).$$

Kalian harus ingat turunan pertama dari fungsi $f(x)$ yaitu $f'(x)$ secara geometris merupakan kemiringan suatu kurva $f(x)$ pada titik $(x, f(x))$. Interpretasi ini dapat digunakan untuk memeriksa perilaku suatu fungsi, yaitu:

- Pada interval $x < a$, untuk $f(x)$ fungsi naik, kemiringan garis singgungnya bernilai positif. Dengan kata lain $f'(x) > 0$.
- pada interval $x > a$, untuk $f(x)$ fungsi turun, kemiringan garis singgungnya bernilai negatif. Dengan kata lain $f'(x) < 0$.
- pada $x = a$, untuk $f(x)$ tidak naik dan tidak turun atau dikatakan bahwa $f(x)$ mempunyai nilai stasioner di $x = a$, kemiringan garis singgungnya pada titik $x = a$ bernilai nol atau $f'(x) = 0$.

Dari ketiga tingkah laku suatu fungsi tersebut dapat dinyatakan dengan suatu sifat yang berkaitan dengan fungsi naik, fungsi turun, dan stasioner.

Sifat-sifat

Misalkan fungsi $y = f(x)$ kontinu pada interval I dan $f(x)$ terdiferensiabel untuk setiap titik dalam I, jika x dalam interval tersebut jika

$f'(x) > 0$ maka fungsi $f(x)$ naik pada I;

$f'(x) < 0$ maka fungsi $f(x)$ turun pada I;

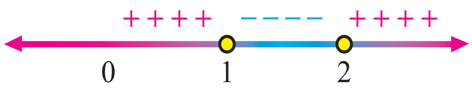
$f'(x) = 0$ maka fungsi $f(x)$ diam (stasioner) pada I.

Contoh Soal 3.6

Sebuah kurva $y = f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 10$, tentukanlah interval x agar $f(x)$ merupakan fungsi turun dan interval x agar $f(x)$ merupakan fungsi naik!

Alternatif Penyelesaian:

Turunan dari fungsi $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 10$ adalah $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$, maka $6x^2 - 18x + 12 = 0$. Dengan menggunakan pemfaktoran pada persamaan kuadrat $6x^2 - 18x + 12 = 0$, diperoleh bahwa $x = 2$ atau $x = 1$. Agar kurva $f(x)$ merupakan fungsi naik, maka syaratnya adalah $f'(x) > 0$, sedangkan syarat turun adalah $f'(x) < 0$. Ambil sembarang nilai x (selain $x = 1$ hingga $x = 2$), misalkan $x=0$, lalu substitusikan ke $f(x)$, sehingga $6x^2 - 18x + 12 = 6(0)^2 - 18(0) + 12 = 12 > 0$. Dengan menggunakan bantuan garis bilangan diperoleh bahwa:



Berdasarkan garis bilangan diperoleh bahwa untuk interval $x < 1$ dan $x > 2$, $f'(x)$ bernilai positif, sedangkan untuk $1 < x < 2$, $f'(x)$ bernilai negatif, sehingga $f(x)$ merupakan fungsi turun jika berada pada interval $1 < x < 2$. Pada interval $x < 1$ dan $x > 2$, $f(x)$ merupakan fungsi naik.

Ayo Mencoba

Pada bagian ini, kalian dapat melengkapi jawaban Latihan Soal Terbimbing 3.6 hingga 3.8 yang masih terbuka. Jawaban yang hilang ditulis dengan "....". Kegiatan ini bertujuan agar kalian dapat memahami konsep fungsi naik, fungsi turun, dan fungsi diam.

Latihan Soal Terbimbing 3.6

Diberikan kurva $g(x) = x(6 - x)^2$, tentukan batasan kurva $g(x)$ agar tidak pernah turun!

Alternatif Penyelesaian:

Diketahui bahwa kurva $g(x) = x(6-x)^2$.

Dengan mengingat sifat fungsi $f(x) = u(x)v(x)$ maka turunan fungsi tersebut adalah $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$, sehingga $g'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.

....

Untuk melihat hasil perhitungan, kalian bisa melihat hasil akhir $g'(x) = 36 - 24x + 3x^2$. Dari persamaan ini, grafik fungsi $g(x)$ tidak akan pernah turun jika $g'(x) > 0$, sehingga

....

Dengan menggunakan bantuan garis bilangan diperoleh bahwa:

....

Latihan Soal Terbimbing 3.7

Diketahui fungsi $f(x) = \frac{x}{x^2 - x - 1}$. Tentukan dalam interval berapa $f(x)$ naik dan dalam interval berapa $f(x)$ turun!

Alternatif Penyelesaian:

Untuk menentukan turunan pertama, kalian harus mengingat bahwa jika $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ maka $f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$. Berdasarkan persamaan fungsi $f(x) = \frac{x}{x^2 - x - 1}$,
Misalkan $u(x) = x$ dan $v(x) = x^2 - x + 1$, sehingga $f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$

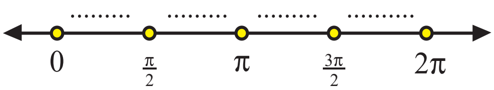
....

Latihan Soal Terbimbing 3.8

Diketahui fungsi $f(x) = \sin^2 x$ denan $0 < x < 2\pi$. Tentukan dalam interval berapa $f(x)$ dalam kondisi naik!

Alternatif Penyelesaian:

Diketahui bahwa $f(x) = \sin^2 x$ maka $f(x) = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$. Syarat bahwa fungsi $f(x)$ naik adalah ketika $f'(x) > 0$, yaitu $\sin 2x > 0$. Pembuat nol fungsi $\sin 2x$ adalah $\left(0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$. Dengan bantuan garis bilangan diperoleh bahwa



Dari garis bilangan diperoleh bahwa untuk interval ...., $f(x)$ bernilai positif, diperoleh $f(x)$ merupakan fungsi naik jika berada pada interval ....

Ayo Mencoba

Latihan Soal 3.3

1. Tentukan interval fungsi naik dan interval fungsi turun pada kurva
   a. $f(x) = x3 - 3x^2 - 15$.
   b. $f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 24$.
   c. $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}, x \neq 1$.
2. Jika fungsi $f(x) = ax^3 + x^2 + 5$ selalu naik dalam interval $0 < x < 2$, tentukanlah nilai dari koefisien a!
3. Tentukan interval fungsi naik dan turun jika diketahui kurva $f(x) = \sin 2x \cos 2x$!
4. Sebuah partikel bergerak sepanjang kurva $s(t) = t^3 - \frac{15}{2}t^2 + 18t - 1$, untuk $t \neq 0$.
   a. Tentukan kecepatan dan percepatan partikel dalam fungsi waktu t!
   b. Tentukan nilai t saat kecepatan partikel sama dengan nol!
   c. Tentukan pada interval mana kecepatan partikel negatif dan pada interval mana kecepatan partikel positif!
   d. Berapakah nilai t saat percepatan partikel sama dengan 0!

Ayo Berdiskusi

Dalam titik stasioner, kalian akan mengenal istilah nilai maksimum, nilai minimum, titik balik minimum, dan titik balik maksimum. Diskusikan bersama dengan teman-temanmu untuk membedakan keempat istilah tersebut!

3. Titik Ekstrim, Nilai Balik Minimum, dan Nilai Balik Maksimum

Pada Gambar 3.4, terlihat bahwa untuk $x = a$ dan $x = b$ dimana nilai $f(x)$ yang tidak naik dan tidak turun. Dalam konsep matematika, nilai $x = a$ dan nilai $x = b$ disebut dengan nilai stasioner atau titik diam. Secara umum, nilai stasioner ada dua jenis yaitu nilai stasioner minimum (ekstrim minimum) dan nilai stasioner maksimum (ekstrim maksimum).

Ayo Berdiskusi

Dengan memperhatikan bahwa $f(x) > 0$ merupakan fungsi naik dan $f(x) < 0$ merupakan fungsi turun. Diskusikanlah:

a. kapan kondisi suatu titik disebut dengan titik ekstrim minimum (stasioner minimum)?

b. kapan kondisi suatu titik disebut dengan titik ekstrim maksimum (stasioner maksimum)?

Contoh Soal 3.7

Tentukan titik stasioner untuk fungsi

a. $y = f(x)= x^2$.

b. $y = f(x) = x^2 + 2x - 3$.

Alternatif Penyelesaian:

a. $y = x^2$.

Nilai x yang menyebabkan suatu fungsi stasioner adalah nilai $f'(x) = 0$, sehingga

$f'(x) = 2x = 0$ atau $x = 0$.

Dengan mensyubstitusikan $x = 0$ ke persamaan $y = x^2$ diperoleh $y = 0$. Jadi titik stasioner terletak pada (0, 0).

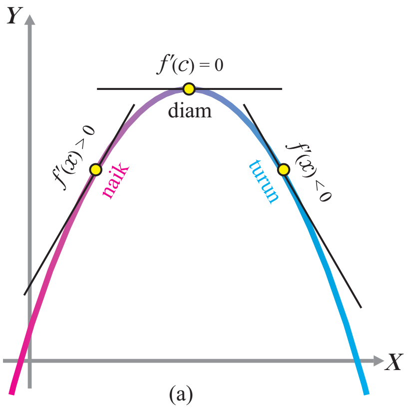
Ayo Mencoba

Pada bagian ini, kalian dapat melengkapi jawaban bagian b di bawah ini yang masih terbuka. Jawaban yang hilang ditulis dengan "....". Kegiatan ini bertujuan agar kalian dapat memahami konsep titik ekstrim, nilai balik minimum, dan nilai balik maksimum.

b. $y = x^2 + 2x - 3$.

....

a. Uji Turunan Pertama



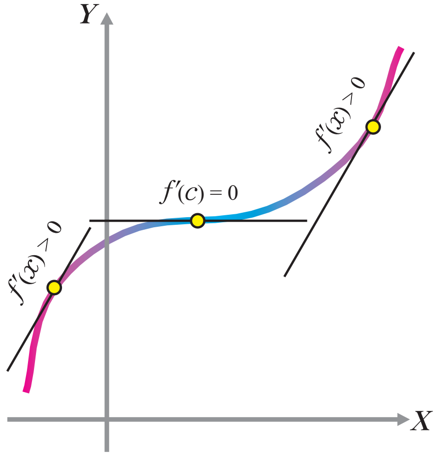
Gambar 3.5. Nilai Balik dari Kurva $f(x)$

Jika $f'(c) = 0$, maka $f(c)$ adalah nilai stasioner f pada c. Nilai stasioner pada grafik f dapat bernilai balik maksimum, minimum, atau titik belok horizontal. Jenis nilai stasioner ini dapat diidentifikasi dengan melihat tanda $f'(x)$ di sekitar $x = c$, seperti:

1. Jika $f(x)$ berubah tanda dari positif menjadi negatif setelah melalui nol, maka $\boldsymbol{f(c)}$merupakan **nilai balik maksimum** dari $f(x)$ sedangkan titik $(c, f(c))$ merupakan titik balik maksimum dari $f(x)$ (lihat Gambar 3.5 (a)).

2. Jika $f(x)$ berubah tanda dari negatif menjadi positif setelah melalui nol, maka $\boldsymbol{f(c)}$ merupakan **nilai balik minimum** dari $f(x)$ sedangkan $(c, f(c))$ merupakan titik balik minimum dari $f(x)$ (lihat Gambar 3.5 (b)).

3. Jika $f(x)$ tidak berubah tanda saat melalui nol, maka $f(x)$ mempunyai **titik belok horizontal** pada $\boldsymbol{c}$ atau $\boldsymbol{(c, f(c))}$ **merupakan titik belok horizontal** $\boldsymbol{f(x)}$ (lihat Gambar 3.6).



Gambar 3.6. Kurva Titik Belok Horizontal pada c dengan Titik Belok $(c, f(c))$

Contoh Soal 3.8

Tentukanlah nilai-nilai stasioner dari fungsi $f(x) = x(x - 3)^2$!

Alternatif Penyelesaian:

Turunan pertama dari $f(x) = x(x - 3)^2$ adalah $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$.
Nilai stasioner $f(x)$ diperoleh jika $f'(x) = 0$, sehingga $3x^2 - 12x + 9 = 0$.
Dengan menggunakan pemfaktoran pada persamaan kuadrat $3x^2 - 12x + 9 = 0$, diperoleh $x = 3$ atau $x = 1$.
Untuk $x = 3$ diperoleh bahwa $f(3) = 0$, dan untuk $x = 1$ diperoleh bahwa $f(1) = 4$.
Jadi $f(x)$ mempunyai nilai stasioner $f(3) = 0$ dan $f(1) = 4$, serta titik ekstrimnya (3,0) dan (1,4). Dengan menggunakan bantuan garis bilangan diperoleh bahwa nilai turunan pertama fungsi $f(x) = x(x - 3)^2$ di persekitaran absis 1 dan 3.

Dari garis bilangan tersebut terlihat bahwa nilai titik balik maksimum adalah 4, dan nilai titik balik minimum adalah 0.

Ayo Mencoba

Pada bagian ini, kalian dapat melengkapi jawaban Latihan Soal Terbimbing 3.9 yang masih terbuka. Jawaban yang hilang ditulis dengan "....". Kegiatan ini bertujuan agar kalian dapat memahami konsep titik ekstrim, nilai balik minimum, dan nilai balik maksimum.

Latihan Soal Terbimbing 3.9

Tentukan titik stasioner dari fungsi $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$ dan tentukan jenis titik stasioner tersebut, berikanlah alasannya!

Alternatif Penyelesaian:

Turunan pertama dari $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$ adalah $f'(x) = x^3 - 4x$. Syarat untuk menentukan titik stasioner adalah $f'(x) = 0$, sehingga

....

Berdasarkan persamaan $f'(x) = 0$ diperoleh bahwa $x_0 = 0,\ x_1 = 2,\ x_2 = -2$.

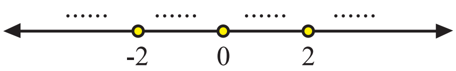
Untuk $x_0 = 0$, diperoleh $f'(0) =$ ....

Untuk $x_1 = 2$, diperoleh $f'(2) =$ ....

Untuk $x_2 = -2$, diperoleh $f'(-2) =$ ....

Sehingga diperoleh titik stasioner $(-2,....)$, $(0,....)$, dan $(2,....)$.

Dengan menggunakan bantuan garis bilangan diperoleh bahwa nilai turunan pertama fungsi $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$ di sekitar absis -2, 0, dan 2.



Berdasarkan garis bilangan tersebut, dapat dikatakan bahwa:

Titik $(-2,....)$ adalah titik balik minimum, karena ....

Titik $(0,....)$ adalah titik balik maksimum, karena ....

Titik $(2,....)$ adalah titik balik minimum, karena ....

Cek Dengan *Photomath*

Kalian dapat memeriksa kembali jawaban yang telah kalian peroleh menggunakan *Photomath*. Hasil yang diperoleh untuk Latihan Soal terbimbing 3.9 adalah:

Nilai Maksimum relatif adalah 0 pada $x = 0$.

Nilai Maksimum relatif adalah -4 pada $x = 2$ dan $x = -2$.

b. Uji Turunan Kedua

Uji turunan kedua sangat penting untuk menentukan titik belok kurva suatu fungsi. Uji turunan kedua dibutuhkan untuk fungsi polinomial berderajat lebih dari tiga. Untuk menentukan jenis titik ekstrim dari suatu fungsi kalian dapat menggunakan sifat berikut.

Diberikan interval I yang memuat c. Fungsi $f(x)$ kontinu dan terdiferensiabel dalam interval I. Turunan pertama dan turunan kedua $f(x)$ pada interval I, serta $f''(c)$ dengan $f(c)$ nilai stasioner.

1. Jika $f''(c) < 0$, maka $f(c)$ merupakan nilai balik maksimum fungsi f.
2. Jika $f''(c) > 0$, maka $f(c)$ merupakan nilai balik minimum fungsi f.
3. Jika $f''(c) = 0$, maka $f(c)$ bukan nilai ekstrim fungsi f dan titik $(c, f(c))$ adalah titik beloknya.

Contoh Soal 3.9

Tentukan nilai-nilai ekstrim dan jenisnya dari suatu kurva $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2$ dengan uji turunan kedua!

Alternatif Penyelesaian:

Turunan pertama dari $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2$ adalah $f'(x) = x^2 - 2x - 3$ dan turunan keduanya adalah $f''(x) = 2x - 2$.
Nilai stasioner dari fungsi $f(x)$, apabila $f'(x) = 0$, maka $x^2 - 2x - 3 = 0$.
Dengan menggunakan cara pemfaktoran pada persamaan kuadrat $x^2 - 2x - 3 = 0$, diperoleh bahwa $x = 3$ atau $x = -1$.
Untuk $x = 3$ maka $f''(3) = 2(3) - 2 = 4 > 0$.

Karena $x = 3$ memiliki $f''(3) > 0$ maka $f(3) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2 = -5$ merupakan nilai balik maksimum.

Untuk $x = -1$ maka $f''(-1) = 2(-1) - 2 = -4 < 0$. Karena $x = -1$ memiliki $f''(-1) < 0$ maka $f(-1) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2 = 5\frac{2}{3}$ merupakan nilai balik maksimum.

Ayo Mencoba

Latihan Soal 3.4

1. Tentukan nilai titik balik maksimum dan minimum dari
   a. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$.
   b. $f(x) = \frac{x^2+6x+9}{3x^2}$.
2. Tentukan titik belok dari fungsi
   a. $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2$.
   b. $f(x) = x^3 - 6x + 12x + 5$.
3. Tentukan nilai ekstrim dari fungsi berikut, dan tentukan jenis titik ekstrimnya
   a. $f(x) = x^2 - 5x + 6$.
   b. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$.

Soal Berpikir Kreatif

4. Diketahui a dan b adalah akar-akar dari persamaan $x^2+5px + p^3 - 4p + 1 = 0$. Tentukan nilai p agar $a + ab + b$ bernilai maksimum pada $-3 < p < 3$!
5. Buktikan bahwa setiap fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan $a \neq 0$ mempunyai tepat satu titik ekstrim!

D. Aplikasi Turunan di Berbagai Bidang Ilmu

Setelah kalian mempelajari konsep turunan, pada bagian ini kalian akan mempelajari aplikasi turunan fungsi pada berbagai bidang keilmuan. Setidaknya ada tiga konsep turunan fungsi yang dapat digunakan untuk memecahkan permasalahan di berbagai bidang keilmuan selain matematika, diantaranya sebagai berikut:

1. penggunaan turunan fungsi dalam memecahkan permasalahan yang berkaitan dengan percepatan dan kecepatan.
2. penggunaan turunan fungsi tak tentu dari sebuah limit fungsi.
3. penggunaan turunan fungsi untuk memecahkan masalah yang berkaitan dengan titik optimum (nilai maksimum dan nilai minimum).

Walaupun tidak menutup kemungkinan ada konsep turunan fungsi lainnya yang dapat digunakan pada bidang keilmuan selain konsep turunan fungsi yang telah disebutkan di atas.

Contoh Soal 3.10

Sebuah peluru ditembakkan vertikal ke atas dengan kecepatan awal 50 m/detik. Ketinggian peluru dalam h meter terhadap titik asal setelah t detik yang ditentukan oleh persamaan $h(t) = 50t - 5t^2$.

a. Tentukan nilai h pada waktu $t = 0$ detik, $t = 5$ detik, dan $t = 10$ detik!

b. Tentukan kecepatan peluru pada waktu $t = 3$ detik, $t = 5$ detik, dan $t = 7$ detik!

Alternatif Penyelesaian:

Bagian a)

Untuk menentukan nilai h atau nilai ketinggian, kalian dapat menyubstitusikan t pada persamaan $h(t) = 50t - 5t^2$ sehingga

untuk $t = 0$, maka $h(0) = 50t - 5t^2 = 0$.

untuk $t = 5$, maka $h(5) = 50(5) - 5(5)^2 = 375$ meter.

untuk $t = 10$, maka $h(10) =$ .... = ... meter.

Bagian b)

Untuk menentukan nilai kecepatan suatu benda, kalian dapat menggunakan konsep turunan pertama suatu fungsi, sedangkan untuk percepatan kalian dapat menggunakan konsep turunan kedua suatu fungsi, sehingga dari persamaan $h(t) = 50t - 5t^2$, maka persamaan kecepatan adalah $v = \frac{dh}{dt} = \frac{d}{dt}(50t - 5t^2) = 50 - 10t$, sehingga,

Kecepatan pada $t = 3$ detik adalah $50 - 10(3) = 80$ m/detik.

Kecepatan pada $t = 5$ detik adalah $50 - 10(5) = 0$ m/detik.

Kecepatan pada $t = 7$ detik adalah $50 - 10(7) = -20$ m/detik.

Ayo Mencoba

Pada bagian ini, kalian dapat melengkapi jawaban Latihan Soal Terbimbing 3.10 yang masih terbuka. Jawaban yang hilang ditulis dengan "....". Kegiatan ini bertujuan agar kalian dapat memahami konsep aplikasi turunan.

Latihan Soal Terbimbing 3.10

Sebuah partikel bergerak dengan lintasan kurva $s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, dimana s adalah jarak yang ditempuh partikel dalam satuan meter, dan t adalah waktu yang diperlukan partikel dalam satuan detik. Tentukan:

a. Panjang lintasan partikel pada $t = 0$ detik, $t = 1$ detik, dan $t = 2$ detik.
b. Kecepatan partikel pada waktu $t = 0$ detik, $t = 1$ detik, dan $t = 2$ detik.
c. Percepatan partikel pada $t = 0$ detik, $t = 1$ detik, dan $t = 2$ detik.

Alternatif Penyelesaian:

Bagian a)

Untuk menentukan panjang lintasan s atau nilai ketinggian, kalian dapat mensubstitusimenyubstitusikan t pada persamaan $s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ sehingga

untuk $t = 0$, maka .... = ... meter.

untuk $t = 1$, maka .... = ... meter.

untuk $t = 2$, maka .... = ... meter.

Bagian b)

Untuk menentukan nilai kecepatan, kalian dapat menggunakan konsep turunan pertama suatu fungsi, sehingga $f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, maka persamaan kecepatan adalah

$v = \frac{df(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(t^3 - 6t^2 + 9t)$

$=$...

sehingga kecepatan pada $t = 0$ detik maka kecepatannya adalah ....
.... = ... meter/detik.

Kecepatan pada $t = 1$ detik maka kecepatannya adalah ....
.... = ... meter/detik.

Kecepatan pada $t = 2$ detik maka kecepatannya adalah ....
.... = ... meter/detik.

Bagian c)

Untuk menentukan nilai percepatan, kalian dapat menggunakan konsep turunan kedua suatu fungsi, sehingga $f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, maka persamaan percepatan adalah

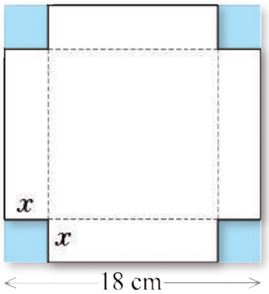
$$a = \frac{d^2 f(t)}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(t^3 - 6t^2 + 9t) = 6t - 12.$$

Sehingga percepatan pada $t = 0$ detik maka percepatannya adalah $6t-12 = -12\ m/s^2$.
percepatan pada $t = 1$ detik maka percepatannya adalah ....

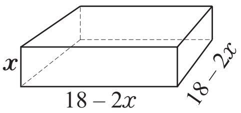
percepatan pada $t = 2$ detik maka percepatannya adalah ....

Contoh Soal 3.11

Sebuah kotak persegi dibuat dari selembar karton dengan panjang 18 cm, dengan cara memotong persegi identik pada keempat pojok dan melipat ke atas sisinya seperti pada gambar di samping. Tentukan ukuran kotak agar volume kotak yang dibuat maksimum dan tentukan pula volume maksimal!



Alternatif Penyelesaian:



Misalkan x adalah sisi persegi yang harus dipotong dan v adalah volume kotak yang mungkin terjadi, maka

Panjang = $18 - 2x$, Lebar = $8 - 2x$, dan Tinggi = x.

Akibatnya $v = p.l.t = (18-2x)(18-2x)x = 324x - 72x^2 + 4x^3$.

Untuk menentukan volume maksimal, kalian dapat menggunakan $f'(x) = 0$ maka $f(x) = 324x - 72x^2 + 4x^3$ sehingga $f'(x) = 12x^2 - 72x + 324 = 0$. Dengan menggunakan konsep persamaan kuadrat, diperoleh bahwa $x_1 = 9$ dan $x_2 = 3$. Selain itu, panjang x tidak dimungkinkan bernilai negatif, sehingga diperoleh tiga titik kritis yaitu 0,9 dan 3.

Dengan menyubstitusikan nilai x ke persamaan $f(x)$ diperoleh bahwa:

$f(0) = 324x - 72x^2 + 4x^3 = 0.$

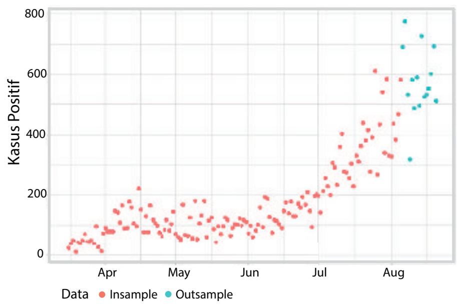
$f(3) = 324x - 72x^2 + 4x^3 = 432.$

$f(9) = 324x - 72x^2 + 4x^3 = -2187.$

Karena volume tidak mungkin bernilai negatif, maka volume maksimum yang dapat dibuat adalah 432 cm3, dengan ukuran panjang 18 – 2(3) = 12 cm, ukuran lebar juga 12 cm, dan tinggi 3 cm.

Ayo Berpikir Kritis

Diketahui grafik perkembangan jumlah kasus baru positif harian Covid-19 di DKI Jakarta mulai tanggal 16 Maret 2020 sampai dengan 20 Agustus 2020 terlihat pada Gambar.



Gambar 3.7. Jumlah Orang Terkonfirmasi Covid-19 di DKI Jakarta sejak 16 Maret – 20 Agustus 2020

Sumber: Seminar Official Official Statistics/R. Rory & R. Diana (2020)

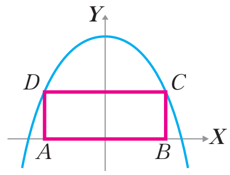
Pada Gambar 3.7, jumlah kasus baru positif harian Covid-19 setiap harinya selalu naik turun, namun secara umum grafik tersebut cenderung naik. Berkaitan kondisi ini, Rory & Diana (2020) telah mempublikasikan hasil estimasi pemodelan data covid tersebut menggunakan regresi polinomial lokal. Misalkan estimasi fungsi kasus baru di DKI Jakarta tersebut adalah $f(x) = 48{,}26x^3 + 44{,}37x^2 - 22{,}18x + 17{,}57$, dengan x adalah estimasi bulan.

Ayo Berdiskusi

Berdasarkan pemodelan data tersebut, diskusikan dengan kelompok untuk mengestimasi laju penambahan orang terkonfirmasi Covid-19! Kapankah estimasi fungsi tersebut mengalami puncaknya?

Latihan Soal 3.5

1. Pembangunan sebuah jembatan dapat diselesaikan dalam x hari, dengan biaya $y = 3x - 900 + \frac{120}{x}$ dan y dalam ratusan ribu. Berapa hari pembangunan jembatan tersebut harus diselesaikan agar biaya yang dikeluarkan oleh pemborong minimum!
2. Tentukan dua buah bilangan real positif dengan jumlahan kedua bilangan itu minimum dan mempunyai hasil kali 80!
3. Sebuah talang air akan dibuat dari sebuah plat seng dengan lebar 50 cm, dengan cara melipat kedua sisi plat seng sama panjang. Tentukan ukuran penampang tegak talang air tersebut sehingga talang dapat dialiri air semaksimal mungkin!
4. Suatu parabola mempunyai persamaan $y = 12 - x^2$. Dibentuk sebuah persegi panjang yang dua titiknya berada pada kurva tersebut, seperti pada gambar di samping. Tentukan luas maksimum persegi panjang $ABCD$!



5. Keuntungan produksi sebuah barang dalam suatu perusahaan dinyatakan dengan fungsi $f(x) = (225x - x^2)$ dengan $f(x)$ dalam rupiah dan x menyatakan banyaknya barang. Tentukan jumlah barang yang harus diproduksi agar keuntungan mencapai maksimum!

Ringkasan dan Refleksi

Ayo Mengomunikasikan

Dalam bab ini, kalian telah mempelajari konsep dasar turunan dan bagaimana menggunakan konsep tersebut dalam menentukan turunan fungsi maupun untuk menyelesaikan masalah sehari-hari.

1. Apakah makna dari $f'(x) = L$?
2. Bagaimanakah cara kalian menentukan turunan fungsi aljabar dan trigonometri?
3. Sebutkan beberapa bidang atau ilmu yang mengaplikasikan konsep dasar turunan!
4. Berikan contoh permasalahan sehari-hari yang berhubungan dengan turunan fungsi!

Uji Kompetensi

1. Tentukan turunan pertama dari:
   a. $f(x) = \sqrt{4x + \sqrt{4 + x}}$
   b. $g(z) = \frac{\sin z + \cos z}{2z}$
2. Sejenis bakteri dapat membelah diri karena ada nutrisi untuk berkembang biak. Seorang laboran mengamati kadar nutrisi dalam bakteri tersebut untuk mengetahui laju perkembangbiakannya. Hasil dari pengamatan tersebut menunjukkan bahwa kadar nutrisi bakteri mendekati fungsi $y = \csc\left(\frac{\pi}{10}x\right) + 50$ mg dengan x adalah waktu dalam jam. Berapakah laju perubahan kadar nutrisi pada saat $x = \frac{\pi}{6}$?
3. Sebuah pabrik sepatu merancang pemodelan matematika yang mewakili besarnya biaya dan pendapatan. Besarnya pendapatan dimodelkan dalam fungsi $R(Q) = -2Q^2 + 1000Q$, sedangkan besarnya biaya dimodelkan dalam fungsi $C(Q) = Q^3 - 59Q^2 + 1315Q + 2000$ dengan Q mewakili banyak barang yang diproduksi dalam ribuan dan C, R dalam juta rupiah.
   a. Apakah pabrik sepatu tersebut mengalami keuntungan atau kerugian?
   b. Berapakah keuntungan atau kerugian maksimumnya?
4. Sebuah anak panah ditembakkan secara vertikal ke udara dan jaraknya setelah t detik dalam keadaan melayang diberikan oleh: $s(t) = -16t^2 + 80t$
   a. Berapakah kecepatan anak panah setelah 2 detik?
   b. Berapa tinggi maksimum anak panah tersebut?
   c. Berapa detik setelah anak panah itu ditembakkan akan tiba di tanah?
   d. Berapa percepatan anak panah tersebut?

KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET, DAN TEKNOLOGI
REPUBLIK INDONESIA, 2022
Matematika Tingkat Lanjut untuk SMA/MA Kelas XII
Penulis: Wikan Budi Utami, dkk
ISBN 978-602-244-771-9 (jilid 2)

Bab 4 Integral

PENGALAMAN BELAJAR

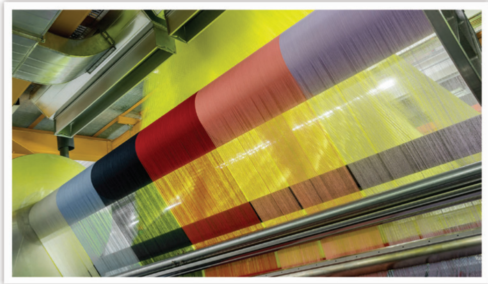
Setelah mempelajari bab ini diharapkan:

- Menjelaskan konsep integral;
- Menerapkan konsep integral melalui penyelesaian masalah.

Pada masa pandemi Covid-19, banyak perusahaan yang berjuang untuk bertahan. Salah satunya adalah perusahaan tekstil. Salah satu perusahaan tekstil mencoba bertahan dengan melakukan berbagai strategi. Salah satu strateginya adalah melakukan penghematan biaya operasional perusahaan. Strategi penghematan ini diestimasikan untuk beberapa tahun ke depan.

Salah satu bentuk penghematan biaya operasional tersebut adalah dengan pembelian alat produksi. Dengan menggunakan rumus integral, kita dapat mengetahui lama waktu yang diperlukan perusahaan agar dapat mengembalikan nilai dari harga alat produksi tersebut. Hal ini dapat memprediksi keberlangsungan operasional suatu perusahaan.

Gambar 4.1. Mesin Tenun Tradisional.
Sumber www.freepik.com/(2019)



Gambar 4.2. Mesin Tenun Modern.
Sumber www.freepik.com/(2021)

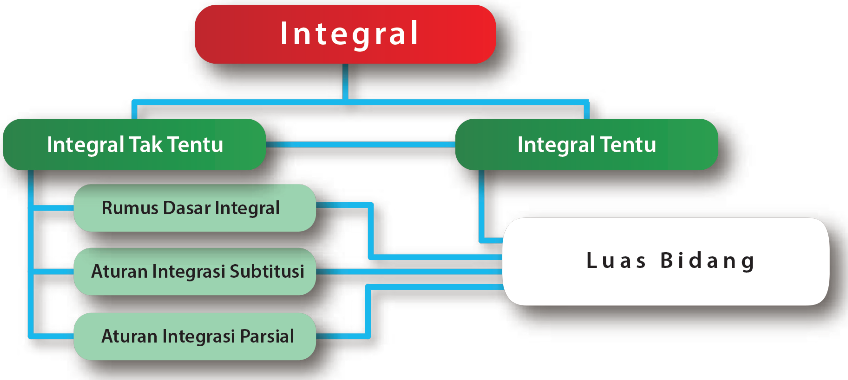
Pertanyaan Pemantik

1. Apa hubungan antara turunan dan integral?
2. Apa masalah sehari-hari yang dapat dipecahkan oleh integral?

Kata Kunci

Anti Turunan, Integral Parsial, Luas Bidang Datar

Peta Konsep



A. Integral Tak Tentu

Tahukah Kalian?

Gambar 4.3.
Gottfried Wilhelm Leibniz

Leibniz lahir di Leipzig, Saxony, pada tahun 1646. Sang ayah, Friedrich Leibniz, sejak awal tertarik dengan masalah hukum dan filosofis. Ayahnya adalah seorang pengacara dan profesor etika, dan ibunya adalah putri seorang pengacara. Berkat banyak koleksi buku ayahnya, Gottfried Leibniz belajar bahasa Yunani dan Latin pada usia 8 tahun. Pada usia 12 tahun, ia telah mengembangkan beberapa hipotesis logis, yang menjadi bahasa simbolis matematika.

Pada tahun 1661, Leibniz mendaftar di Universitas Leipzig, belajar filsafat di bawah bimbingan John Adam Scherze dan ahli teori filosofis Jacob Thomas. Pada 1663, ia pindah ke Universitas Jena untuk melanjutkan studi dengan ahli matematika, fisikawan, dan astronom, Erhard Weigel, untuk menganalisis pemikiran *Pythagoras*. Pada usia 20, dia ingin mendapatkan gelar doktor di bidang hukum, tetapi para profesor di Leipzig menganggapnya terlalu muda. Leibniz pergi ke Nuremberg untuk belajar di Universitas Aldorf. Kebanyakan sejarawan percaya bahwa Newton dan Leibniz mengembangkan kalkulus secara terpisah. Keduanya menggunakan simbol matematika yang berbeda. Notasi dan metode " *Diferensial Leibniz* " banyak digunakan di benua Eropa. Kerajaan Inggris mulai menggunakan *Diferensial Leibniz* pada tahun 1820.

Leibniz adalah salah satu pencipta sebagian besar simbol matematika. Kita berhutang nama kalkulus dan integral, serta notasi standar $\frac{dy}{dx}$ dan turunan dan integral. Istilah fungsi dan penggunaan simbol "=" yang konstan menunjukkan bahwa kesetaraan adalah kontribusi lain. Kecepatan perkembangan kalkulus di benua Eropa jauh lebih cepat daripada di Inggris, yang terutama disebabkan oleh keunggulan simbolisme (Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, 2018: 29-31).

Ayo Mengingat Kembali

Sifat turunan

Jika c suatu bilangan tetap dan jika $f(x) = c$ untuk semua x, maka $f'(x) = 0$.
Jika n bilangan bulat positif dan $f(x) = x^n$, maka $f'(x) = nx^{(n-1)}$.

Ayo Bereksplorasi

Eksplorasi 4.1

Mari kita amati beberapa fungsi berikut dan tentukan turunannya.
Ingat lagi sifat-sifat turunan yang telah dipelajari di bab sebelumnya.

Tabel 4.1 Tabel fungsi $F(x)$ dan $f(x)$

$F(x)$	$f(x)$
$F(x) = 2x^2 + 1$	$f(x) = 4x$
$F(x) = 2x^2 + 2$	$f(x) =$ ....
$F(x) = 2x^2 + 3$	$f(x) =$ ....
$F(x) = 2x^2 - 4$	$f(x) =$ ....
$F(x) = 2x^2 - 5$	$f(x) =$ ....
$F(x) = 2x^2 - 6$	$f(x) =$ ....

Jika, $F(x) = 2x^2 + C$ maka $f(x) =$ ....

Amati kembali fungsi dan turunannya, dan jawablah pertanyaan berikut.

1. Pada kegiatan Eksplorasi 4.1 yang telah kalian lakukan, apakah memberikan turunan yang sama?
2. Jika $F(x) = C$, dengan C adalah anggota bilangan real, dapatkah kalian menentukan turunan dari $F(x) = C$?
3. Dapatkah kalian membentuk $F(x)$ apabila yang diketahui adalah $f(x)$? Sertakan contoh soalnya!

Ayo Berpikir Kritis

Bagaimana bentuk umum dari $F(x)$ apabila yang diketahui adalah $f(x)$ nya?

1. Definisi Integral Tak Tentu

Perhatikan kembali Eksplorasi 4.1 yang telah kalian lakukan. Kesimpulannya dapat kita sketsakan sebagai berikut

Definisi

Suatu fungsi $f(x)$ disebut sebagai turunan dari suatu fungsi $F(x)$. Jadi $F(x)$ disebut anti turunan dari $f(x)$ pada suatu interval I jika untuk setiap nilai x di dalam I berlaku $F'(x) = f(x)$.

Jika $y = F(x)$ maka $\frac{dy}{dx} = F'(x) = f(x)$, sehingga

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f(x). \\ dy &= f(x)dx. \\ \int dy &= \int f(x)dx. \\ y &= \int f(x)dx. \end{aligned}$$

Jika $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$ maka $\int f(x)dx = F(x) + C$ untuk setiap bilangan real C.

Suatu proses mendapatkan dy/dx dari y atau fungsi $F(x)$ disebut diferensial, dan proses untuk mendapatkan y atau fungsi $F(x)$ dari $\frac{dy}{dx}$ disebut sebagai anti turunan atau integral.

Pengintegralan fungsi $f(x)$ terhadap x disimbolkan dengan

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

$\int f(x)\,dx$ disebut sebagai integral tak tentu.

2. Sifat-Sifat Integral Tak Tentu

Sifat-sifat

Sifat-sifat integral tak tentu di antaranya adalah

Sifat 4.1 $\int dx = x + C.$

Sifat 4.2 Jika n bilangan rasional dan $n \neq 0$, maka $\int x^n\, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$.

Sifat 4.3 $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$, dengan a adalah sebuah konstanta.

Sifat 4.4 Jika f_1 dan f_2 didefinisikan pada interval yang sama, maka

$\int [f_1(x) + f_2(x)]\, dx = \int f_1(x)\, dx + \int f_2(x)\, dx$.

Sifat 4.5 Jika f_1 dan f_2 didefinisikan pada interval yang sama, maka

$\int [f_1(x) - f_2(x)]dx = \int f_1(x)\, dx - \int f_2(x)\, dx$.

Sifat 4.6 Aturan Integrasi Substitusi.

Jika g suatu fungsi yang dapat didiferensialkan, dan n sebuah bilangan rasional, maka

$\int [g(x)]^n g'(x)dx = \frac{1}{n+1}[g(x)]^{n+1} + C\,;\, n \neq -1$.

Sifat 4.7 Aturan Integrasi Parsial.

Jika u dan v fungsi-fungsi yang dapat didiferensialkan, maka

$\int u\, dv = uv - \int v\, du$.

Sifat 4.8 Aturan Integral Trigonometri

$\int \cos x\, dx = \sin x + C$.

$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$.

$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$.

Ayo Berpikir Kreatif

Cobalah kalian tunjukkan Sifat 4.2 sampai Sifat 4.8! Kemudian presentasikan hasil tersebut.

Agar kalian bisa memahami sifat integral tak tentu tersebut, perhatikanlah contoh soal berikut.

Contoh Soal 4.1

Tentukan $\int x^5 dx$!

Alternatif Penyelesaian:

$$\int x^5 dx = \frac{1}{5+1} x^{5+1} + C \quad \text{(Sifat 4.2).}$$

$$\int x^5 dx = \frac{1}{6} x^6 + C.$$

Ayo Mencoba

Pada bagian ini, kalian dapat melengkapi jawaban dari Latihan Soal Terbimbing 4.1 dan 4.2 yang masih terbuka. Jawaban yang hilang adalah yang masih tertulis "...". Kegiatan ini bertujuan agar kalian dapat memahami sifat-sifat integral tak tentu.

Latihan Soal Terbimbing 4.1

Tentukan $\int (x^4 - x^3)\, dx$!

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan $f_1(x) = x^4$ dan $f_2(x) = \ldots\ldots\ldots$, maka

$\int (x^4 - x^3)dx = \int \ldots\ldots\ldots dx - \int \ldots\ldots\ldots\, dx.$ (Sifat 4.5).

$\int (x^4 - x^3)dx = \frac{1}{\ldots\ldots} x^{\ldots\ldots} - \frac{1}{\ldots\ldots} x^{\ldots\ldots} + C.$ (Sifat 4.2).

Latihan Soal Terbimbing 4.2

Tentukan $\int (x^3 + \sqrt{x}\,)dx$!

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan $f_1(x) = \ldots\ldots\ldots$ dan $f_2(x) = \ldots\ldots\ldots$, maka

$\int (x^3 + \sqrt{x}\,)dx = \int \ldots\ldots\ldots\, dx + \int \ldots\ldots\ldots\, dx.$ (Sifat 4.4).

$\int (x^3 + \sqrt{x}\,)dx = \int \ldots\ldots\ldots\, dx + \int \ldots\ldots\ldots^{\frac{1}{2}} dx.$

$\int (x^3 + \sqrt{x}\,)dx = \ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots + C.$ (Sifat 4.2).

Cek Dengan *Photomath*

Kalian dapat memeriksa kembali jawaban yang telah kalian peroleh menggunakan *Photomath*. Hasil yang diperoleh untuk Latihan Soal Terbimbing 4.2 adalah

$$\frac{x^4}{4} + \frac{2x\sqrt{x}}{3} + C,\ C \in R$$

Contoh Soal untuk Aturan Integrasi Substitusi

Contoh Soal 4.2

Tentukan $\int 2x(x^2 + 3)^4\, dx$!

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan $g(x) = x^2 + 3$, maka $g'(x)dx = 2x\ dx$, sehingga

$\int 2x(x^2 + 3)^4\ dx = \int (x^2 + 3)^4\ (2x\ dx)$.

$\int 2x(x^2 + 3)^4\ dx = \frac{1}{4+1}(x^2 + 3)^{4+1} + C$.

$\int 2x(x^2 + 3)^4\ dx = \frac{1}{5}(x^2 + 3)^5 + C$.

Video Pembelajaran

Kalian dapat melihat penjelasan integrasi subtitusi dengan menggunakan contoh yang lain. Lakukan *scan barcode* disamping atau daring *Youtube* dengan link https://youtu.be/CuPR8e5POps dan https://youtu.be/AJp8va780j0

Ayo Mencoba

Pada bagian ini, kalian dapat melengkapi jawaban dari Latihan Soal Terbimbing 4.3 dan 4.4 yang masih terbuka. Jawaban yang hilang adalah yang masih tertulis "...". Kegiatan ini bertujuan agar kalian dapat memahami Aturan Integrasi Substitusi.

Latihan Soal Terbimbing 4.3

Tentukan $\int \sqrt{3x + 4}\ dx$!

Alternatif Penyelesaian:

$\int \sqrt{3x + 4}\ dx$ dapat diubah menjadi bentuk $\int (3x + 4)^{\frac{1}{2}} dx$.

Misalkan $g(x) =$ ...., maka $g'(x)dx =$ .... dx.

Kalian dapat melihat untuk $g'(x)dx =$ .... dx, agar sesuai dengan pertanyaannya diperlukan faktor 3 untuk menyertai dx. Dengan menggunakan Sifat 4.6 diperoleh bahwa.

$\int (3x + 4)^{\frac{1}{2}} dx = \int (..........+..........)^{\frac{1}{2}}\ ((\frac{1}{3})3\ dx)$.

$\int (3x + 4)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{3}\int (..........+..........)^{\frac{\cdots}{\cdots}}(3\ dx)$.

$\int (3x+4)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{.....} (.............+.............)^{\frac{....}{....}} + C.$

$\int (3x+4)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{.....} (.............+.............)^{\frac{....}{....}} + C.$

Latihan Soal Terbimbing 4.4

Sebuah partikel bergerak pada suatu garis lurus. Jarak tempuh suatu partikel dinyatakan dalam s m dari pusat pada saat t detik, v cm/detik adalah kecepatan partikel saat t detik, maka $v = \cos 2\pi t$ dengan arah positif ke kanan dari titik pusat. Jika titik awal gerak partikel berada 5 cm di sebelah kanan titik pusat, tentukan posisi partikel saat $\frac{1}{3}$ detik kemudian!

Alternatif Penyelesaian:

Diketahui kecepatan partikel yaitu $v = \cos 2\pi t$, maka dapat kita tuliskan sebagai

$$v = \frac{ds}{dt} = ...$$

$$ds = ... dt.$$

$$\int ds = \int .... dt.$$

$$s = \frac{1}{2\pi} \int ....(......... dt).$$

$$s = \frac{1}{2\pi} ....+ C.$$

Untuk $t = 0$ maka $s = 5$, sehingga

$............ = \frac{1}{2\pi} ....(............) + C.$

$C = ...$

Maka persamaannya menjadi

$$s = \frac{1}{2\pi} ....+...............$$

Posisi partikel saat $\frac{1}{3}$ detik kemudian

$$s = \frac{1}{2\pi} ....(...............) + (...............) = ...$$

Jadi, posisi partikel saat $\frac{1}{3}$detik kemudian adalah .... cm di sebelah kanan.

Contoh Soal Untuk Aturan Integrasi Parsial

Contoh Soal 4.3

Tentukan $\int x^2 \sin x \, dx$!

Alternatif Penyelesaian:

Misal: $u = x^2 \rightarrow du = 2x\,dx$.

Jika $dv = \sin x\,dx \rightarrow v = \int \sin x\,dx$.

$v = -\cos x + C$.

Dengan menggunakan **Sifat 4.7** diperoleh.

$$\int x^2 \sin x\,dx = x^2.(-\cos x) - \int(-\cos x)2x\,dx.$$

$$\int x^2 \sin x\,dx = x^2.(-\cos x) + \int \cos x.2x\,dx.$$

$$\int x^2 \sin x\,dx = x^2.(-\cos x) + 2\,(x \sin x - \int \sin x\,dx).$$

$$\int x^2 \sin x\,dx = -x^2.\cos x + 2x.\sin x + 2\cos x + C.$$

Ayo Mencoba

Pada bagian ini, kalian dapat melengkapi jawaban dari Latihan Soal Terbimbing 4.5 dan 4.6 yang masih terbuka. Jawaban yang hilang adalah yang masih tertulis "...". Kegiatan ini bertujuan agar kalian dapat memahami Aturan Integrasi Parsial.

Latihan Soal Terbimbing 4.5

Tentukan $\int x \sin x\,dx$!

Alternatif Penyelesaian:

Misal: $u = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \rightarrow du = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,dx$

$dv = \sin x\,dx \rightarrow v = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Dengan menggunakan **Sifat 4.7** diperoleh

$$\int x \sin x\,dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots) - \int(-\cos x)dx.$$

$$\int x \sin x\,dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + C.$$

Latihan Soal Terbimbing 4.6

Tentukan $\int x\sqrt{1+x}\,dx$!

Alternatif Penyelesaian:

Misal: $u = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \rightarrow du = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,dx$.

$dv = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \rightarrow v = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Dengan menggunakan **Sifat 4.7** diperoleh

$$\int x\sqrt{1+x}\,dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots) - \int \frac{\cdots}{\cdots}(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)^{\frac{\cdots}{\cdots}}\,dx.$$

$$\int x\sqrt{1+x}\,dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + C$$

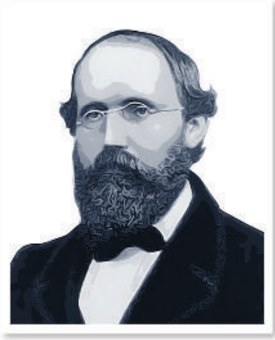
Ayo Mencoba

Latihan Soal 4.1

1. Tentukan integral tak tentu berikut:
   a. $\int 2x^7\,dx.$
   b. $\int \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) dx.$
   c. $\int \frac{3}{\sqrt{x}}\,dx.$
   d. $\int (3x^5 - 2x^3)\,dx.$
2. Tentukan integral tak tentu berikut dengan Aturan Integrasi Substitusi
   a. $\int \sqrt[3]{6-2x}\,dx.$
   b. $\int x(x^2 - 9)^2\,dx.$
   c. $\int \frac{4\sin x}{(1+\cos x)^2}\,dx.$
   d. $\int 2\sin x \sqrt[3]{1+\cos x}\,dx.$
3. Tentukan:
   a. $\int x(5x^2 - 3)^7\,dx.$
   b. $\int x\cos x\,dx.$
   c. $\int x^2\sqrt{1-x}\,dx.$
   d. $\int 6x^2 \sin^3 x\,dx.$
4. Volume air dalam bejana adalah V meter kubik jika ketinggian air adalah h meter. Jika kecepatan perubahan V terhadap h adalah $\pi(4h^2+12h+9)$, tentukan volume air jika tinggi bejana 3 meter!
5. Dalam sepuluh hari pertama pada bulan Desember, sebuah sel suatu tanaman bertumbuh sedemikian rupa sehingga pada t hari sesudah tanggal 1 Desember volume sel itu bertambah dengan kecepatan $(12 - t)^{-2}$ mikro meter kubik tiap hari. Jika pada tanggal 3 Desember volume sel itu adalah 3 mikro meter kubik, berapakah volume sel pada tanggal 8 Desember?

B. Integral Tentu

Tahukah Kalian?



Gambar 4.4.
Bernhard Riemann

Bernhard Riemann kuliah di Universitas Göttingen. Saat itu, Universitas Göttingen merupakan pusat matematika dunia. Bernhard Riemann terinspirasi oleh fisikawan terkenal W. E. Weber dan matematikawan terbesar pada masanya, Carl F. Gauss. Pada tahun 1851 ia menerima gelar doktor dari Gauss, kemudian tinggal dan mengajar di Göttingen. Beliau meninggal di usia 39 tahun, setelah 15 tahun mengajar disana.

Bernhard Riemann tidak menghasilkan terlalu banyak karya matematika, namun karyanya layak mendapat pujian yang mendalam atas kualitasnya. Risalah matematikanya menetapkan arah baru untuk teori fungsional yang kompleks dan memulai studi terdalam, yang sekarang dikenal sebagai topologi. Salah satu karyanya dalam matematika adalah definisi modern dari integral tertentu yang dikenal sebagai integral Riemann. (Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, 2018: 34-35).

1. Jumlahan Riemann

Ayo Mengingat Kembali

Luas persegi panjang = $p \times l$.

$\sum_{i=1}^{5} A_i = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$

Ayo Bereksplorasi

Eksplorasi 4.2

Langkah kerja:

a. Buatlah setengah lingkaran dari kertas dengan jari-jari 12 cm.

b. Pertanyaan: bagaimana cara menghitung luas setengah lingkaran? Gunakan cara lain dalam menghitungnya!

c. Tempatkan setengah lingkaran pada koordinat kartesius yang kalian buat pada kertas berpetak, dan potong menjadi beberapa bagian sama panjang.

d. Hitunglah setiap bagian partisi/potongan lingkaran dengan pendekatan luas persegi panjang.

e. Jumlahkan semua luas persegi panjang yang terbentuk

f. Isikan hasil kalian pada tabel berikut

Banyaknya Partisi/Potongan yang Digunakan			....
persegi panjang ke-	1	panjang	....
		lebar	....
		luas	....
persegi panjang ke-	2	panjang	....
		lebar	....
		luas	....
	3	panjang	....
		lebar	....
		luas	....
	4	panjang	....
		lebar	....
		luas	....
persegi panjang ke-	5	panjang	....
		lebar	....
		luas	....
	6	panjang	....
		lebar	....
		luas	....
Luas total			....

Catatan: Pada baris persegi panjang ke-...............dapat ditambah jika partisi/ potongan melebihi jumlah baris yang disediakan.

Ayo Berdiskusi

Diskusikanlah dengan temanmu, apakah hasil yang diperoleh sama?

Ayo Berpikir Kritis

Mengapa hasil yang diperoleh dapat berbeda?

Secara umum, dengan melakukan kegiatan Eksplorasi 4.2, kalian telah mempelajari tentang Jumlahan Riemann. Maka pada partisi tersebut kita dapat memisalkan sebagai berikut:.

Panjang dimisalkan dengan $f(\overline{x})$. Lebar dimisalkan dengan Δx.

Luas persegi panjang adalah $A = p \times l = f(\overline{x})\Delta x$.

Jadi, luas totalnya adalah

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = f(\overline{x}_1)\Delta x_1 + f(\overline{x}_2)\Delta x_2 + f(\overline{x}_3)\Delta x_3 + f(\overline{x}_4)\Delta x_4 + f(\overline{x}_5)\Delta x_5.$$

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = \textstyle\sum_{i=1}^{5} f(\overline{x}_i)\Delta x_i.$$

Jika kita mempartisi menjadi n bagian maka:

$$\textstyle\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta x_i = f(\overline{x}_1)\Delta x_1 + f(\overline{x}_2)\Delta x_2 + \ldots\ldots + f(\overline{x}_n)\Delta x_n.$$

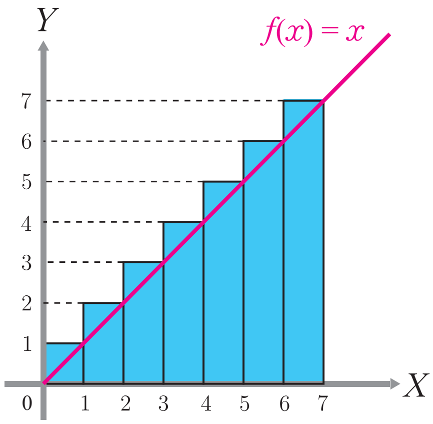
Jumlahan yang kita lakukan dinamakan sebagai Jumlahan Riemann.

Contoh Soal 4.4

Misalkan diketahui suatu fungsi $f(x) = x$ pada interval [0,7]. Tentukan Jumlahan Riemann dengan mempartisi menjadi 7 sub interval sama panjang dan titik wakilnya menggunakan titik ujung kiri tiap sub interval!

Alternatif Penyelesaian:

Kita dapat melihat grafik fungsi seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4.5 sehingga kita dapat membagi interval [0,7] menjadi tujuh sub-interval dan menentukan jumlah Riemann dari fungsi $f(x) = x$.



Gambar 4.5. Grafik Fungsi $f(x) = x$

Dengan demikian didapat, untuk

$\bar{x}_1 = 0{,}5$ maka $f(\bar{x}_1) = 0{,}5$.

$\bar{x}_2 = 1{,}5$ maka $f(\bar{x}_2) = 1{,}5$.

$\bar{x}_3 = 2{,}5$ maka $f(\bar{x}_3) = 2{,}5$.

$\bar{x}_4 = 3{,}5$ maka $f(\bar{x}_4) = 3{,}5$.

$\bar{x}_5 = 4{,}5$ maka $f(\bar{x}_5) = 4{,}5$.

$\bar{x}_6 = 5{,}5$ maka $f(\bar{x}_6) = 5{,}5$.

$\bar{x}_7 = 6{,}5$ maka $f(\bar{x}_7) = 6{,}5$.

Karena lebar sub interval sama, berarti $\Delta x = \frac{7-0}{7} = 1$ untuk setiap $i = 1,2,...,7$,
jadi Jumlahan Riemann dari $f(x) = x$ pada interval [0,7] dengan 7 sub interval adalah

$$\sum_{i=1}^{7} f(\bar{x}_i)\Delta x_i = f(\bar{x}_1)\Delta x_1 + f(\bar{x}_2)\Delta x_2 + f(\bar{x}_3)\Delta x_3 + f(\bar{x}_4)\Delta x_4 + f(\bar{x}_5)\Delta x_5 + f(\bar{x}_6)\Delta x_6 + f(\bar{x}_7)\Delta x_7.$$

$$\sum_{i=1}^{7} f(\bar{x}_i)\Delta x_i = (f(\bar{x}_1) + f(\bar{x}_2) + f(\bar{x}_3) + f(\bar{x}_4) + f(\bar{x}_5) + f(\bar{x}_6) + f(\bar{x}_7))\Delta x.$$

$$\sum_{i=1}^{7} f(\bar{x}_i)\Delta x_i = (0{,}5 + 1{,}5 + 2{,}5 + 3{,}5 + 4{,}5 + 5{,}5 + 6{,}5)1.$$

$$\sum_{i=1}^{7} f(\bar{x}_i)\Delta x_i = 24{,}5. \quad \bar{x}$$

Ayo Mencoba

Pada bagian ini, kalian dapat melengkapi jawaban dari Latihan Soal Terbimbing 4.7 dan 4.8 yang masih terbuka. Jawaban yang hilang adalah yang masih tertulis "...". Kegiatan ini bertujuan agar kalian dapat memahami jumlahan Riemann.

Latihan Soal Terbimbing 4.7

Apabila diketahui suatu fungsi $f(x) = x^2$ pada interval [0,3]. Tentukan jumlahan Riemann dengan cara mempartisi interval [0,3] menjadi 6 sub interval sama panjang dan titik wakilnya menggunakan titik ujung kiri tiap sub interval!

Alternatif Penyelesaian:

Untuk dapat menentukan Jumlahan Riemann fungsi $f(x) = x^2$ dengan mempartisi interval [0, 3] menjadi .... subinterval. Buatlah grafik fungsi $f(x) = x^2$ pada interval [0, 3], berikut.

Dengan demikian didapatkan hasil, untuk

$\bar{x}_1 =$ .... maka $f(\bar{x}_1) =$ ....

$\bar{x}_2 =$ .... maka $f(\bar{x}_2) =$ ....

$\bar{x}_3 =$ .... maka $f(\bar{x}_3) =$ ....

$\bar{x}_4 =$ .... maka $f(\bar{x}_4) =$ ....

$\bar{x}_5 =$ .... maka $f(\bar{x}_5) =$ ....

$\bar{x}_6 =$ .... maka $f(\bar{x}_6) =$ ....

Karena lebar subinterval sama, berarti $\Delta x = \frac{\ldots - \ldots}{6} =$ .... untuk setiap i = 1,2,...,6.

Jadi Jumlahan Riemann dari $f(x) =$ .... pada interval [0, 3] dengan mempartisi interval [0, 3] menjadi 6 sub interval adalah

$$\sum_{i=1}^{\ldots} f(\bar{x}_i)\Delta x_i = f(\bar{x}_1)\Delta x_1 + f(\bar{x}_2)\Delta x_2 + f(\bar{x}_3)\Delta x_3 + f(\bar{x}_4)\Delta x_4 + f(\bar{x}_5)\Delta x_5 + f(\bar{x}_6)\Delta x_6.$$

$$\sum_{i=1}^{\ldots} f(\bar{x}_i)\Delta x_i = (f(\bar{x}_1) + f(\bar{x}_2) + f(\bar{x}_3) + f(\bar{x}_4) + f(\bar{x}_5) + f(\bar{x}_6))\Delta x.$$

$$\sum_{i=1}^{\ldots} f(\bar{x}_i)\Delta x_i = (\ldots\ldots + \ldots\ldots + \ldots\ldots + \ldots\ldots + \ldots\ldots + \ldots\ldots)\ldots\ldots$$

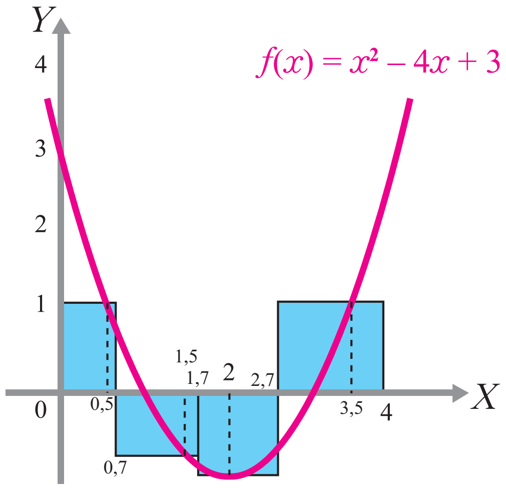
$$\sum_{i=1}^{\ldots} f(\bar{x}_i)\Delta x_i = \ldots\ldots$$

Latihan Soal Terbimbing 4.8

Misalkan diketahui suatu fungsi $f(x) = x^2 - 4x + 3$ pada interval [0,4] dengan grafik seperti Gambar 4.6. Tentukan Jumlahan Riemann!

Alternatif Penyelesaian:

Untuk dapat menentukan Jumlahan Riemann fungsi $f(x) = x^2 - 4x + 3$ pada interval [0,4] kita mempartisi menjadi .... sub interval. Pada grafik sudah ditentukan untuk nilai $\bar{x}_i$. Dengan demikian diperoleh,



Gambar 4.6.
Grafik Fungsi $f(x) = x^2 - 4x + 3$

$\overline{x}_1 =$ .... maka $f(\overline{x}_1) =$ ....

$\overline{x}_2 =$ .... maka $f(\overline{x}_2) =$ ....

$\overline{x}_3 =$ .... maka $f(\overline{x}_3) =$ ....

$\overline{x}_4 =$ .... maka $f(\overline{x}_4) =$ ....

$\overline{x}_5 =$ .... maka $f(\overline{x}_5) =$ ....

$\overline{x}_6 =$ .... maka $f(\overline{x}_6) =$ ....

Karena lebar sub interval tidak sama berarti Δx pada masing-masing partisi kita tulis

$\Delta x_1 =$ ....

$\Delta x_2 =$ ....

$\Delta x_3 =$ ....

$\Delta x_4 =$ ....

$\Delta x_5 =$ ....

$\Delta x_6 =$ ....

Jadi Jumlahan Riemann dari $f(x) =$ ....pada interval [0, 4] adalah

$$\sum_{i=1}^{....} f(\overline{x}_i)\Delta x_i = f(\overline{x}_1)\Delta x_1 + f(\overline{x}_2)\Delta x_2 + f(\overline{x}_3)\Delta x_3 + f(\overline{x}_4)\Delta x_4 .$$

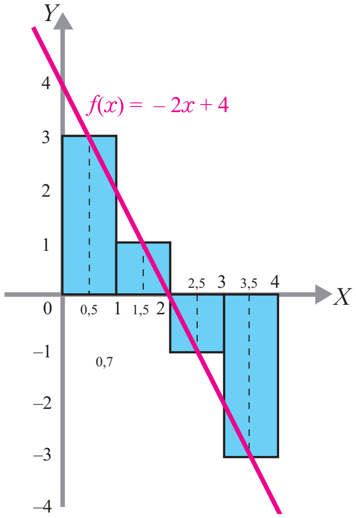
$$= \text{..}$$

Ayo Mencoba

Latihan Soal 4.2

1. Diketahui suatu fungsi $f(x) = 2 + x$ pada interval [0,2]. Tentukan Jumlahan Riemann dengan menggunakan 4 sub interval sama panjang dan titik wakilnya menggunakan titik ujung kiri tiap sub interval!
2. Diketahui suatu fungsi $f(x) = (2 - x)^2$ pada interval [0,2]. Tentukan Jumlahan Riemann dengan menggunakan 6 sub interval sama panjang dan titik wakilnya menggunakan titik ujung kiri tiap sub interval!
3. Misalkan $f(x) = x^2 + x$ adalah fungsi pada interval [1,4]. Tentukan Jumlahan Riemann dengan menggunakan 6 sub interval sama panjang dan titik wakilnya menggunakan titik ujung kiri tiap sub interval!

4. Tentukan Jumlahan Riemann berikut!



Gambar 4.7. Grafik fungsi $f(x) = -2x + 4$

5. Misalkan $f(x) = \frac{1}{x}$ adalah fungsi pada interval [1,3]. Tentukan Jumlahan Riemann apabila $x_0 = -1$, $x_1 = 1\frac{2}{3}$, $x_2 = 2\frac{1}{4}$, $x_3 = 2\frac{2}{3}$, $x_4 = 3$,
$\bar{x}_1 = 1\frac{1}{4}$, $\bar{x}_2 = 2$, $\bar{x}_3 = 2\frac{1}{2}$, dan $\bar{x}_4 = 2\frac{3}{4}$!

2. Integral Tentu

Mari kita kembali ke kegiatan Eksplorasi 4.2. Jika setengah lingkaran tersebut kita partisi sebanyak mungkin sehingga mengakibatkan jumlahan persegi panjang semakin banyak menuju ke x tak hingga banyaknya, maka luas setengah lingkaran akan semakin mendekati luas yang sesungguhnya.

$$A_{\text{setengah lingkaran}} = \lim_{n\to\infty} f(\bar{x}_3)\Delta x_i .$$

Selanjutnya, $\lim_{n\to\infty} f(\bar{x}_3)\Delta x_i$ disebut integral tentu pada interval $[0,a]$ dan ditulis $\int_0^a f(x)dx$.

Contoh Soal 4.5

Misalkan untuk fungsi $f(x) = x$, tentukan integral tentu dari $f(x)$ pada interval [0,7] atau $\int_0^7 x\,dx$!

Alternatif Penyelesaian:

Untuk menentukan integral tentu dari fungsi $f(x) = x$, dalam interval [0,7], hal pertama yang harus dilakukan adalah menentukan Jumlahan Riemann dari fungsi $f(x) = x$ dengan n subinterval pada interval [0,7].

Dengan demikian perlu ditentukan sebagai berikut.

a. **Panjang masing-masing sub interval.**

Interval yang diketahui adalah [0, 7] dan dipartisi menjadi bagian yang sama, maka $\frac{7-0}{n} = \frac{7}{n}$ untuk setiap i = 1,2,3,...,n.

b. **Titik wakil pada masing-masing subinterval ($\overline{x}_i$).**

Perhatikan batas paling kiri. Batas paling kiri pada latihan ini adalah 0 dan batas paling kanan adalah 7, maka

$$\overline{x}_1 = 0 + \Delta x_1 = 0 + \tfrac{7}{n} = \tfrac{7}{n}.$$
$$\overline{x}_2 = 0 + \Delta x_2 = 0 + \tfrac{7}{n} = 2.\tfrac{7}{n}.$$
$$\overline{x}_3 = 0 + \Delta x_3 = 0 + \tfrac{7}{n} = 3.\tfrac{7}{n}.$$
$$\overline{x}_n = 0 + \Delta x_n = 0 + \tfrac{7}{n} = n.\tfrac{7}{n},$$

sehingga setiap fungsi dapat diwakilkan oleh $f(\overline{x}_i) = i\cdot\frac{7}{n} = \frac{7i}{n}$.
Dengan demikian Jumlahan Riemann adalah:

$$\textstyle\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta x_i = f(\overline{x}_1)\Delta x_1 + f(\overline{x}_2)\Delta x_2 + \ldots.. + f(\overline{x}_n)\Delta x_n.$$

Karena Δx sama, maka menjadi:

$$\textstyle\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta x.$$

Karena $\lim\limits_{n\to\infty} f(\overline{x}_i)\ \Delta x_i$ disebut integral tentu pada interval [0, a] dan ditulis

$\int_0^a f(x)dx$, maka

$$\int_0^7 x\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \frac{7i}{n}\left(\frac{7}{n}\right).$$
$$\int_0^7 x\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \frac{49i}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{49}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i\ .$$
$$\int_0^7 x\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \frac{49i}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{49}{2}\left(\frac{n^2+n}{n^2}\right).$$
$$\int_0^7 x\,dx = \frac{49}{2}\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{n^2} = \frac{49}{2}(1) = \frac{49}{2}.$$

Jadi integral tentu dari $f(x) = x$, pada interval [0, 7] atau $\int_0^7 x\,dx$ adalah

$$\int_0^7 x\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta x = \frac{49}{2}.$$

Petunjuk

Jumlah deret aritmatika, deret kuadrat, dan deret kubik dalam notasi sigma.

$$\sum_{i=1}^{n} k = k + k + k + \ldots + k = kn$$
$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+2)}{2}$$
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+2)(2n+1)}{6}$$
$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}\right)^2$$

Ayo Mencoba

Pada bagian ini, kalian dapat melengkapi jawaban dari Latihan Soal Terbimbing 4.9 dan 4.10 yang masih terbuka. Jawaban yang hilang adalah yang masih tertulis "...". Kegiatan ini bertujuan agar kalian dapat memahami integral tentu.

Latihan Soal Terbimbing 4.9

Diketahui fungsi $f(x) = x^2$, tentukan integral tentu dari $f(x)$ pada interval [0,3] atau $\int_0^3 x^2 dx$!

Alternatif Penyelesaian:

Untuk menentukan integral tentu dari fungsi $f(x) = x^2$ pada interval [0,3], makahal pertama yang harus dilakukan adalah menentukan Jumlahan Riemann dari fungsi $f(x) = x^2$ dengan n sub interval pada interval tersebut. Oleh karena itu perlu ditentukan sebagai berikut.

a. **Panjang masing-masing sub interval.**

Interval yang diketahui adalah [0,3] dan dipartisi menjadi bagian yang sama, maka $\frac{\ldots - \ldots}{n} = \frac{\ldots}{n}$ untuk setiap $i = 1,2,3,\ldots,n$.

b. **Titik wakil pada masing-masing sub interval ($\overline{x}_i$)**

Perhatikan batas paling kiri. Batas paling kiri pada latihan ini adalah 0 dan batas paling kanan adalah ...., maka

$$\overline{x}_1 = 0 + \Delta x_1 = 0 + \frac{\ldots}{n} = \frac{\ldots}{n}.$$

$$\overline{x}_2 = 0 + \Delta x_2 = 0 + 2 \cdot \frac{\ldots}{n} = 2 \cdot \frac{\ldots}{n}.$$

$$\overline{x}_3 = 0 + \Delta x_3 = 0 + 3 \cdot \frac{\ldots}{n} = 3 \cdot \frac{\ldots}{n}.$$

$$\vdots$$

$$\overline{x}_n = 0 + \Delta x_n = 0 + n \cdot \frac{\ldots}{n} = n \cdot \frac{\ldots}{n}.$$

sehingga setiap fungsi dapat diwakilkan oleh $f(\overline{x}_i) = \left(i \cdot \frac{\ldots}{n}\right)^2 = \frac{\ldots}{\ldots}$

Dengan demikian Jumlahan Riemann adalah

$$\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta x_i = f(\overline{x}_1)\Delta x_1 + f(\overline{x}_2)\Delta x_2 + \ldots.. + f(\overline{x}_n)\Delta x_n.$$

Karena Δx sama, maka menjadi:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta x.$$

Karena $\lim_{n\to\infty} f(\bar{x}_i)\,\Delta x_i$ disebut integral tentu pada interval [0, a] dan ditulis $\int_0^a f(x)dx$, maka

$$\int_0^3 x^2 dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x.$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Jadi integral tentu dari $f(x) = x^2$ pada interval [0,3] atau $\int_0^3 x^2 dx$ adalah ....

Latihan Soal Terbimbing 4.10

Diketahui fungsi $f(x) = x^2 - 4x + 3$, tentukan integral tentu dari $f(x)$ pada interval [0,4] atau $\int_0^4 (x^2 - 4x + 3)dx$!

Alternatif Penyelesaian:

Untuk menentukan integral tentu dari fungsi $f(x) = x^2 - 4x + 3$ pada interval [0,4], hal pertama yang harus dilakukan adalah menentukan jumlahan Riemann dari fungsi $f(x) = x^2 - 4x + 3$ dengan n sub interval pada interval tersebut. Oleh karena itu Jumlahan Riemann adalah

a. **Panjang masing-masing sub interval.**

Interval yang diketahui adalah [0,4] dan dipartisi menjadi bagian yang sama, maka $\frac{\ldots - \ldots}{n} = \frac{\ldots}{n}$ untuk setiap $i = 1,2,3,\ldots,n$.

b. **Titik wakil pada masing-masing sub interval ($\bar{x}_i$)**

Perhatikan batas paling kiri. Batas paling kiri pada latihan ini adalah 0 dan batas paling kanan adalah ...., maka

$$\bar{x}_1 = 0 + \Delta x_1 = 0 + \frac{\ldots}{n} = \frac{\ldots}{n}.$$

$$\bar{x}_2 = 0 + \Delta x_2 = 0 + 2\cdot\frac{\ldots}{n} = 2\cdot\frac{\ldots}{n}.$$

$$\bar{x}_3 = 0 + \Delta x_3 = 0 + 3\cdot\frac{\ldots}{n} = 3\cdot\frac{\ldots}{n}.$$

$$\vdots$$

$$\bar{x}_n = 0 + \Delta x_n = 0 + n\cdot\frac{\ldots}{n} = n\cdot\frac{\ldots}{n}.$$

sehingga setiap fungsi dapat diwakilkan oleh $f(\bar{x}_i) = \left(i\cdot\frac{\ldots}{n}\right)^2 = \frac{\ldots}{\ldots}$

Dengan demikian Jumlahan Riemann adalah

$$\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i = f(\bar{x}_1)\Delta x_1 + f(\bar{x}_2)\Delta x_2 + f(\bar{x}_3)\Delta x_3 + \ldots.. + f(\bar{x}_n)\Delta x_n.$$

Karena Δx sama, maka menjadi:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x.$$

Karena $\lim_{n\to\infty} f(\bar{x}_i)\,\Delta x_i$ disebut integral tentu pada interval $[0, a]$ dan ditulis

$\int_0^a f(x)dx$, maka

$$\int_0^4 (x^2 - 4x + 3) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x.$$

$$\int_0^4 (x^2 - 4x + 3) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \text{....}\ (\text{....}).$$

$$= \text{...}$$

Jadi integral tentu dari $f(x) = x^2 - 4x + 3$ pada interval [0, 4] atau $\int_0^4 (x^2 - 4x + 3)$ adalah ....

Ayo Berpikir Kreatif

Bagaimana jika Δx nya tidak sama?

Ayo Mencoba

Latihan Soal 4.3

1. Diketahui fungsi $f(x) = 2 + x$ pada interval [0,2]. Tentukan integral tentu dari $f(x) = 2 + x$ pada interval [0,2] atau $\int_0^2 (2 + x)\, dx$!
2. Diketahui fungsi $f(x) = (2 - x)^2$ pada interval [0,2]. Tentukan integral tentu dari $f(x) = (2 - x)^2$ pada interval [0,2] atau $\int_0^2 (2 - x)^2\, dx$!
3. Diketahui fungsi $f(x) = x^2 + x$ pada interval [1,4]. Tentukan integral tentu dari $f(x) = x^2 + x$ pada interval [1,4] atau $\int_1^4 (x^2 + x)\, dx$!
4. Diketahui fungsi $f(x) = x^2 - x + 4$ pada interval [0,4]. Tentukan integral tentu dari $f(x) = x^2 - x + 4$ pada interval [0,4] atau $\int_0^4 (x^2 - x + 4)\, dx$!
5. Diketahui fungsi $f(x) = x^2 + 4x + 5$ pada interval [1,4]. Tentukan integral tentu dari $f(x) = x^2 + 4x + 5$ pada interval [1,4] atau $\int_1^4 (x^2 + 4x + 5)\, dx$!

3. Sifat-Sifat Integral Tentu

Selain dengan Jumlahan Riemann yang telah dipelajari, kita juga dapat menghitung integral dengan sifat-sifat integral tentu berikut.

Sifat-sifat

Sifat 4.9 Jika fungsi f dapat diintegralkan pada interval tertutup $[a,b]$, maka $\int_a^a f(x)dx = 0$.

Sifat 4.10 Jika fungsi f dapat diintegralkan pada interval tertutup $[a,b]$, maka $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

Sifat 4.11 Jika fungsi f dapat diintegralkan pada interval tertutup $[a,b]$, dan jika k sebarang konstanta, maka $\int_a^b [kf(x)]dx = k\int_a^b f(x)dx$.

Sifat 4.12 Jika fungsi f dan g data diintegralkan pada $[a,b]$, maka $f + g$ dapat diintegralkan pada $[a,b]$ sehingga

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Sifat 4.13 Jika fungsi f dan g data diintegralkan pada $[a,b]$, maka $f + g$ dapat diintegralkan pada $[a,b]$ sehingga

$$\int_a^b [f(x)-g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

Sifat 4.14 Jika fungsi f dapat diintegralkan pada interval tertutup yang memuat tiga buah bilangan a,b, dan c, maka nilainya tidak tergantung pada urutan a,b, dan c. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Ayo Berpikir Kreatif

Cobalah kalian tunjukkan Sifat 4.11 sampai sifat 4.14, kemudian presentasikan hasil tersebut.

4. Teorema Dasar Kalkulus

Teorema

Teorema Dasar Kalkulus I

Misalkan fungsi f kontinu pada selang tertutup $[a,b]$ dan misalkan x sembarang bilangan di dalam $[a,b]$. Jika fungsi F adalah fungsi yang didefinisikan oleh $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ maka $F'(x) = f(x)$.

Pembuktian Teorema Dasar Kalkulus I

Jika x dan $x + h$ berada pada interval $[a,b]$, maka

$$F(x+h)-F(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt.$$

$$= \left(\int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt\right) - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt$$

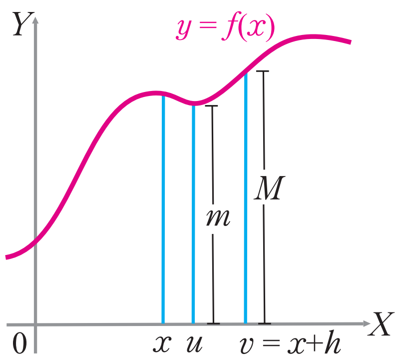
Untuk $h \neq 0$, maka

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt \quad \text{.......................(1)}$$

Jika diasumsikan untuk $h > 0$, f kontinu di $[x,x+h]$, pada sifat nilai ekstrim dikatakah bahwa u dan v di $[x,x+h]$ misalnya $f(u) = m$ dan $f(v) = M$, dimana m dan M memiliki nilai minimum dan maksimum pada f di $[x, x+h]$. Dengan memperhatikan Gambar 4.8, diperoleh bahwa $mh \leq \int_x^{x+h} f(t)dt \leq Mh$.

Dapat pula dinyatakan dengan

$$f(u)h \leq \int_x^{x+h} f(t)dt \leq f(v)h.$$



Gambar 4.8. Grafik Fungsi $y = f(x)$

Dengan membagi persamaannya dengan h, diperoleh bahwa

$$f(u) \leq \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt \leq f(v) \quad \text{.......................(2)}$$

Substitusikanlah persamaan (1) ke persamaan (2), maka diperoleh

$$f(u) \leq \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \leq f(v) \quad \text{...........................(3)}$$

Persamaan (3) dapat digunakan untuk menunjukkan $h < 0$

(dapat kalian coba sendiri).

Sekarang untuk $h \to 0$. Maka $u \to x$ dan $v \to x$, dimana u dan v berada diantara x dan $x+h$, karena itu

$$\lim_{h\to 0} f(u) = \lim_{u\to x} f(u) = f(x) \text{ dan } \lim_{h\to 0} f(v) = \lim_{v\to x} f(v) = f(x).$$

Karena f kontinu di x dapat disimpulkan bahwa $F'(x) = \lim_{v\to x} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f(x)$.

$$\text{Jadi, } F'(x) = f(x).$$

Ayo Mengingat Kembali

Masih ingatkah kalian tentang fungsi kontinu pada materi Limit?

Untuk memperjelas Teorema Dasar Kalkulus I, kalian dapat memperhatikan Contoh Soal 4.6.

Contoh Soal 4.6

Tentukan $\frac{d}{dx}\left(\int_1^x \sqrt{2+t}\, dt\right)$!

Petunjuk

$\frac{df(x)}{dx}$ merupakan simbol penulisan turunan.

Alternatif Penyelesaian:

Berdasarkan Teorema Dasar Kalkulus I,

$$F(x) = \int_1^x \sqrt{2+t}\, dt.$$

Diperoleh bahwa $f(t) = \sqrt{2+t}$ dan $a = 1$

Dari $F'(x) = f(x)$.

Jadi, $\frac{d}{dx}\left(\int_1^x \sqrt{2+t}\, dt\right) = \sqrt{2+t}$.

Teorema

Teorema Dasar Kalkulus II

Misalkan fungsi f kontinu pada selang tertutup $[a,b]$ dan misalkan F suatu fungsi sedemikian hingga $F'(x) = f(x)$.

Untuk semua x di dalam $[a,b]$, maka $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Ayo Mengingat Kembali

Masih ingatkah kalian tentang fungsi kontinu pada materi Limit?

Pembuktian Teorema Dasar Kalkulus II

Jika f kontinu pada semua titik di dalam $[a,b]$, dengan melihat Teorema Dasar Kalkulus I dan Sifat 4.1 diperoleh $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt + k$, dengan k suatu konstanta. Dengan mengambil $x = b$ dan $x = a$ berturut-turut, maka diperoleh

$$g(b) = \int_a^b f(t)\,dt + k \quad \text{.......................................}(4) \text{ dan}$$

$$g(a) = \int_a^a f(t)\,dt + k \quad \text{.......................................}(5)$$

Dari (4) dan (5), diperoleh $g(b) - g(a) = \int_a^b f(t)\,dt + k - \int_a^a f(t)\,dt$.

Karena $\int_a^a f(t)\,dt = 0$, maka $\int_a^b f(t)\,dt = g(b) - g(a)$.

Contoh Soal 4.7.

Tentukan $\int_1^3 x^2 dx$!

Alternatif Penyelesaian:

$f(x) = x^2$ memiliki anti turunan $\frac{1}{3}x^3$ atau dapat ditulis $g(x) = \frac{1}{3}x^3$.

f kontinu pada semua titik di dalam$[1,3]$ maka $a = 1$ dan $b = 3$.

Jika kita substitusikan $a = 1$ dan $b = 3$ ke $g(x)$, maka

$g(a) = g(1) = \frac{1}{3}(1)^3 = \frac{1}{3}$ dan $g(b) = g(3) = \frac{1}{3}(3)^3 = \frac{27}{3}$.

Jadi $\int_1^3 x^2 dx = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$.

Contoh 4.8

Tentukan $\int_1^5 (2x-1)\,dx$!

Alternatif Penyelesaian:

$$\int_1^5 2x\,dx = \frac{1}{1+1}2x^{1+1}\Big|_1^5 = x^2\Big|_1^5 = 5^2 - 1^1 = 24.$$

Petunjuk

Sifat 4.2 pada integral tak tentu, jika n bilangan rasional dan $n \neq 0$, maka

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C.$$

Ayo Berpikir Kreatif

Cobalah kalian temukan cara lain untuk menyelesaikan Contoh Soal 4.9 dan 4.10!

Ayo Mencoba

Pada bagian ini, kalian dapat melengkapi jawaban latihan Soal Terbimbing 4.11 dan 4.12 yang masih terbuka. Jawaban yang hilang ditulis dengan "....". Kegiatan ini bertujuan agar kalian dapat memahami teorema dasar kalkulus I dan II

Latihan Soal Terbimbing 4.11

Tentukan $\frac{d}{dx}\left[\int_0^x (4+t^6)\,dt\right]$!

Alternatif Penyelesaian:

Berdasarkan Teorema Dasar Kalkulus I, $F(x)$ = ...

Diperoleh bahwa $f(t)$ = ... dan a = ...

dari $F'(x) = f(x)$.

Jadi, $\frac{d}{dx}\left[\int_0^x (4+t^6)\,dt\right]$ = ...

Latihan Soal Terbimbing 4.12

Tentukan panjang lintasan yang ditempuh oleh sebuah objek yang bergerak dengan kecepatan $v(t) = (5-t)$ cm/detik dari $t = 0$ detik sampai $t = 5$ detik!

Alternatif Penyelesaian:

Diketahui: $v(t)$ = ...

Ditanyakan: v saat $t = 0$ sampai $t = 5$

Jawab: $s = \int_0^5 v(t)\,dt = \int_0^5 (5-t)\,dt$

. = ...

Jadi panjang lintasannya adalah ....

Coba kalian pahami Contoh Soal 4.9, agar kalian dapat mengaplikasikan Teorema Dasar Kalkulus I dan II pada masalah matematis.

Contoh Soal 4.9

Tentukan $\int_1^4 (5 - 2x + 3x^2)\, dx$!

Alternatif Penyelesaian:

$\int_1^4 (5 - 2x + 3x^2) = \int_1^4 5\, dx - \int_1^4 2x\, dx + \int_1^4 3x^2\, dx$ (Sifat 4.12, Sifat 4.13).

$\int_1^4 (5 - 2x + 3x^2) = 5\int_1^4 dx - 2\int_1^4 x\, dx + 3\int_1^4 x^2\, dx$ (Sifat 4.11).

$\int_1^4 (5 - 2x + 3x^2) = 5(x)_1^4 - 2\left(\frac{1}{2}x^2\right)_1^4 + 3\left(\frac{1}{3}x^3\right)_1^4.$

$\int_1^4 (5 - 2x + 3x^2) = 5(4 - 1) - (4^2 - 1) + 3(4^3 - 1).$ (Teorema Dasar Kalkulus II).

$\int_1^4 (5 - 2x + 3x^2) = 5(3) - (16 - 1) + (64 - 1).$

$\int_1^4 (5 - 2x + 3x^2) = 15 - 15 + 63 = 63.$

Ayo Mencoba

Pada bagian ini, kalian dapat melengkapi jawaban dari Latihan Soal Terbimbing 4.13 dan 4.14 yang masih terbuka. Jawaban yang hilang adalah yang masih tertulis "....". Kegiatan ini bertujuan agar kalian dapat memahami sifat-sifat integral tentu dan teorema dasar kalkulus.

Latihan Soal Terbimbing 4.13

Tentukan $\int_0^3 (3 - 2x + x^2)dx$!

Alternatif Penyelesaian:

$\int_{...}^{...} (3 - 2x + x^2) = \int_{...}^{...} ...dx - \int_{...}^{...} ...dx + \int_{...}^{...} ...dx$ (Sifat ....).

$= ....$

Latihan Soal Terbimbing 4.14

Tentukan $\int_0^2 x^2(x^3 + 1)dx$!

Alternatif Penyelesaian:

Mari mengingat kembali pada sub materi Integral Tak Tentu.

Ayo Mengingat Kembali

Sifat 6. Aturan Integrasi substitusi

Jika g suatu fungsi yang dapat didiferensialkan, dan n sebuah bilangan rasional, maka $\int [g(x)]^n g'(x)dx = \frac{1}{n+1}[g(x)]^{n+1} + C;\ \ n \neq -1.$

Misalkan $g(x)$ = ..., maka $g'(x)$ = ... dx.

Kita lihat untuk $g'(x)$ = ... dx maka agar sesuai dengan pertanyaannya diperlukan faktor .... untuk menyertai dx sehingga

$$\int_0^2 x^2(x^3+1)dx = \int_0^2 (\ldots.)\left(\left(\tfrac{1}{3}\right)\ldots.\,dx\right).$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

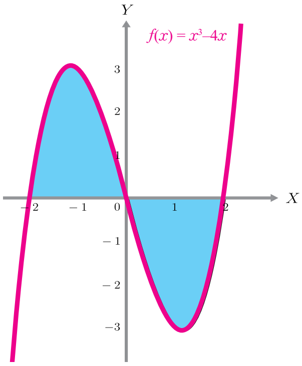
Ayo Berpikir Kreatif

Dapakah kalian menyelesaikan Latihan Soal Terbimbing 4.13 dan 4.14 dengan model jawaban yang lain?

Contoh Soal 4.10

Hitunglah luas bidang datar yang dibatasi oleh grafik $y = x^3 - 4x$ dan sumbu X!

Alternatif Penyelesaian:



Gambar 4.9.
Grafik Fungsi $f(x) = x^3 - 4x$

Mari kita amati grafik $y = x^3 - 4x$.

Kita perlu mencari batas-batasnya terlebih dahulu dengan cara mencari titik potong sumbu X dengan menyubstitusikan $y = 0$.

$y = x^3 - 4x.$

$0 = x^3 - 4x.$

$x = 2$ dan $x = -2.$

Jika dilihat pada grafik di atas maka terdapat dua daerah yaitu [–2,0] di atas sumbu X dan [0,2] di bawah sumbu Y.

Berdasarkan Sifat 4.14 diperoleh bahwa:

$$\int_{-2}^{2}(x^3-4x)\,dx = \int_{-2}^{0}(x^3-4x)\,dx + \left(-\int_{0}^{2}(x^3-4x)\,dx\right).$$

$$\int_{-2}^{2}(x^3-4x)\,dx = \left(\tfrac{1}{4}x^4-2x^2\right)_{-2}^{0} - \left(\tfrac{1}{4}x^4-2x^2\right)_{0}^{2}.$$

$$\int_{-2}^{2}(x^3-4x)\,dx = \left[\left(\tfrac{1}{4}(0)^4-2(0)^2\right)-\left(\tfrac{1}{4}(-2)^4-2(-2)^2\right)\right]-\left[\left(\tfrac{1}{4}(2)^4-2(2)^2\right)-\left(\tfrac{1}{4}(0)^4-2(0)^2\right)\right]$$

$$\int_{-2}^{2}(x^3-4x)\,dx = (0-(4-8)) - ((4-8)-0) = 4+4 = 8.$$

Ayo Mencoba

Pada bagian ini, kalian dapat melengkapi jawaban dari Latihan Soal Terbimbing 4.15 dan 4.16 yang masih terbuka. Jawaban yang hilang adalah yang masih tertulis "....". Kegiatan ini bertujuan agar kalian dapat memahami sifat integral tentu.

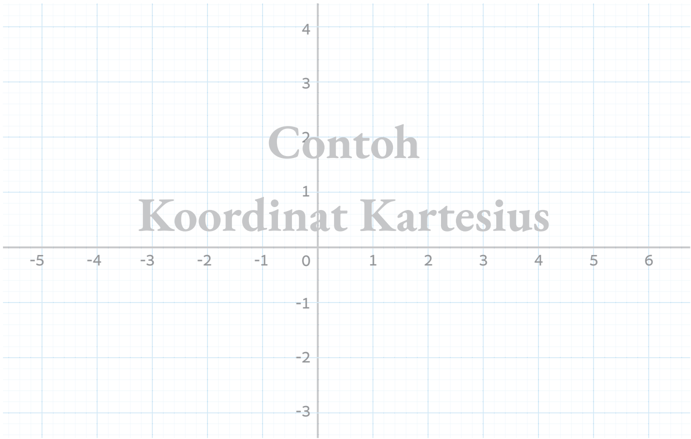
Latihan Soal Terbimbing 4.15

Hitunglah luas bidang datar yang dibatasi oleh grafik $y = 2x - x^3$ dan sumbu X!

Alternatif Penyelesaian:

Kalian gambar grafik $y = 2x - x^3$ pada koordinat kartesius.

Sebelum menggambar grafik tersebut, kalian perlu menentukan batas-batasnya terlebih dahulu dengan cara mencari titik potong sumbu X. Dengan menyubstitusikan $y = 0$ pada persamaan $y = 2x - x^3$, diperoleh bahwa $2x - x^3 = 0$, sehingga $x =$ .... atau $x =$ .... atau x= ....



Jika dilihat pada grafik yang kalian gambar, terdapat dua daerah yaitu [... , ...] di atas sumbu X dan [... , ...] di bawah sumbu X. Berdasarkan sifat .... maka diperoleh

$$\int_{\dots}^{\dots} (2x - x^3)\, dx = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Video Pembelajaran

Kalian dapat melihat penjelasan Latihan Soal Terbimbing 4.15. Lakukan *scan barcode* disamping atau daring *Youtube* dengan link https://youtu.be/watch?v=cd-ojuBW0DQ

Latihan Soal Terbimbing 4.16

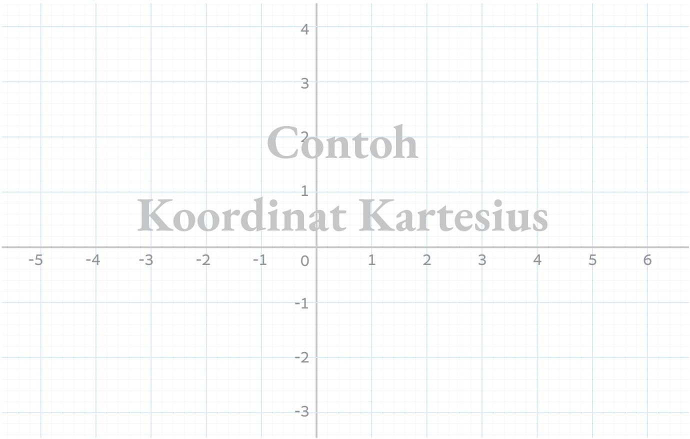
Hitunglah luas bidang datar yang dibatasi oleh grafik $y = x^3 - 9x$ dan sumbu X!

Alternatif Penyelesaian:

Kalian gambar grafik $y = x^3 - 9x$ pada koordinat kartesius.

Kita cari batas-batasnya terlebih dahulu dengan cara mencari titik potong sumbu X dengan menyubstitusikan $y = 0$.

....



Jika dilihat pada grafik yang kalian gambar, terdapat dua daerah yaitu [... , ...] di atas sumbu X dan [... , ...] di bawah sumbu X. Berdasarkan sifat .... maka diperoleh

$$\int_{...}^{...} (2x - x^3)\, dx = \text{...}$$

$$= \text{...}$$

Ayo Mencoba

Latihan Soal 4.4

1. Tentukan $\frac{d}{dx}\left[\int_x^2 \left(t^2 + t^{\frac{2}{3}}\right) dt\right]$!
2. Tentukan $\frac{d}{dx}\left[\int_x^2 \left(t^2 + t^{\frac{2}{3}}\right) dt\right]$!
3. Tentukan $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3\sin^3 x\, dx$!
4. Tentukan $\int_3^6 xy\, dx$ dengan $x = 6 \cos \theta$ dan $y = 2 \sin \theta$!
5. Jika $\int_0^9 f(x)dx = 37$ dan $\int_0^9 g(x)dx = 16$. Tentukan $\int_0^9 [2f(x)+3g(x)]dx$!
6. Sebuah partikel bergerak sepanjang garis sehingga kecepatannya pada waktu t adalah $v(t) = t^2 - t - 6$ (diukur dalam meter per detik). Tentukanlah
   a. perpindahan partikel dalam periode waktu $1 \le t \le 4$!
   b. jarak yang ditempuh selama periode itu!
7. Wayan dan Satwika masing-masing mengendarai sepeda motor dan bergerak dengan kecepatan masing-masing. Wayan bergerak dengan kecepatan $v_A = t + \frac{1}{t+1}$ dan Satwika bergerak dengan kecepatan $v_B = t + \frac{1}{(t+1)^2}$. Apakah Satwika dapat menyusul Wayan? Jelaskan alasannya!

C. Penerapan Integral

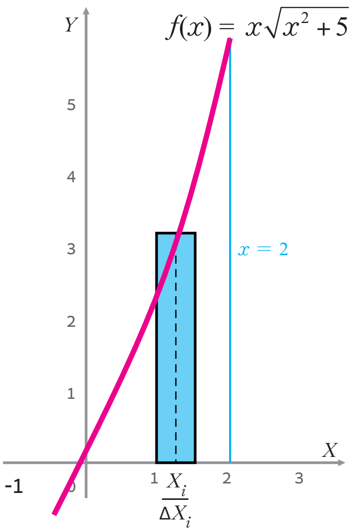
Setelah kalian mengetahui tentang integral tak tentu dan integral tentu, sekarang kalian akan mempelajari penerapan integral pada kehidupan sehari-hari. Integral dapat diterapkan di berbagai bidang, seperti bidang ekonomi, bisnis, fisika, dan luas bidang datar. Mari simak penjelasan berikut!

1. Luas Bidang Datar

Contoh Soal 4.11

Tentukan luas daerah di kuadran pertama yang dibatasi $f(x) = x\sqrt{x^2+5}$, sumbu X dan garis $x = 2$!

Alternatif Penyelesaian:



Gambar 4.10.
Grafik Fungsi $f(x) = x\sqrt{x^2+5}$

Pertama yang harus kalian dilakukan adalah menggambarkan grafik fungsinya terlebih dahulu. Mari kita amati grafiknya berikut.

Jika kita perhatikan maka terdapat interval tertutup yaitu [0,2]. Lebar persegi ke-i yang terbentuk adalah Δx_i dan tingginya adalah $x_i\sqrt{x_i^2+5}$. Jumlah ukuran luas dari n buah persegi panjang adalah $x_i\sqrt{x_i^2+5}\Delta x_i$. Misalkan A adalah luas daerah itu, maka

$$A = \lim_{|\Delta x| \to \infty} \sum_{i=1}^{n} x_i\sqrt{x_i^2+5}\,\Delta x_i$$

$$A = \int_0^2 x\sqrt{x^2+5}\,dx$$

$$A = \tfrac{1}{2}\int_0^2 x\sqrt{x^2+5}\,(2dx)$$

$$A = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{3}(x^2+5)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2 = \tfrac{1}{3}\left[(9)^{\frac{2}{3}} - (5)^{\frac{2}{3}}\right] = \tfrac{1}{3}(27 - 5\sqrt{5})$$

Jadi luas daerahnya $\frac{1}{3}\left(27 - 5\sqrt{5}\right)$ satuan luas.

Ayo Mencoba

Pada bagian ini, kalian dapat melengkapi jawaban dari Latihan Soal Terbimbing 4.17 dan 4.18 yang masih terbuka. Jawaban yang hilang adalah yang masih tertulis "....". Kegiatan ini bertujuan agar kalian dapat menerapkan integral pada bidang datar.

Latihan Soal Terbimbing 4.17

Tentukan luas daerah di kuadran pertama yang dibatasi $f(x) = x^2 - 4x$, garis $x = 1$ dan garis $x = 3$!

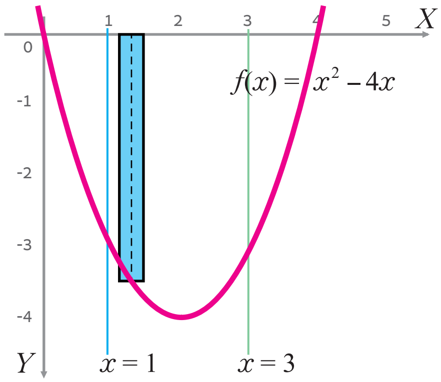
Alternatif Penyelesaian:

Pertama yang harus kalian lakukan adalah menggambarkan grafik fungsinya terlebih dahulu. Kalian amati grafiknya seperti pada Gambar 4.11! Jika diperhatikan dengan saksama, gambar tersebut terdapat interval tertutup yaitu [... , ...]. Lebar persegi ke-i yang terbentuk adalah Δx_i dan tingginya adalah .... Jumlah ukuran luas dari n buah persegi panjang adalah .... Misalkan A adalah luas daerah itu, maka

$$A = \lim_{|\Delta x| \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Delta x_i.$$

A = ...

Jadi luas daerahnya adalah ...... satuan luas.



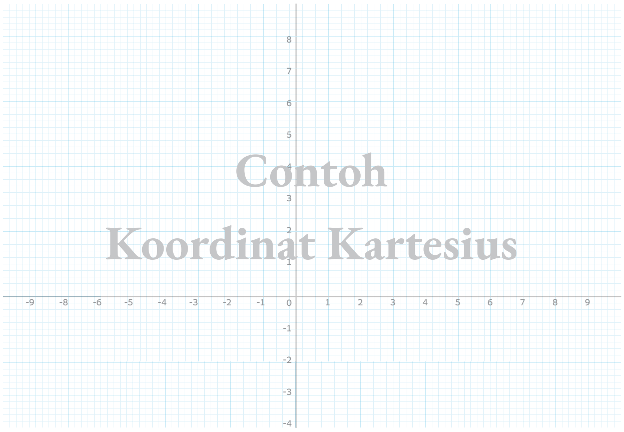
Gambar 4.11. Grafik Fungsi $f(x) = x^2 - 4x$, $x = 1$ dan garis $x = 3$.

Latihan Soal Terbimbing 4.18

Tentukan luas daerah di kuadran pertama yang dibatasi $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$, garis $x = -2$ dan garis $x = 3$!

Alternatif Penyelesaian:

Pertama-tama, gambarlah grafik fungsinya terlebih dahulu. Kalian buat dan amati grafiknya!



Jika kita perhatikan, maka terdapat interval tertutup yaitu [–2,1] di atas sumbu X dan [1,3] di bawah sumbu X. Lebar persegi ke-i yang terbentuk adalah Δx_i dan tingginya adalah .... Jumlah ukuran luas dari n buah persegi panjang adalah .... Karena terdapat dua daerah yaitu di atas sumbu X dan di bawah sumbu X, maka

$$A_1 = \lim_{|\Delta x| \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Delta x_i$$

$$A_1 = \int_{\ldots}^{\ldots} f(x)\,dx.$$

$$A_1 = \int_{\ldots}^{\ldots} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; dx\text{., dan}$$

$$A_2 = \lim_{|\Delta x| \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Delta x_i$$

$$A_2 = \int_{\ldots}^{\ldots} f(x)\,dx.$$

$$A_2 = \int_{\ldots}^{\ldots} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; dx\text{., maka}$$

$$A = A_1 + A_2.$$

$$A = \int_{\ldots}^{\ldots} [\ldots\ldots - \ldots\ldots - \ldots\ldots + \ldots\ldots] dx + \int_{\ldots}^{\ldots} [\ldots\ldots - \ldots\ldots - \ldots\ldots + \ldots\ldots] dx.$$

$$A = [\ldots\ldots - \ldots\ldots - \ldots\ldots + \ldots\ldots]_{\ldots}^{\ldots} + [\ldots\ldots - \ldots\ldots - \ldots\ldots + \ldots\ldots]_{\ldots}^{\ldots}$$

$$A = \ldots\ldots + \ldots\ldots$$

$$A = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

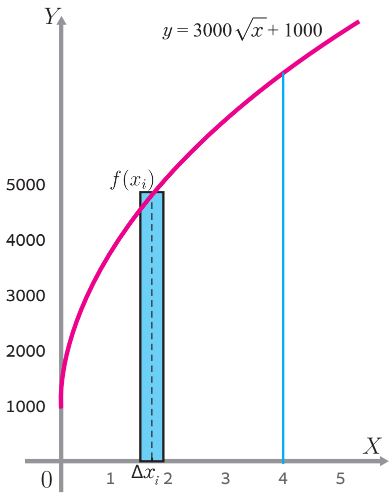
Jadi luas daerahnya adalah .... satuan kuadrat.

2. Dalam Bidang Ekonomi dan Bisnis

Contoh Soal 4.12

Bidang ekonomi dan bisnis juga dapat menerapkan prinsip integral. Bayangkan tentang penjualan telepon seluler merek A selama lima tahun pertama setelah diluncurkan. Terjualnya telepon seluler disimbolkan dengan y buah setiap tahun dan x tahun, lalu sejak produksi pertama diperkenalkan dapat dituliskan dalam bentuk $y = 3000\sqrt{x} + 1000$; $0 \le x \le 5$. Berapakah jumlah penjualan selama 4 tahun pertama!

Alternatif Penyelesaian:



Gambar 4.12. Grafik Fungsi
$y = 3000\sqrt{x_i} + 1000\,;\, 0 \le x \le 5.$

Perhatikan Gambar 4.12 di samping. Jika kalian perhatikan maka terdapat interval tertutup yaitu [0,4]. Lebar persegi ke-i yang terbentuk adalah Δx_i dan tingginya adalah $3000\sqrt{x_i}$ +1000. Jumlah ukuran luas dari n buah persegi panjang adalah $(3000\sqrt{x_i}+1000\,)\Delta x_i$. Jika S buah barang terjual selama 4 tahun pertama, maka

$$S = \lim_{|\Delta x| \to \infty} \sum_{i=1}^{n} (3000\sqrt{x_i} + 1000\,)\Delta x_i$$

$$S = \int_0^4 f(x)\, dx = \int_0^4 (3000\sqrt{x_i} + 1000)\, dx$$

$$= 3000 \cdot \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{3}{2}} + 1000x \Big|_0^4.$$

$$S = 2000\,(4)^{\frac{3}{2}} + 1000\,(4) = 20000.$$

Jadi, selama 4 tahun pertama terjual 20.000 buah telepon seluler merek A.

Ayo Mencoba

Pada bagian ini, kalian dapat melengkapi jawaban dari Latihan Soal Terbimbing 4.19 yang masih terbuka. Jawaban yang hilang adalah yang masih tertulis "....". Kegiatan ini bertujuan agar kalian dapat menerapkan integral di bidang ekonomi.

Latihan Soal Terbimbing 4.19

Seorang pemimpin perusahaan memperhitungkan bahwa pembelian seperangkat peralatan akan menghasilkan suatu penghematan operasi pada perusahaan. Kecepatan penghematan ongkos operasi adalah $f(x)$ (dalam rupiah) setiap tahun, bila peralatan itu telah dipakai selama x tahun adalah

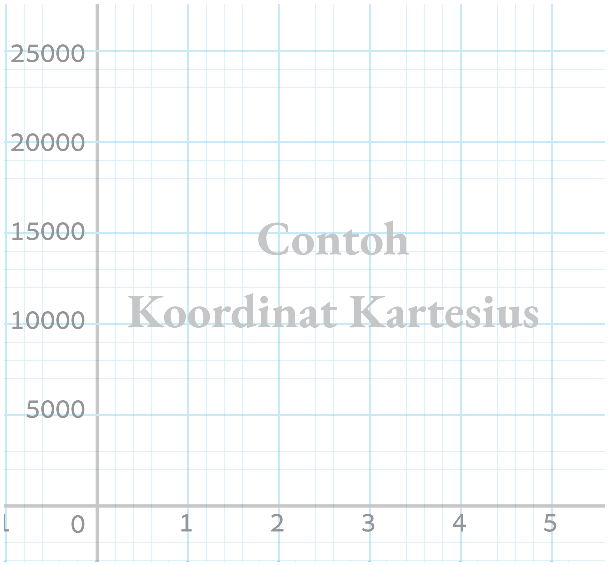
$$f(x) = 4000x + 1000;\ 0 \le x \le 10.$$

a. Berapa jumlah penghematan ongkos operasi dalam 5 tahun pertama?

b. Jika harga pembelian sama dengan Rp 36.000,00, dalam berapa tahun harga peralatan itu kembali?

Alternatif Penyelesaian:

a. Sketsakan grafiknya terlebih dahulu.



Jika kita perhatikan maka terdapat interval tertutup yaitu [....,....]. Lebar persegi ke-i yang terbentuk adalah Δx_i dan tingginya adalah.............. Jumlah ukuran luas dari n buah persegi panjang adalah ......Δx_i. Jika S adalah jumlah penghematan dalam 5 tahun pertama, maka

$$S = \lim_{|\Delta x| \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \text{........................} \Delta x_i .$$

$$S = \int_{\dots}^{\dots} f(x)\, dx.$$

S = ...

Jadi, jumlah penghematan dalam 5 tahun pertama adalah ....

b. Karena harga seperangkat peralatan adalah 36000 dan misalkan dalam n tahun harga peralatan itu kembali, maka

$$\int_0^n f(x)dx = 36000$$

$$\int_n^0 (4000x + 1000)dx = 36000$$

....

Jadi, dalam jangka waktu .... tahun harga peralatan itu kembali.

3. Dalam Fisika

Contoh Soal 4.13

Ketika sebuah partikel terletak pada a dengan jarak x meter dari titik asal, gaya (x^2+2x) N bertindak di atasnya. Berapa usaha yang dilakukan untuk memindahkannya dari $x = 1$ ke $x = 3$?

Alternatif Penyelesaian:

$$W = \int_1^3 (x^2 + 2x)dx = \left(\tfrac{x^3}{3} + x^2\right)\Big|_1^3 = \frac{50}{3}.$$

Jadi usaha yang dilakukan untuk memindahkannya dari $x = 1$ ke $x = 3$ adalah $\frac{50}{3}$ Joule.

Latihan Soal Terbimbing 4.20

Sebuah gaya sebesar 40 N diperlukan untuk menahan pegas yang telah direntangkan dari panjang aslinya 10 cm sampai panjang 15 cm. Berapa usaha yang dilakukan untuk meregangkan pegas dari 15 cm menjadi 18 cm?

Alternatif Penyelesaian:

Menurut Hukum Hooke, gaya yang diperlukan untuk menahan pegas meregang x meter di luar panjang alaminya adalah $f(x) = kx$. Ketika pegas ditarik dari ... cm sampai .... cm, jumlah yang diregangkan adalah .... – .... = ... cm = ... m.

Ini berarti f(.....) = 40, maka f(.....)=40.

0,05k = 40 atau k = ...

Selanjutnya, k = ... dan usaha yang dilakukan untuk meregangkan pegas dari 15 cm menjadi 18 cm adalah

$$W = \int_{0,05}^{0,08} \text{..........}\ dx = \text{.......}\Big|_{\dots}^{\dots} = \text{.........}$$

Jadi usaha yang dilakukan untuk meregangkan pegas dari 15 cm menjadi 18 cm adalah .... Joule.

Ayo Mencoba

Latihan Soal 4.5

1. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh $y = x^2 + x - 12$ dan sumbu X!
2. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$ dan $y = -x^2 + 4x$!
3. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y^2 = 2x - 2$ dan $y = x - 5$!
4. Seorang manajer di suatu restoran menerima kiriman bahan makanan tertentu setiap hari Senin. Karena jumlah pengunjung sedikit pada awal minggu dan banyak pada akhir minggu, permintaan meningkat sesuai dengan majunya hari dalam satu minggu, sehingga setelah x hari, barang inventaris tersebut berjumlah y satuan, dengan persamaan $y = 49000 - 1000x^2$. Jika ongkos penyimpanan setiap hari adalah Rp 500,00, tentukan jumlah seluruh ongkos pemeliharaan inventaris selama 7 hari!
5. Sebuah kabel memiliki berat 200 kg dengan panjang 100 meter. Kabel tersebut dan digantung secara vertikal dari atas sebuah gedung yang tinggi. Berapa usaha yang diperlukan untuk mengangkat kabel ke puncak gedung?

Ringkasan dan Refleksi

Ayo Mengomunikasikan

Dalam bab ini kalian sudah belajar tentang integral tak tentu dan integral tentu, beserta dengan aplikasinya pada kehidupan sehari-hari dan ilmu pengetahuan lainnya.

1. Menurut kalian, apa yang dimaksud dengan integral tak tentu dan integral tentu?
2. Dapatkah kalian memberikan contoh soal kejadian sehari-hari yang berkaitan dengan integral tak tentu dan integral tentu?

Ayo Gunakan Teknologi

Teman-teman, kalian dapat mengunduh dan menggunakan aplikasi *GeoGebra 3D Calculator* atau *Photomath* untuk memeriksa kembali jawaban yang telah kalian peroleh setelah menyelesaikan Latihan Soal Terbimbing dan Latihan Soal. Dengan menggunakan aplikasi ini, kalian dapat mengevaluasi sendiri apakah jawaban yang diperoleh sudah benar atau belum. Jika kalian tidak ingin mengunduh aplikasi, kalian dapat mengunjungi laman https://www.symbolab.com/ untuk memeriksa kembali jawaban kalian.

GeoGebra 3D Calculator
International GeoGebra Institute

photomath

Uji Kompetensi

1. Diketahui fungsi $f(x) = 12 - x - x^2$, sumbu X dan garis-garis $x = -3$ dan $x = 2$.
   a. Nyatakan ukuran dari luas sebagai suatu jumlahan Riemann dengan partisi yang sama!
   b. Tentukan integral tentu dengan $\int_0^a f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x$!
   c. Tentukan integral tentu dengan sifat-sifatnya!
2. Hitunglah $\int_{-3}^{4} |x+2|\,dx$!
3. Tunjukkan bahwa $\int_{3}^{-1} f(x)dx + \int_{4}^{3} f(x)dx + \int_{-3}^{4} f(x)dx + \int_{-1}^{-3} f(x)dx = 0$.
4. Carilah $\int_4^{16} \left[\frac{d}{dx}\int_5^x (2\sqrt{t}-1)\right]dx$!
5. Seorang kolektor benda-benda seni membeli sebuah lukisan dari seorang seniman seharga Rp 15.000.000,00. Nilai lukisan tersebut bertambah seiring waktu, sesuai dengan $\frac{dv}{dt} = 5t^2 + 10t + 50$. Dimana V adalah harga lukisan dalam rupiah yang diharapkan dari sebuah lukisan setelah t tahun pembelian. Jika $\frac{dv}{dt}$ berlaku untuk 6 tahun kemudian, tentukan harga dari lukisan tersebut empat tahun kemudian!
6. Sebuah tangki berbentuk kerucut dengan puncak ke arah bawah memiliki tinggi 10 m dan jari-jarinya 4 m. Kerucut Tangki tersebut diisi air setinggi 8 m. Temukan usaha yang diperlukan untuk mengosongkan tangki dengan memompa semua air ke bagian atas tangki! (Kerapatan air adalah 1000 kg/m)!

KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET, DAN TEKNOLOGI
REPUBLIK INDONESIA, 2022
Matematika Tingkat Lanjut untuk SMA/MA Kelas XII
Penulis: Wikan Budi Utami, dkk
ISBN 978-602-244-771-9 (jilid 2)

Bab 5 Analisis Data dan Peluang

PENGALAMAN BELAJAR

Setelah mempelajari bab ini kalian diharapkan:

- Menginterpretasikan parameter distribusi seragam;
- Memecahkan permasalahan yang berkaitan dengan distribusi seragam;
- Menginterpretasikan parameter distribusi binomial;
- Menghitung nilai harapan distribusi binomial;
- Memecahkan permasalahan yang berkaitan dengan distribusi binomial;
- Menginterpretasikan parameter distribusi normal;
- Menghitung nilai harapan distribusi normal;
- Memecahkan permasalahan yang berkaitan dengan distribusi normal.

Gambar 5.1. Pierluigi Collina (wasit) Menentukan Tim yang akan Bermain Terlebih Dahulu
Sumber: www.sportbible.com/ PA (2010)

Pierluigi Collina adalah seorang wasit sepak bola profesional. Dia dijadwalkan untuk memimpin pertandingan sepak bola di Piala Dunia. Dalam satu minggu terdapat 7 kali pertandingan yang harus dipimpinnya. Sebelum pertandingan dimulai wasit akan melempar koin yang memiliki dua sisi yang seimbang untuk menentukan tim mana yang akan mendapatkan bola terlebih dahulu. Apakah peluang keluar sisi gambar dan angka sama? Jika sisi gambar menyatakan tim mana yang mendapatkan bola terlebih dahulu, dapatkah kalian menentukan peluang wasit mendapatkan 1 sisi gambar dalam satu hari, dua hari berturut-turut, bahkan selama tujuh hari berturut-turut?

Untuk memecahkan permasalahan tersebut, kalian dapat menggunakan konsep distribusi seragam, distribusi binomial, dan distribusi normal. Materi tersebut akan kalian pelajari pada bab analisis dan peluang.

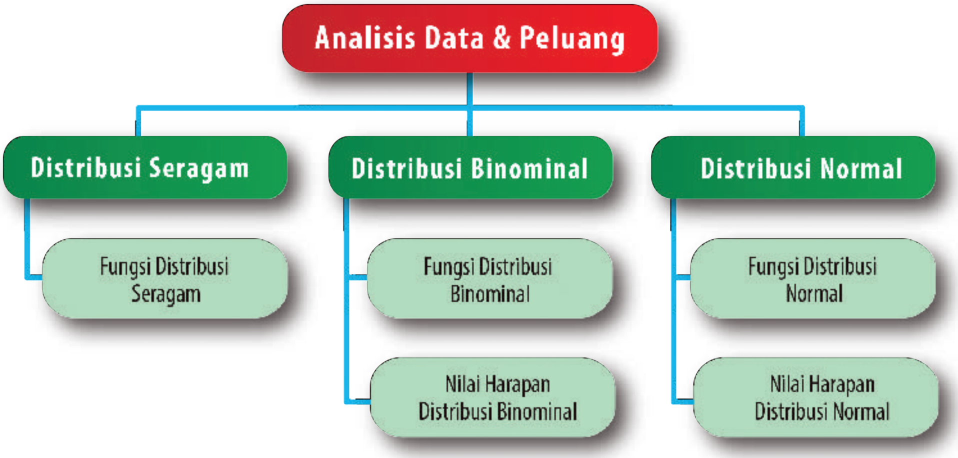
Pertanyaan Pemantik

1. Apa parameter yang digunakan pada distribusi seragam, distribusi binomial, dan distribusi normal?
2. Bagaimana cara menentukan nilai harapan distribusi binomial dan distribusi normal?
3. Apa saja kejadian yang berdistribusi seragam?
4. Apa saja kejadian yang berdistribusi binomial?
5. Apa saja kejadian yang berdistribusi normal?

Kata kunci

Distribusi Seragam, Distribusi Binomial, Distribusi Normal.

Peta Konsep



A. Distribusi Seragam

Ayo Mengingat Kembali

Peluang adalah kemungkinan munculnya suatu kejadian.
Peluang kejadian A dapat ditulis sebagai $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ dengan
$n(A)$ adalah banyaknya titik sampel kejadian A;
$n(S)$ adalah banyaknya ruang sampel dari suatu percobaan.

Ayo Bereksplorasi

Eksplorasi 5.1

Mari kita siapkan sebuah uang logam, isikan data pada berikut

Banyaknya Sisi Gambar	Banyaknya Sisi Angka
....	....

Coba kalian lemparkan uang logam tersebut

Hasil Lemparan yang Mungkin	Nilai Peluang
Angka	....
Gambar	....

Mari jawab pertanyaan berikut:

1. Apakah peluang muncul sisi gambar dan angka sama?
2. Dapatkah kalian menuliskan bentuk peluangnya?
3. Apa kesimpulan yang kalian didapatkan?

Ayo Berpikir Kritis

Jika terdapat tiga buah uang logam seimbang dilemparkan, bagaimana menentukan distribusi peluang keluar sisi angka?

Definisi

Fungsi Distribusi Seragam

Perhatikan kembali Eksplorasi 5.1. Jika koin yang seimbang dilempar, setiap elemen dalam ruang yaitu S = {angka,gambar} mempunyai peluang yang sama untuk muncul yaitu $\frac{1}{2}$. Oleh karena itu kita memiliki distribusi seragam dengan $f(x;2) = \frac{1}{2}$ untuk $x = 1,2$.

Dari semua distribusi peluang, yang paling sederhana adalah distribusi seragam karena dalam distribusi ini, setiap nilai variabel acak memiliki peluang kejadian terjadi yang sama.

Apabila variabel acak X mempunyai nilai-nilai $x_1, x_2, \dots, x_k$ dengan peluang yang sama, maka distribusi seragam diskret dapat dinyatakan dengan

$$f(x;k) = \frac{1}{k}, \text{ untuk } x = x_1, x_2, \dots, x_k.$$

Mari kalian perhatikan contoh soal dan latihan soal terbimbing berikut!

Contoh Soal 5.1

Pada pertandingan sepak bola, wasit meminta kapten tim untuk memilih sisi pada sebuah koin. Tim A memilih sisi gambar dan tim B memilih sisi angka, kemudian wasit melemparkan koin. Jika x menyatakan tim pertama yang mendapatkan bola dari sebuah pelemparan koin, tentukan distribusi peluang x!

Alternatif Penyelesaian:

Setiap elemen pada ruang sampel sebuah koin $S = \{A,G\}$ memiliki peluang yang sama untuk muncul yaitu $\frac{1}{2}$. Jadi distribusi seragamnya adalah $f(x;2) = \frac{1}{2}$ untuk $x = 1,2$.

Contoh Soal 5.2

Sebuah dadu seimbang dilemparkan. Jika x menyatakan mata dadu yang muncul, tentukan distribusi peluang x!

Alternatif Penyelesaian:

Gambar 5.2. Mata Dadu

Mari kita ingat lagi bahwa setiap elemen pada ruang sampel $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ memiliki peluang yang sama untuk muncul yaitu 1/6. Jadi distribusi seragamnya adalah $f(x;6) = \frac{1}{6}$ untuk $x = 1,2,3,4,5,6$.

Ayo Mencoba

Pada bagian ini, kalian dapat melengkapi jawaban dari Latihan Soal Terbimbing 5.1 dan 5.2 yang masih terbuka. Jawaban yang hilang adalah yang masih tertulis "...". Kegiatan ini bertujuan agar kalian dapat menginterpretasikan parameter distribusi seragam dan memecahkan permasalahan yang berkaitan dengan distribusi seragam.

Latihan Soal Terbimbing 5.1

Misalkan, seorang dari 10 karyawan dipilih secara acak untuk mengawasi suatu proyek. Jika x adalah peluang terpilihnya satu karyawan secara acak. Tentukan distribusi peluang x!

Alternatif Penyelesaian:

Jumlah karyawan adalah .... orang, yang akan dipilih .... orang secara acak. Karena masing-masing karyawan memiliki peluang yang sama untuk muncul adalah ...., maka distribusi seragamnya adalah $f(x; \dots) = \frac{1}{\dots}$ untuk $x = 1, 2, \dots,$ $\dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots$

Latihan soal terbimbing 5.2

Tim bulu tangkis dari 4 orang pemain yaitu A, B, C, dan D. Jika dari tim tersebut dipilih 2 orang secara acak untuk bermain, tentukan distribusi seragamnya!

Alternatif Penyelesaian:

Jumlah dalam satu tim adalah .... orang, yang akan dipilih .... orang secara acak. Maka banyaknya kombinasi yang mungkin adalah $\binom{\dots}{\dots} = \dots$, sehingga yang dapat didaftarkan sebagai AB, ... , ... , ... , ... , dan ...
Karena masing-masing memiliki peluang terpilih yang sama, maka distribusi seragamnya adalah $f(x; \dots) = \frac{1}{\dots}$ untuk $x = \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots$

Ayo Mencoba

Latihan Soal 5.1

1. Dalam satu tahun terdiri dari 12 bulan. Tentukan peluang dipilihnya 3 bulan dalam satu tahun secara acak!
2. Satu set kartu bridge berisi 52 kartu. Tentukan peluang terambilnya satu kartu pada pengambilan satu lembar kartu bridge secara acak!
3. Sebuah kotak berisi 6 buah bola lampu yang terdiri dari 5 watt, 8 watt, 11 watt, 14 watt, 18 watt, dan 23 watt. Tentukan peluang terambilnya sebuah lampu dari kotak tersebut!
4. Suatu kotak berisi 12 bola yang diberi nomor 1 sampai 12 yang akan diambil secara acak. Tentukan peluang terambilnya sebuah bola dari dalam kotak!
5. Toko Roti "Enak" akan menentukan warna untuk kemasan yaitu merah, hijau, kuning, biru, ungu, putih, hitam, dan coklat. Tentukan peluang terpilihnya satu warna untuk dijadikan kemasan toko tersebut!

B. Distribusi Binomial

Tahukah Kalian?

Gambar 5.3. Jacob Bernoulli
Sumber: https://commons.wikimedia.org/ Niklaus Bernoulli (1662-1716)

Jacob Bernoulli (juga dikenal sebagai James atau Jacques) adalah salah satu dari banyak matematikawan terkemuka dari keluarga Bernoulli. Dia adalah pendukung pertama analisis Leibnizian dan memihak Leibniz dalam kontroversi kalkulus Leibniz-Newtonian. Dia dikenal karena banyak kontribusinya untuk kalkulus. Jacob Bernoulli adalah salah satu pendiri kalkulus variasi, di mana ia mengusulkan versi pertama dari hukum bilangan besar dalam Ars Conjectandi-nya yang diterbitkan pada tahun 1713. Salah satu isi dari buku tersebut adalah mengenai percobaan binomial.

Sebelum masuk ke materi, mari kita mengingat kembali materi peluang yang pernah kalian dapatkan.

Ayo Mengingat Kembali

- $C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
- $n! = n \times (n-1) \times ... \times 3 \times 2 \times 1$.
- $P(A) + P(A^c) = 1$.
  dengan $P(A)$ adalah peluang kejadian sukses.
  $P(A^c)$ adalah peluang kejadian gagal.

Ayo Bereksplorasi

Eksplorasi 5.2

Mari kita siapkan sebuah uang logam,

Cobalah kalian lemparkan mata uang logam tersebut sebanyak dua kali dan isikan hasilnya pada Tabel 5.1 dan 5.2

Tabel 5.1 Hasil Lemparan Pertama dan Kedua

Hasil Lemparan Pertama	Hasil Lemparan Kedua

Tabel 5.2 Hasil Pelemparan dan Probabilitas

Hasil Pelemparan yang Mungkin (lemparan 1 dan lemparan 2)	Probabilitas

Mari jawab pertanyaan berikut:

1. Tentukan peluang munculnya gambar pada dua kali pelemparan!
2. Dikatakan berhasil jika kejadian tersebut adalah muncul dua gambar pada dua kali pelemparan, sebutkan kejadian kegagalannya?
3. Berapa peluang kegagalannya?
4. Berapakah nilai harapan untuk memperoleh gambar pada satu kali pelemparan?
5. Berapakah nilai harapan untuk memperoleh keduanya gambar pada dua kali pelemparan?
6. Apa simpulan yang kalian dapatkan?

Ayo Mengingat Kembali

1. Tentukan peluang mendapatkan paling sedikit 4 gambar pada 6 kali pelemparan sebuah uang logam seimbang!
2. Tentukan nilai harapan memperoleh sisi gambar pada 10 kali pelemparan sebuah uang logam seimbang!

Definisi

1. Fungsi Distribusi Binomial

Perhatikan kembali kegiatan Eksplorasi 5.2 yang telah kalian lakukan. Pada kegiatan tersebut kalian mengenal istilah berhasil dan gagal, dikatakan berhasil apabila muncul dua gambar pada dua kali pelemparan. Percobaan-percobaan pada distribusi binomial bersifat bebas, dimana kita dapat memilih atau menentukan salah satu kejadian sebagai berhasil dan peluang keberhasilan pada setiap pengulangan tetap sama.

Jika suatu percobaan binomial mempunyai peluang berhasil p dan peluang gagal $q = 1 - p$, maka fungsi distribusi peluang untuk variabel acak binomial X, yaitu banyaknya keberhasilan dalam n percobaan yang bebas adalah

$$b(x;n,p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \text{ untuk } x = 0,1,2,...,n.$$

Ayo Berpikir Kritis

Menurut kalian, apa yang menjadi syarat bahwa percobaan yang yang dilakukan berdistribusi binomial?

Contoh Soal 5.3

Pada awal pertandingan sepak bola telah disepakati bahwa tim yang memilih gambar akan bermain terlebih dahulu. Apabila dalam 7 hari berturut-turut seorang wasit memimpin 7 kali permainan. Tentukan peluang bahwa 5 kali pelemparan pertama mendapatkan gambar!

Alternatif Penyelesaian:

Pada sebuah koin terdapat ruang sampel $S = \{A,G\}$. Peluang keberhasilan (p) adalah peluang mendapatkan gambar dari sebuah pelemparan koin yaitu $\frac{1}{2}$. Peluang kegagalan (q) adalah peluang mendapatkan angka dari sebuah pelemparan mata dadu yaitu $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Banyaknya lemparan (n) yaitu 7, maka dari formula distribusi binomial adalah $b(x;n,p) = \binom{n}{p} p^x q^{n-x}$, sehingga diperoleh $b(5;7,\frac{1}{2}) = \binom{7}{5} (\frac{1}{2})^5 (\frac{1}{2})^{7-5}$.

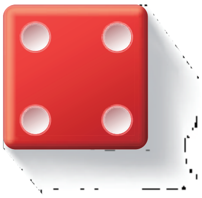
$$b(5;7,\tfrac{1}{2}) \;=\; \frac{7!}{5!(7-5)!}\cdot\frac{1}{2^5}\cdot\frac{1}{2^2} = \frac{7!}{5!2!}\cdot\frac{1}{2^7} = \frac{5.040}{30.720} = 0,164$$

Jadi, peluang 5 kali pelemparan pertama mendapatkan gambar pada 7 kali permainan adalah 0,164.

Contoh Soal 5.4

Sebuah dadu seimbang dilemparkan 5 kali. Tentukan peluang mendapatkan sisi mata dadu empat sebanyak tiga kali!

Alternatif Penyelesaian:


Gambar 5.4. Mata Dadu 4.

Pada sebuah dadu terdapat ruang sampel $S = \{1,2,3,4,5,6\}$. Peluang keberhasilan (p) adalah peluang mendapatkan mata dadu empat dari sebuah pelemparan mata dadu yaitu $\frac{1}{6}$. Peluang kegagalan (q) adalah peluang mendapatkan mata dadu selain empat dari sebuah pelemparan mata dadu yaitu $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

Banyaknya lemparan (n) yaitu 5, maka dari formula distribusi binomial

$b(x;n,p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$ diperoleh $b(3;5,\frac{1}{6}) = \binom{5}{3}(\frac{1}{6})^3(\frac{5}{6})^{5-3}$

$$b(3;5,\tfrac{1}{6}) = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{5!}{3!(5-3)!}\cdot\frac{1}{6^3}\cdot\frac{5^2}{6^2} = \frac{5!}{3!(5-3)!}\cdot\frac{5^2}{6^5} = \frac{3.000}{93.312} = 0,032$$

Jadi, peluang mendapatkan sisi mata dadu empat sebanyak tiga kali dari 5 kali pelemparan adalah 0,032.

Ayo Mencoba

Pada bagian ini, kalian dapat melengkapi jawaban dari Latihan Soal Terbimbing 5.3 dan 5.4 yang masih terbuka. Jawaban yang hilang adalah yang masih tertulis "...". Kegiatan ini bertujuan agar kalian dapat menginterpretasi parameter distribusi binomial dan memecahkan permasalahan yang berkaitan dengan distribusi binomial

Latihan Soal Terbimbing 5.3

Tentukan peluang untuk mendapatkan 2 sisi gambar dalam 7 kali pelemparan sebuah uang logam!

Alternatif Penyelesaian:

Gambar 5.5. Mata Uang Logam.

Pada sebuah uang logam terdapat ruang sampel $S = \{\ldots, \ldots\}$.
Peluang keberhasilan (p) adalah peluang mendapatkan sisi ... dari sebuah pelemparan uang logam yaitu ... .

Peluang kegagalan (q) adalah peluang mendapatkan sisi ...... dari sebuah pelemparan uang logam yaitu ......

Banyaknya lemparan (n) yaitu ......

Dari $b(x;n,p) = \binom{n}{p} p^x q^{n-x}$, diperoleh

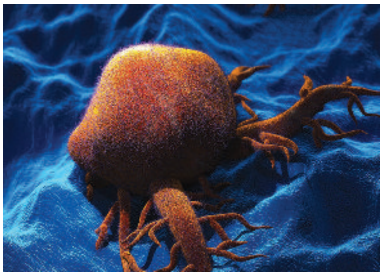
$$b(\ldots;\ldots,\ldots) = \binom{\ldots}{\ldots} (\ldots)^{\ldots} (\ldots)^{(\ldots-\ldots)}.$$

....

Jadi, peluang dan nilai harapan untuk mendapatkan 2 gambar dalam 7 kali pelemparan sebuah uang logam adalah ......

Latihan Soal Terbimbing 5.4

Diasumsikan peluang seseorang akan sembuh dari kanker adalah 40%. Jika 15 orang terkena penyakit tersebut, berapa peluang tepat 5 orang dapat sembuh?!



Gambar 5.6. Cancer cell
Sumber: www.freepik.com/giovannicancemi (2021)

Alternatif Penyelesaian:

Peluang keberhasilan (p) adalah peluang seseorang sembuh dari penyakit kanker yaitu ....
Peluang kegagalan (q) adalah peluang seseorang tidak sembuh dari penyakit kanker yaitu ....
Banyaknya orang yang menderita kanker (n) yaitu ...., maka

Dari $b(x;n,p) = \binom{n}{p} p^x q^{n-x}$, diperoleh

$$b(\ldots;\ldots,\ldots) = \binom{\ldots}{\ldots} (\ldots)^{\ldots} (\ldots)^{(\ldots-\ldots)}.$$

....

Jadi, peluang tepat 5 orang yang sembuh adalah ....

2. Nilai Harapan Distribusi Binomial

Distribusi binomial $b(x;n,p)$ mempunyai nilai harapan

$$E(X) = np$$

dengan n banyaknya percobaan dan p peluang keberhasilan

Nilai harapan distribusi binomial pada dasarnya ditentukan oleh berbagai macam peristiwa yang dihasilkan dari percobaan binomial, terutama peluang keberhasilan p atau kegagalannya q. Misalkan hasil percobaan ke-n dinyatakan variabel acak I_n dengan peluang keberhasilan $I_n = 1$ dan peluang kegagalan $I_n = 0$. Dalam percobaan binomial, banyaknya keberhasilan dituliskan sebagai jumlah n variabel randomacak bebas:

$$X = I_1 + I_2 + \ldots + I_n$$

Nilai harapan setiap I_n adalah $E(I_n) = 1(p) + 0(q) = p$ sehingga nilai harapan suatu populasi distribusi binomial dapat dinyatakan sebagai perkalian n percobaan dengan peluang percobaan.

$$E(X) = E(I_1) + E(I_2) + \ldots + E(I_n)$$

$$E(X) = \underbrace{\ldots + \ldots + \ldots + \ldots}_{\text{suku}}$$

$$E(X) = \ldots$$

Contoh Soal 5.5

Sebuah dadu seimbang dilempar tujuh kali. Tentukan nilai harapan untuk mendapatkan sisi mata dadu lima sebanyak empat kali!

Alternatif Penyelesaian:

Pada sebuah dadu terdapat ruang sampel $S = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Peluang keberhasilan (p) adalah peluang mendapatkan mata dadu lima dari sebuah pelemparan mata dadu yaitu $\frac{1}{6}$.

Peluang kegagalan (q) adalah peluang mendapatkan mata dadu selain lima dari sebuah pelemparan mata dadu yaitu $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

Banyaknya lemparan (n) yaitu 7, maka $E(X) = np = 7(\frac{1}{6}) = \frac{7}{6} = 1{,}167$.

Jadi, nilai harapan untuk mendapatkan sisi mata dadu lima sebanyak empat kali adalah 1,167.

Tahukah Kalian?

Batik Indonesia telah dikenal sebagai salah satu warisan budaya dunia. Batik Indonesia dikelilingi berbagai simbol dan kebudayaan sehingga memiliki beragam motif unik. Beberapa batik yang dikenal diantaranya adalah batik Solo, batik Jogja, batik Pekalongan, dan batik Cirebon.

Tahukah kalian tentang batik Besurek? Batik Besurek merupakan batik khas Bengkulu, Indonesia. Perbedaan batik Besurek dengan batik lain terdapat pada motifnya yang menonjolkan bunga *Rafflesia Arnoldii*. Bunga *Rafflesia Arnoldii* ditemukan pertama kali pada tahun 1818 di Kabupaten Bengkulu Selatan oleh Dr. Joseph Arnold dan Sir Thomas Stamford Raffles, sehingga Bengkulu dikatakan sebagai Bumi *Rafflesia*. Selain itu, bunga *Rafflesia Arnoldii* merupakan bunga terbesar di dunia dan termasuk tumbuhan langka. Hal ini membuat batik Besurek memiliki daya jual tinggi dan menjadi salah satu produk utama para produsen batik di Bengkulu. Batik Besurek biasanya dibuat dengan cara batik tulis. Dalam proses membuat batik tulis, terdapat kegiatan mencanting batik. Proses mencanting batik merupakan proses penting karena jika terjadi kegagalan akan berakibat pada kegagalan produksi.

Gambar 5.7. Motif Batik Besurek
Sumber: https://pelajarindo.com/

Ayo Mengomunikasikan

Misalkan terdapat sebuah UMKM batik Besurek yang mempekerjakan 30 pegawai dengan kemampuan sama untuk mencanting batik. Dalam sehari, setiap 3 pegawai akan mencanting satu kain secara bergantian, sehingga jumlah maksimal hasil mencanting sebanyak 10 kain dalam sehari. Perlu ketelitian, gotong royong, dan kerja sama yang baik antar pegawai, agar tidak terjadi kegagalan dalam mencanting batik. Data hasil mencanting batik Besurek dalam 6 hari tertuang dalam Tabel 5.3.

Tabel 5.3 Data Hasil Mencanting Batik Besurek Dalam 6 Hari

Hari ke	Hasil Mencanting
1	10
2	7
3	9
4	10
5	8
6	7

Ayo Berdiskusi

Buatlah kelompok yang terdiri dari 3-4 orang. Kemudian bersama dengan teman satu kelompok, kalian dapat bekerjasama untuk mendiskusikan masalah berikut.

a. Berapakah peluang kegagalan mencanting satu kain batik?

b. Tentukan peluang kegagalan mencanting per hari

Ayo Mencoba

Pada bagian ini, kalian dapat melengkapi jawaban dari Latihan Soal Terbimbing 5.5 dan 5.6 yang masih terbuka. Jawaban yang hilang adalah yang masih tertulis "...". Kegiatan ini bertujuan agar kalian dapat menghitung nilai harapan distribusi binomial

Latihan Soal Terbimbing 5.5

Tentukan nilai harapan untuk mendapatkan 3 sisi angka dalam 6 kali pelemparan sebuah uang logam!

Gambar 5.8. Sisi Angka Pada Mata Uang Logam.

Alternatif Penyelesaian:

Pada sebuah uang logam terdapat ruang sampel S = { ... , ... }.
Peluang keberhasilan (p) adalah peluang mendapatkan sisi ...... dari sebuah pelemparan uang logam yaitu ....
Banyaknya lemparan (n) yaitu ....

$E(X) = np$ ...... (......) = ...

Jadi, nilai harapan mendapatkan 3 sisi angka dalam 6 kali pelemparan adalah ......

Latihan Soal Terbimbing 5.6

Diasumsikan peluang seseorang sembuh dari Covid-19 tanpa penyakit bawaan adalah 80%. Apabila 40 orang tanpa penyakit bawaan terpapar Covid-19 diketahui menderita penyakit ini, berapa nilai harapan sembuhnya?

Alternatif Penyelesaian:

Peluang keberhasilan (p) adalah peluang seseorang sembuh dari Covid-19 yaitu ...

Banyaknya penderita Covid-19 (n) yaitu ....

maka

$E(X) = np$ ...... (......) = ...

Jadi nilai harapan sembuh dari Covid-19 adalah ....

Ayo Mencoba

Latihan Soal 5.2

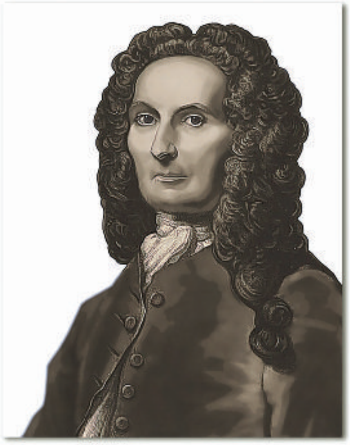
1. Temukanlah probabilitas bahwa pada pelemparan sekeping mata uang yang seimbang tiga kali muncul
   a. 3 angka rupiah.
   b. 3 gambar.
2. Keberhasilan memukul bola seorang pemain baseball sebesar 0,250. Berapa peluang dan nilai harapan ia berhasil tepat memukul sekali dalam 5 kesempatan berikutnya?
3. Peluang seorang bayi belum divaksinasi rubela adalah 0,2. Suatu hari, terdapat 6 bayi di posyandu. Tentukan peluang bahwa 4 dari 6 bayi belum divaksinasi rubela!
4. Sebuah survei menyatakan bahwa satu dari lima orang mengatakan mereka menemui dokter dalam waktu yang tidak ditentukan. Jika 10 orang dipilih secara acak, berapa peluang bahwa tiga dari mereka pergi ke dokter dalam sebulan terakhir?
5. Peluang seorang mahasiswa menyelesaikan studi pada sebuah unversitas adalah 0,9. Jika terdapat 5 mahasiswa,
   a. tentukan peluang bahwa tidak ada mahasiswa yang menyelesaikan studi!
   b. tentukan peluang bahwa hanya satu mahasiswa yang menyelesaikan studi
   c. tentukan peluang paling sedikit satu mahasiswa yang menyelesaikan studi!
   d. tentukan peluang semua mahasiswa menyelesaikan studi!

6. Jika melemparkan sepasang dadu seimbang sebanyak 6 kali, maka
   a. tentukan peluang memperoleh jumlah mata dadu 9 sebanyak dua kali!
   b. tentukan peluang memperoleh jumlah mata dadu 9 paling sedikit dua kali!
7. Seorang pesulap melakukan aksi sulapnya di hadapan penonton dengan membagikan 4 amplop berisi kertas kosong yang harus diisi angka yang dipilih oleh penonton. Amplop tersebut kemudian dikumpulkan kembali dan pesulap berusaha menebak satu angka pilihan penonton dengan benar. Pesulap sukses melaksanakan aksinya jika semua angka pilihan penonton berhasil ditebak dengan benar.
   a. berapakah peluang pesulap tersebut sukses melaksanakan aksinya?
   b. tentukan nilai harapan pesulap tersebut menebak angka dengan benar!

C. Distribusi Normal

Tahukah Kalian?

Distribusi normal pertama kali diperkenalkan oleh Abraham deMoivre dalam sebuah artikel pada tahun 1733 sebagai aproksimasi dari distribusi binomial n besar. Karya ini dikembangkan lebih lanjut oleh Pierre Simond Plus dan dikenal sebagai Teorema More Blue Laplace. Laplace menggunakan distribusi normal untuk menganalisis kesalahan dalam percobaan. Metode kuadrat terkecil diperkenalkan oleh Legendre pada tahun 1805. Di sisi lain, Gauss berpendapat bahwa dia telah menggunakan metode ini sejak 1794, dengan asumsi kesalahan terdistribusi normal. (https://ms.wikipedia.org/wiki/Abraham_de_Moivre).



Gambar 5.8. Abraham deMoivre

Ayo Mengingat Kembali

- Mean atau rataan suatu dataset adalah angka yang diperoleh dengan mendistribusikan secara merata semua anggota dataset. Kalian dapat menghitung rata-rata dengan menambahkan semua nilai data dan membaginya dengan jumlah total data.
- Varians adalah ukuran dispersi lain yang biasa digunakan untuk menentukan distribusi data. Varians diperoleh dengan mengurangkan setiap data dari mean.
- Standar deviasi atau standar deviasi adalah akar dari varians.

Ayo Bereksplorasi

Eksplorasi 5.3

Mari perhatikan kurva berikut dan interpretasikan apa maksud dari setiap gambar berikut ini.

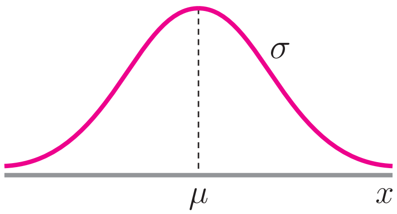
Isilah titik-titik dengan pilihan jawaban sama atau berbeda.

Kurva normal memiliki sebaran peluang yang sangat bergantung pada parameter rataan (μ) dan simpangan baku (σ).

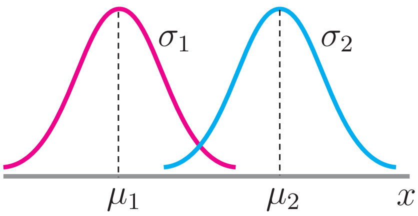
Jika dilihat maka kedua kurva ini memiliki bentuk yang ... hal ini dapat dilihat pada simpangan baku (σ) yang ... namun titik tengahnya atau rataan (μ) terletak ditempat berbeda disepanjang sumbu-x sehingga $\mu_1 < \mu_2$ dan $\sigma_1 = \sigma_2$.

Jika dilihat maka kedua kurva ini memiliki bentuk yang ... hal ini dapat dilihat pada simpangan baku (σ) yang ... namun titik tengahnya atau rataan (μ) terletak ditempat berbeda disepanjang sumbu-x sehingga $\mu_1 = \mu_2$ dan $\sigma_1 < \sigma_2$.

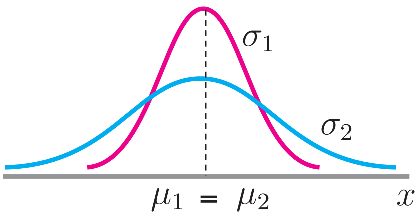
Jika dilihat maka kedua kurva ini memiliki bentuk yang ... dapat dilihat pada simpangan baku (σ) yang ... namun titik tengahnya atau rataan (μ) terletak ditempat yang ... sumbu -x sehingga $\mu_1 < \mu_2$ dan $\sigma_1 < \sigma_2$.



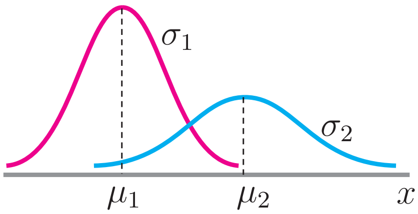
Gambar 5.10. Kurva Normal



Gambar 5.11. Dua Kurva Normal



Gambar 5.12. Dua Kurva Normal



Gambar 5.13. Dua Kurva Normal

Ayo Berdiskusi

Apa kesimpulan yang dapat kalian peroleh dari kegiatan Eksplorasi 5.3?

Definisi

1. Fungsi Distribusi Normal

Kegiatan eksplorasi yang dilakukan memberikan informasi bahwa kurva normal sangat bergantung pada rata-rata distribusi (μ) dan dan varians (σ^2), sehingga.

> Jika X adalah suatu variabel acak normal dengan rata-rata distribusi μ dan varians σ^2, maka distribusi normal dapat dituliskan
>
> $$n(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \text{ untuk } -\infty < x < \infty$$

dengan

π : nilai konstan yaitu 3,1416
e : bilangan konstan yaitu 2,7183
μ : rata-rata distribusi
σ : simpangan baku

Sifat-sifat kurva normal yang diperoleh dari kegiatan eksplorasi 5.3 adalah sebagai berikut:

a. Modus, titik pada sumbu horizontal menyebabkan fungsi menjadi maksimum., Hal ini terjadi pada $x = \mu$.
b. Kurva simetris terhadap garis tegak lurus yang melalui rata-rata (μ).
c. Kurva memiliki titik belok di $x = \mu \pm \sigma$, cekung di bagian bawah apabila $\mu - \sigma < X < \mu + \sigma$ dan cekung di bagian atas untuk nilai x lainnya.
d. Kedua ujung kurva mendekati asimtot sumbu horizontal ketika nilai x bergerak menjauhi nilai rata-rata ke kiri atau ke kanan.
e. Luas daerah yang terletak di bawah kurva dan di atas sumbu mendatar sama dengan 1.

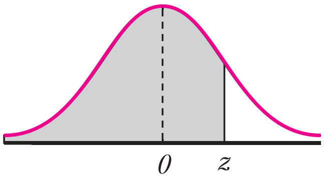
Untuk setiap pasang μ dan σ, sifat-sifat di atas selalu dipenuhi, namun bentuk kurva akan berlainan. Jika σ semakin besar maka kurva akan semakin rendah (*platikurtik*) dan untuk σ semakin kecil maka kurvanya semakin tinggi (*leptokurtik*).

Untuk penggunaan praktis telah disusun daftar distribusi normal standar atau distribusi normal baku dengan rata-rata μ = 0 dan simpangan baku σ = 1. Proses mengubah distribusi normal umum menjadi distibusi normal baku menggunakan transformasi nilai baku, dengan menggunakan

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

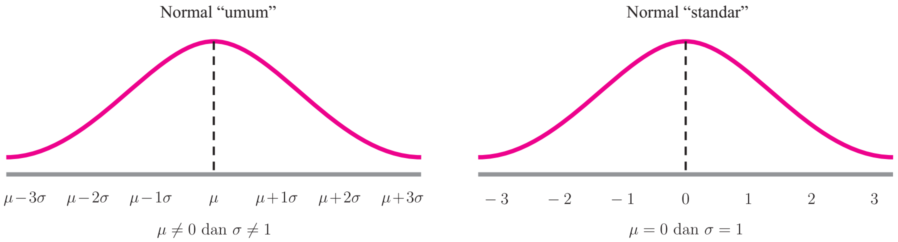
Fungsi densitas distribusi normal dapat dilihat seperti pada Gambar 5.14.

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$



Gambar 5.14. Fungsi Densitas Distribusi Normal

Untuk $-\infty < z < \infty$.
Perbandingan distribusi normal umum dan distribusi normal baku dapat dilihat pada Gambar 5.15.



Gambar 5.15. Distribusi Normal Umum dan Distribusi Normal Baku atau Normal Standar

Luas kurva pada distribusi normal adalah 1 dan kurva simetris dengan $\mu = 0$, maka luas garis vertikal ke kanan atau ke kiri adalah 0,5.

Luas daerah dari 0 sampai z menggunakan fungsi $(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$ dalam distribusi normal $\mu = 0$ dan $\sigma = 1$ dapat diintegralkan ke $\int_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$.

Daerah yang dihasilkan menunjukkan besarnya peluang bahwa nilai suatu variabel acak berdistribusi normal pada rentang 0 sampai z. Karena kurva distribusinya simetris, maka daerah dari 0 sampai z negatif sama dengan daerah dari 0 sampai z positif. Untuk menentukan probabilitas distribusi normal dengan mudah, kita dapat menggunakan tabel distribusi normal pada halaman terakhir bab ini.

Contoh soal 5.6

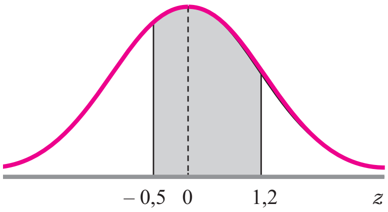
Untuk distribusi normal dengan $\mu = 50$ dan $\sigma = 10$, tentukan peluang bahwa X mengambil sebuah nilai antara 45 dan 62!

Alternatif Penyelesaian:

Diketahui $\mu = 50$ dan $\sigma = 10$ sehingga kalian dapat menentukan nilai-nilai z padanan $x_1 = 45$ dan $x_2 = 62$, yaitu

$z_1 = \frac{45-50}{10} = -0{,}5$ dan $z_2 = \frac{62-50}{10} = 1{,}2$

Kemudian gambarkan kurvanya untuk mengetahui posisi z_1 dan z_2



Gambar 5.16. Luas Daerah pada Contoh Soal Distribusi Normal.

Dengan demikian

$P(45 < x < 62) = P(-0{,}5 < Z < 1{,}2)$.

Nilai $P(-0{,}5 < Z < 1{,}2)$ diberikan oleh daerah gelap dalam Gambar 5.16. Luas diperoleh dengan mengurangkan luas daerah di sebelah kiri $z = -0{,}5$ dari luas daerah di sebelah kiri $z = 1{,}2$. Lihat Tabel 5.4 untuk menentukan nilai z_1 dan z_2.

Tabel 5.4. Tabel Distribusi Normal.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948
0,3	0,6179	0,6271	0,6255	0,6293	0,6331
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251

Petunjuk

Nilai Tabel z merupakan luasan dari kurvanya, sehingga nilai Tabel z untuk z negatif sama dengan z positif. Oleh karena itu, cara untuk menentukan nilai Tabel z negatif sama dengan menentukan nilai Tabel z positif.

Untuk $z_1 = -0{,}5$

Lihatlah panah berwarna hijau. Untuk z arah menurun temukan 0,5 dan arah ke kanan temukan 0,00, maka $P(Z < -0{,}5) = 0{,}6915$.

Untuk $z_2 = 1{,}2$

Lihatlah panah berwarna biru. Untuk z arah menurun temukan 1,2 dan arah ke kanan temukan 0,00, maka $P(Z < 1{,}2) = 0{,}8849$.

Maka $P(45 < X < 62) = P(-0{,}5 < Z < 1{,}2)$.

$$= P(Z < 1{,}2) - P(Z < -0{,}5) = 0{,}8849 - 0{,}6915 = 0{,}1934.$$

Jadi, peluang bahwa X mengambil sebuah nilai antara 45 dan 62 adalah 0,1934.

Ayo Mencoba

Pada bagian ini, kalian dapat melengkapi jawaban dari Latihan Soal Terbimbing 5.7 dan 5.8 yang masih terbuka. Jawaban yang hilang adalah yang masih tertulis "...". Kegiatan ini bertujuan agar kalian dapat menginterpretasi parameter distribusi normal dan memecahkan permasalahan yang berkaitan dengan distribusi normal.

Latihan Soal Terbimbing 5.7

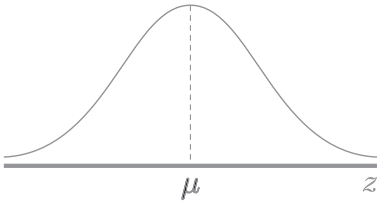
Nilai rata-rata kelas (NMR) peserta didik yang mengikuti tes matematika harian berdistribusi normal dengan rata-rata 2,1 dan standar deviasi 0,8. Tentukan peluang peserta didik tersebut memiliki NMR antara 2,5 dan 3,5!

Alternatif Penyelesaian:

Diketahui μ = ... dan σ = ... sehingga kita cari nilai-nilai z padanan $x_1 = 2{,}5$ dan $x_2 = 3{,}5$ yaitu

$$z_1 = \frac{\ldots\ldots - \ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \ldots\ldots \quad \text{dan} \quad z_2 = \frac{\ldots\ldots - \ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \ldots\ldots$$

Selanjutnya gambarkan kurvanya untuk mengetahui posisi z_1 dan z_2.



Gambar 5.17. Kurva Distribusi Normal.

Dengan demikian

$P(\ldots\ldots < x < \ldots\ldots) = P(\ldots\ldots < Z < \ldots\ldots)$

Nilai $P(\ldots\ldots < Z < \ldots\ldots)$ diberikan oleh daerah gelap dalam Gambar 5.17. Luas diperoleh dengan ...... luas daerah di sebelah kiri z =...... dari luas daerah di sebelah kanan z = ...

Untuk menentukan nilai z_1 dan z_2 yang telah kalian peroleh pada perhitungan diatas, kalian dapat melihat Tabel Distribusi Normal yang ada pada akhir bab ini.

Untuk z_1 = ...

Untuk z arah menurun ditemukan ...... dan arah ke kanan kita temukan ...... maka

$P(Z < \ldots\ldots) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Untuk z_2 = ...

Untuk z arah menurun ditemukan ...... dan arah ke kanan kita temukan .... maka $P(Z < \ldots\ldots) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

maka $P(\ldots\ldots < X < \ldots\ldots) = P(\ldots\ldots < Z < \ldots\ldots)$

$= P(Z < \ldots\ldots) - P(Z < \ldots\ldots)$

$= \ldots\ldots - \ldots\ldots = \ldots\ldots$

Jadi, ...

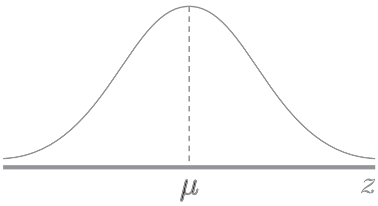
Latihan Soal Terbimbing 5.8

Asumsikan berat rata-rata bayi yang baru lahir adalah 3.500 gram dengan simpangan baku 225 gram. Tentukan peluang bayi lahir dengan berat antara 3200 gram dan 4000 gram!

Alternatif Penyelesaian:

Diketahui μ = ... dan σ = ... sehingga kita cari nilai-nilai z padanan x_1 = ... dan x_2=........... yaitu

$$z_1 = \frac{\ldots\ldots - \ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \ldots\ldots \quad \text{dan} \quad z_2 = \frac{\ldots\ldots - \ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \ldots\ldots$$



Gambar 5.18. Luas Daerah Berdistribusi Normal.

Kemudian gambarkan kurvanya untuk mengetahui posisi z_1 dan z_2

Dengan demikian

$P(\ \ldots\ldots < x < \ldots\ldots\ ) = P(\ \ldots\ldots < Z < \ldots\ldots\ )$.

Nilai $P(\ \ldots\ldots < Z < \ldots\ldots\ )$ diberikan oleh daerah gelap dalam Gambar 5.18. diperoleh dengan ...... luas daerah di sebelah kiri z =...... dari luas daerah di sebelah kanan z = ... Untuk menentukan nilai z_1 dan z_2 yang telah kalian peroleh pada perhitungan diatas, kalian dapat melihat Tabel Distribusi Normal yang terdapat pada Lampiran 5.1.

Untuk z_1 = ...

Untuk z arah menurun ditemukan ...... dan arah ke kanan kita temukan ...... maka

$$P(Z < \ldots\ldots) = \ldots\ldots\ldots - 0{,}5 = \ldots\ldots\ldots$$

Untuk z_2 = ...

Untuk z arah menurun ditemukan ...... dan arah ke kanan kita temukan ...... maka

$$P(Z < \ldots\ldots) = \ldots\ldots\ldots - 0{,}5 = \ldots\ldots\ldots$$

$$P(\ \ldots\ldots < X < \ldots\ldots\ ) = P(\ldots\ldots < Z < \ldots\ldots\ ) = P(Z < \ldots\ldots) + P(Z < \ldots\ldots\ ).$$

$$= \ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots$$

Jadi, ...

Ayo Berpikir Kritis

Mengapa pada Latihan Soal Terbimbing 5.8 untuk menentukan nilai z dikurangi 0,5?

Ayo Gunakan Teknologi

Kunjungi laman
https://mathcracker.com/standard-normal-distribution-probability-calculator
untuk membantu menggambarkan kurva distribusi normal.

2. Nilai Harapan Distribusi Normal

Distribusi normal $n(x;\mu,\sigma)$ mempunyai nilai harapan

$$E(X) = \mu$$

Nilai harapan pada distribusi normal diperoleh dari $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$, sehingga

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx.$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} x\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx.$$

.Misalkan $t = \frac{x-\mu}{\sigma}$, maka $x = \sigma t+\mu$ dan $dx = \sigma dt$, dan $x^2 = (\sigma t+\mu)^2 = \sigma^2 t^2 + 2\sigma t\mu + \mu^2$

Dengan menyubstitusikan ke persamaan $E(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} x\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$, diperoleh

$$E(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma t + \mu) e^{-\frac{1}{2}t^2} \sigma dt.$$

$$E(X) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} te^{-\frac{1}{2}t^2} dt + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} te^{-\frac{1}{2}t^2} dt + \mu.$$

Misalkan $z = \frac{1}{2}t^2$ maka $dz = t\ dt$. Dengan menyubstitusikan $dz = t\ dt$, diperoleh

$$E(X) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{z} dz + \mu = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-z}\Big|_{-\infty}^{\infty} + \mu = \mu$$

Contoh Soal 5.7

Sebaran normal memiliki $\mu = 50$ dan $\sigma = 10$, hitunglah nilai harapan bahwa X mengambil sebuah nilai 45!

Alternatif Penyelesaian:

Diketahui μ=50 dan σ=10 sehingga nilai harapan dapat dicari dengan $E(X) = \mu$.

$$E(45) = 50.$$

Jadi nilai harapan bahwa X mengambil sebuah nilai 45 adalah 50.

Ayo Mencoba

Pada bagian ini, kalian dapat melengkapi jawaban dari Latihan Soal Terbimbing 5.9 dan 5.10 yang masih terbuka. Jawaban yang hilang adalah yang masih tertulis "...". Kegiatan ini bertujuan agar kalian dapat menghitung nilai harapan distribusi normal.

Latihan Soal Terbimbing 5.9

Nilai rata-rata kelas (NMR) peserta didik yang mengikuti tes matematika harian berdistribusi normal dengan rata-rata 2,1 dan standar deviasi 0,8. Tentukan nilai harapan peserta didik tersebut mencapai NMR 2,7!

Alternatif Penyelesaian:

Diketahui μ = ... dan σ = ... sehingga nilai harapan dapat dicari dengan

$$E(X) = \mu.$$

$$E(.........) = ...$$

Jadi nilai harapan peserta didik tersebut mencapai NMR 2,7 adalah ....

Latihan Soal Terbimbing 5.10

Asumsikan berat rata-rata bayi yang baru lahir adalah 3.500 gram dengan simpangan baku 225 gram.. Tentukan nilai harapan bayi lahir dengan berat 3.750 gram!

Alternatif Penyelesaian:

Diketahui μ = ... dan σ = ... sehingga nilai harapan dapat dicari dengan

$$E(X) = \mu.$$

$$E(.........) = ...$$

Jadi nilai harapan nilai harapan bayi lahir dengan berat 3.750 gram adalah ....

Ayo Mencoba

Latihan Soal 5.3

1. Sebuah sekolah memiliki peserta didik laki-laki dengan berat badan yang berdistribusi normal dengan berat badan rata-rata 61 kg dan simpangan baku 2 kg. Jika seorang guru olahraga akan memilih peserta didik laki-laki untuk mengikuti lomba gulat antar provinsi yang mengharuskan berat badan peserta lomba di antara 58-63 kg, maka tentukan peluang peserta didik untuk mengikuti lomba gulat berdasarkan berat badannya!
2. Baterai otomotif memiliki umur rata-rata 3 tahun dengan standar deviasi 0,5 tahun.
   a. Tentukan peluang bahwa baterai akan bertahan kurang dari 2,3 tahun!
   b. Tentukan nilai harapannya!
3. Sebuah perusahaan elektronik memproduksi bohlam dengan masa pakai terdistribusi normal dengan rata-rata 800 jam dan simpangan baku 40 jam.
   a. Tentukan peluang bohlam padam antara 778 dan 834 jam!
   b. Tentukan nilai harapannya!
4. Tinggi rata-rata anjing jenis pudel tertentu adalah 30 cm dan standar deviasinya adalah 4,1 cm.
   a. Tentukan persentase pudel yang tingginya lebih dari 35 cm !
   b. Tentukan peluang harapannya!
5. Berdasarkan data dari suatu *game online*, waktu bermain harian pemain berdistribusi normal dengan standar deviasi 37 menit, dan 14% pemain bermain *game online* lebih dari 230 menit setiap hari. Tentukan rata-ratanya!
6. Mesin minuman ringan diatur untuk mengeluarkan rata-rata 200 milimeter per cangkir. Bila banyaknya minuman yang dikeluarkan itu menyebar normal dengan simpangan baku 15 milimeter.
   a. Berapa banyak cangkir (dalam persentase) yang berisi lebih dari 224 milimeter?
   b. Berapa peluang sebuah cangkir berisi antara 191 dan 209 milimeter?

c. Berapa cangkir diantara 1000 cangkir berikutnya yang akan tumpah meluap bila cangkir-cangkir itu berukuran 230 milimeter?

d. Di bawah nilai berapa akan mendapatkan 25% cangkir-cangkir yang berisi sedikit?

7. Skor IQ dari 600 calon mahasiswa di sebuah universitas berdistribusi normal dengan rata-rata 115 dan standar deviasi 12. Jika perguruan tinggi membutuhkan skor IQ minimal 95, tentukan berapa banyak peserta didik yang akan ditolak atas dasar ini, terlepas dari kualifikasi mereka yang lain!

8. Dua peserta didik diberitahu bahwa mereka memperoleh nilai baku masing-masing 0,8 dan -0,4 pada suatu ujian pilihan ganda pada mata pelajaran matematika. Jika nilainya masing-masing adalah 88 dan 64, tentukan rerata dan nilai baku dari nilai ujian!

Ringkasan dan Refleksi

Ayo Mengomunikasikan

Dalam bab ini kalian sudah belajar tentang distribusi seragam, distribusi binomial, dan distribusi normal.

1. Menurut kalian, apa yang dimaksud distribusi seragam, distribusi binomial, dan distribusi normal?
2. Bagaimana cara menentukan suatu kejadian berdistribusi seragam, berdistribusi binomial, dan berdistribusi normal?
3. Dapatkah kalian memberikan contoh kejadian sehari-hari yang berkaitan dengan distribusi seragam, distribusi binomial, dan distribusi normal?

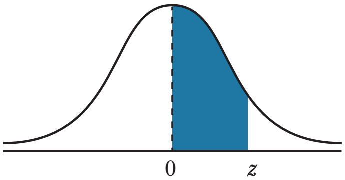
Uji Kompetensi

1. Dalam suatu organisasi terdapat ketua, wakil ketua, sekretaris, dan bendahara. Tentukan peluang seragam terpilihnya 4 orang dari 6 orang kandidat!
2. Tentukan peluang bahwa dalam sebuah keluarga dengan 4 anak terdapat:
   a. paling sedikit satu anak laki-laki!
   b. paling sedikit satu anak laki-laki dan satu anak perempuan!
3. Di suatu kecamatan terdiri dari antara 2000 kepala keluarga. Diketahui masing-masing keluarga memiliki 4 orang anak:.
   a. Tentukan harapan memiliki anak paling sedikit satu laki-laki!
   b. Tentukan harapan memiliki dua anak laki-laki!
   c. Tentukan harapan memiliki satu atau dua anak perempuan!
   d. Tentukan harapan tidak memiliki anak perempuan!
4. Dari 200 peserta didik yang mengikuti ujian matematika di suatu sekolah, rata-rata skornya adalah 60 dan simpangan bakunya adalah 10. Jika distribusi skornya normal, maka
   a. tentukan persentase peserta didik yang mendapat A, jika nilai ≥ 80 !
   b. tentukan persentase peserta didik yang mendapat nilai C, jika nilai C terletak pada interval $56 \leq C \leq 68$!
   c. tentukan persentase peserta didik yang mendapat nilai E jika nilai < 45 !
   d. tentukan nilai harapannya!
5. Nilai rata-rata ujian mata pelajaran matematika adalah 60 dengan variansi 64. Ditentukan bahwa peserta ujian memperoleh nilai A jika nilai minimal 80. Peserta ujian akan mendapat nilai B jika nilai paling sedikit 65 dan kurang dari 80. Peserta harus mengikuti ujian perbaikan jika nilainya kurang dari 65. Bila distribusi nilai ujian ini mendekati distribusi normal dan seorang peserta dipilih secara acak.
   a. Tentukan peluang bahwa peserta itu memperoleh nilai A!
   b. Tentukan peluang bahwa peserta itu memperoleh nilai B!
   c. Tentukan peluang bahwa peserta itu harus ikut ujian perbaikan!

Tabel 5.5. Lampiran Tabel Distribusi Normal Z

Lampiran Tabel Distribusi Normal z

Kumulatif sebaran frekuensi normal
(Area di bawah kurva normal baku dari 0 sampai z)



Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998
3.5	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998
3.6	0.4998	0.4998	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.7	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.8	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.9	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000

Glosarium

asimtot
sebuah garis yang sedemikian rupa sehingga jarak antara kurva dan garis tersebut mendekati nol seiring x atau y (salah satu atau keduanya) mendekati tak hingga.

aturan rantai
kaidah menurunkan suatu fungsi komposisi.

bentuk tak tentu
bentuk tak tentu meliputi $0/0$, ∞/∞, $\infty\pm\infty$, 0^0, ∞^∞.

cosinus
cosinus suatu sudut dalam segitiga siku-siku adalah perbandingan antara sisi yang berseberangan dengan sudut itu terhadap hipotenusa.

distribusi binomial
distribusi suatu fungsi peluang dari n kali percobaan yang menghasilkan 2 peluang yang saling bebas yang bernilai tetap dalam setiap percobaan.

distribusi normal
distribusi peluang kontinu yang penting dalam analisis statistik parametrik.

elips
himpunan titik-titik yang jaraknya terhadap dua titik tertentu selalu sama, kedua titik tertentu tersebut adalah titik fokus.

fungsi aljabar
fungsi yang terdiri dari fungsi polinomial, fungsi rasional, dan fungsi akar.

fungsi distribusi
suatu fungsi yang berhubungan dengan peluang suatu kejadian yang terdefinisikan dalam variable randomacak.

fungsi kontinu
fungsi yang terdefinisi dalam domainnya dan mempunyai limit yang bernilai sama dengan nilai fungsinya.

fungsi peluang
suatu fungsi yang berhubungan dengan peluang suatu kejadian dengan syarat nilai fungsinya tak negatif dan fungsi kumulatifnya sama dengan 1.

fungsi trigonometri
fungsi yang terdiri dari bentuk trigonometri seperti sinus, cosinus, tangen dan sebagainya.

garis direktris
garis arah

garis singgung
garis lurus yang menyinggung sebuah kurva pada sebuah titik.

hiperbola
sebuah kurva yang terbentuk dari perpotongan dua kerucut yang saling berhadapan dengan sebuah bidang yang memotong setengah dari kerucut tersebut

integral
anti turunan.

jumlahan reimann
salah satu cara menentukan integral tentu.

kedudukan garis
kedudukan suatu garis terhadap lingkaran (menyinggung, memotong, tidak menyinggung dan tidak memotong).

kedudukan titik
kedudukan suatu titik terhadap lingkaran (di luar, di dalam, dilalui).

kejadian
kumpulan dari satu atau lebih hasil suatu percobaan.

kemiringan
koefisien arah suatu garis lurus.

latus rectum
garis yang melalui titik fokus dan tegak lurus dengan sumbu mayor pada elips.

limit
pendekatan.

lingkaran
tempat kedudukan titik-titik yang jaraknya sama terhadap titik pusat.

nilai maksimum
nilai fungsi saat mencapai titik maksimum.

nilai minimum
nilai fungsi saat mencapai titik minimum.

parabola
tempat kedudukan titik-titik yang jaraknya selalu sama terhadap titik fokus, dan garis direktriks.

peluang
suatu nilai yang menyatakan kemungkinan terjadinya suatu kejadian

persamaan
kalimat matematika yang dihubungkan dengan tanda sama dengan (=).

ruang sampel
himpunan semua hasil yang mungkin dari suatu percobaan.

sinus
sinus suatu sudut merupakan perbandingan antara sisi yang berhadapan dengan sudut dengan hipotenusa pada segitiga siku-siku.

sumbu fokal
garis lurus yang menghubungkan kedua titik fokus elips.

sumbu mayor
diameter terpanjang elips, yaitu garis yang melalui pusat dan kedua fokus elips dan berakhir pada titik terjauh elips terhadap pusatnya.

sumbu minor
diameter terpendek elips, yaitu garis yang melalui pusat dan kedua fokus elips dan berakhir pada titik terdekat elips terhadap pusatnya.

tangen
tangen suatu sudut merupakan perbandingan antara sisi yang berhadapan dengan sudut dengan sisi yang bersebelahan dengan sudut itu pada segitiga siku-siku.

titik balik maksimum
salah satu titik stasioner dengan ciri kurva cekung ke bawah sehingga pada titik tersebut kurva berubah dari naik menjadi turun.

titik balik minimum
salah satu titik stasioner dengan ciri kurva cekung ke atas sehingga pada titik tersebut kurva berubah dari turun menjadi naik.

titik belok
salah satu titik stasioner yang mengakibatkan adanya perubahan kurva dari cekung ke atas menjadi cekung ke bawah atau sebaliknya.

titik potong
suatu titik hasil perpotongan garis atau kurva.

titik stasioner
suatu titik yang berhenti dari naik atau turun, disebut juga titik diam.

turunan
laju perubahan nilai suatu fungsi terhadap variabelnya atau peubahnya.

uji turunan
salah satu pengujian turunan pertama dan kedua dalam aplikasi turunan.

variabel acak
suatu fungsi yang memetakan setiap titik pada ruang sampel terhadap bilangan real.

variabel
karakteristik yang menunjukkan variasi atau sesuatu yang nilainya berubah-ubah.

Daftar Pustaka

Anggraena, Y., Valentino, E., & Utami, W. B. 2019. *Mozaik Matematika 2: Buku Pengayaan dan Penilaian SMA/MA kelas XI Program Wajib*. Yogyakarta: Yudhistira.

Anggraena, Y., Valentino, E., & Utami, W. B. 2019. *Mozaik Matematika 3: Buku Pengayaan dan Penilaian SMA/MA kelas XI Program Wajib*. Yogyakarta: Yudhistira.

Anggraena, Y., & Utami, W. B. 2019. *Mozaik Matematika SMA/MA kelas XII Peminatan MIPA*. Yogyakarta: Yudhistira.

Ayers, F., & Ault. 1990. *Kalkulus edisi kedua* (Alih bahasa Lea Prasetio). Jakarta: Erlangga.

Baisuni, H. 2005. *Kalkulus*. Jakarta: Universitas Indonesia.

Danuri, M. 2008. *Pembelajaran Lingkaran SMA dengan Geometri Analitik*. Yogyakarta: P4TK Matematika.

Diana, R., & Rory, R. 2019. *Estimasi Rata-Rata Lama Sekolah Tingkat Kecamatan Di Kabupaten Padang Pariaman Dengan Metode Empirical Best Linear Unbiased Predictor*. In Seminar Nasional Official Statistics (Vol. 2019, No. 1, pp. 110-116).

Diana, R., & Rory, R. 2020. *Pemodelan Kasus Covid-19 Menggunakan Model Regresi Nonparametrik. In Seminar Nasional Official Statistics* (Vol. 2020, No. 1, pp. 108-115).

Ekawati, A. 2016. *Penggunaan Software Geogebra dan Microsoft Mathematic dalam Pembelaran Matematika*. Math Didactic: Jurnal Pendidikan Matematika, 2(3), 148-153.

Gunawan, H. 2015. *Lingkaran, Menguak Misteri Bilangan, Bangun Datar dan Bangun Ruang Terkait dengan Lingkaran*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Herhyanto, N., & Gantini, T. 2009. *Pengantar Statistika Matematis*. Bandung: Yrama Widya.

Hogg, R. V., McKean, J., & Craig, A. T. 2005. *Introduction to mathematical statistics*. Pearson Education.

Kadir. 2015. *Statistika Terapan*. Jakarta: PT Raja Grafindo Persada.

Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan. 2018. *Sejarah dan Filsafat Matematika*. Jakarta: Kementerian pendidikan dan kebudayaan.

Leithold, L. 1988. *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik* (alih bahasa Hutahaean). Jakarta: Erlangga

Lestari, I. 2018. *Pengembangan bahan ajar matematika dengan memanfaatkan GeoGebra untuk meningkatkan pemahaman konsep*. GAUSS: Jurnal Pendidikan Matematika, 1(1), 26-36.

Mauladaniyati, R., & Widodo, S.A. 2020. *Geometri Analitik Ruang*. Yogyakarta: Matematika.

Mursita, D. 2011. *Matematika untuk Perguruan Tinggi*. Bandung : Rekayasa Sains.

Nursiyono, J.A., & Safitri, J. 2014. *Mengenal Integral Lebih Dekat*. Bogor : In Media.

Pashaev, O. K., & Parlakgörür, T. 2017. *Apollonius Representation of Qubits*. arXiv preprint arXiv:1706.05399.

Pinem, D. 2015. *Kalkulus untuk Perguruan Tingg*i. Bandung : Rekayasa Sains.

Pradyumnati, R. M. tt. *Irisan Kerucut: Pengayaan Matematika SMA*. Lampung: UIN Raden Intan.

Purcell, E.J. & Varberg, D. 2003. *Kakulus dan Geometri Analitik* Jilid 1. Jakarta: Erlangga.

Rizki, N. A. 2018. *Geometri Analitik*. Samarinda: Universitas Mulawarman.

Rory, R., & Diana, R. 2020. *Pemodelan Data Covid-19 Menggunakan Regresi Polinomial Lokal*. In Seminar Nasional Official Statistics (Vol. 2020, No. 1, pp. 91-98).

Spiegel, M. R. 1996. *Statistika Edisi Kedua* (alih Bahasa I Nyoman Susila & Ellen Gunawan). Jakarta: Erlangga.

Stewart, J. 2012. *Multivariable Calculus*. Califormia: Brook Cole Cengage.

Stewart, J. 2018. *Single Variable Calculus: Concepts and Contexts, Enhanced Edition*. Califormia: Brook ColeCengage.

Subanar. 2013. *Statistika Matematika*. Yogyakarta : Graha Ilmu.

Sukmadewi, T.S. 2020. *Modul Matematika Umum Kelas XI KD 3.10*. Jakarta: Direktorat Jenderal PAUD, DIKDAS dan DIKMEN.

Sukino. 2013. *Matematika untuk SMA/MA Kelas XI kelompok wajib semester 2*. Jakarta: Erlangga.

Sukino. 2013. *Matematika untuk SMA/MA Kelas XI peminatan matematika dan Ilmu alam*. Jakarta: Erlangga.

Suyitno, A. 2016. *Guru Pembelajar: Modul Matematika SMA Kelompok Kompetens E*. Jakarta: Direktorat Jendral Guru dan Tenaga Kependidikan.

Walpole, R. E. 1992. *Pengantar Statistika*. Jakarta: PT Gramedia Pustaka Utama.

Wardiman. 1982. *Hitung Integral*. Yogyakarta: Hanindita.

Walpole, R. E. & Myers, R. H. 1986. *Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuwan*. Bandung: ITB.

Wirodikromo, S. 2001. *Matematika Untuk SMA kelas XI*. Jakarta: Erlangga.

Varberg, D., Purcell, E.J., & Rigbton, S. E. 2010. *Kakulus Jilid 1*. Jakarta: Erlangga.

Yunita, A., & Hamdunah. 2017. *Modul Geometri Analitik.* Padang: Rumahkayu Pustaka Utama.

Indeks

Profil

Penulis

Wikan Budi Utami, M.Pd

E-mail : wikanbudiutami27@gmail.com
Alamat Kantor : FKIP Universitas Pancasakti Tegal
Jl.Halmahera KM1 Kota Tegal
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika

Riwayat pekerjaan/profesi

2010 - 2015 Guru Matematika di SMP
2010 Guru Matematika di SMK
2012 - sekarang Dosen Pendidikan Matematika FKIP Universitas Pancasakti Tegal

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar

2010 S2: Pendidikan Matematika, Universitas Sebelas Maret Surakarta
2006 S1: Pendidikan Matematika, Universitas Pancasakti Tegal

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir)

2019 - Mozaik Matematika 1: Buku Pengayaan dan Penilaian SMA/MA kelas XII Program Wajib.
2019 - Mozaik Matematika 2: Buku Pengayaan dan Penilaian SMA/MA kelas XI Program Wajib.
2019 - Mozaik Matematika 3: Buku Pengayaan dan Penilaian SMA/MA kelas X Program Wajib.
2020 - Mozaik Matematika SMA/MA kelas XII Peminatan MIPA.
2020 - Mozaik Matematika SMA/MA kelas XI Peminatan MIPA.
2020 - Mozaik Matematika SMA/MA kelas X Peminatan MIPA.
2021 - Asesmen Pembelajaran Matematika SMA/MA Kelas X.
2021 - Asesmen Pembelajaran Matematika SMA/MA Kelas XI.
2021 - Asesmen Pembelajaran Matematika SMA/MA Kelas XII.

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir)

Judul Penelitian dan Publikasi dapat dilihat pada:
https://scholar.google.com/citations?hl=id&user=PfU3Tt0AAAAJ.
https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=57211280805.

Penulis

Dr. Sri Adi Widodo, M.Pd.

Email : sriadi@ustjogja.ac.id
Alamat Kantor : Pendidikan Matematika,
Universitas Sarjanawiyata Tamansiswa,
Jalan Batikan UH III/1043, Tuntungan,
Yogyakarta

Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika

Riwayat Pekerjaan/Profesi

2005 - 2010 Guru Matematika di SMK
2009 - sekarang Dosen Pendidikan Matematika,
Universitas Sarjanawiyata Tamansiswa, Yogyakarta

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar

2016 S3: Pendidikan Matematika, Universitas Pendidikan Indonesia
2008 S2: Pendidikan Matematika, Universitas Sebelas Maret Surakarta
2001 S1: Pendidikan Matematika, Universitas Sarjanawiyata Tamansiswa, Yogyakarta

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir)

2015 Metode Numerik. Yogyakarta: Graha Ilmu.
2019 Relationship of Anxiety Levels, Motivation, and Achievement Case Study of Mathematics Education Students at One of the Universities in Yogyakarta. In *Achievement Motivation: Perspectives, Influences And Outcome*. NY; Nova Publisher.
2020 Union: Dari Lokal Ke Nasional. In *Kiat Mengelola Jurnal Pendidikan Matematika: Curahan Hari Para Editor*. Yogyakarta: UAD Press.
2020 Geometri Analitik Ruang. Yogyakarta: Matematika.

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir)

Judul Penelitian dan Publikasi dapat dilihat pada:
https://scholar.google.com/citations?hl=id&user=CobzRdUAAAAJ.
https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=57196328078.

Penulis

Fitria Sulistyowati, M.Pd.

Email : fitria.sulistyowati@ustjogja.ac.id
Alamat Kantor : Pendidikan Matematika,
Universitas Sarjanawiyata Tamansiswa,
Jl. Batikan Tuntungan,
Umbulharjo UH III/1043
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika

Riwayat Pekerjaan/Profesi

2014 – 2017	Tentor Matematika di Primagama
2018 – sekarang	Dosen Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Sarjanawiyata Tamansiswa

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar

2016	S2: Pendidikan Matematika, Universitas Sebelas Maret Surakarta
2010	S1: Pendidikan Matematika, Universitas Muhammadiyah Purworejo

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir)

Judul Penelitian dan Publikasi dapat dilihat pada:
https://scholar.google.com/citations?hl=id&user=aVvthBgAAAAJ.
https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=57196244925.

Penelaah

Prof. Dr. Sunardi, M.Pd

Email : sunardi.fkip@unej.ac.id
Alamat Kantor : FKIP Universitas Jember, Jl. Kalimantan nomor 37 Jember
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika

Riwayat pekerjaan/profesi

1983 – sekarang	Dosen Program Studi S1 dan S2 Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember
2016 – sekarang	Dosen Penguji Disertasi S3 Program Studi Pendidikan Matematika di Universitas Negeri Malang dan Universitas Negeri Surabaya
2007 –2016	Ketua Panitia Pelaksana Sertifikasi Guru Rayon 16 Universitas Jember
1981 – 1985	Guru Matematika di SMA

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar

S3: Pendidikan Matematika, Universitas Negeri Surabaya tahun masuk 1999
S2: Pendidikan Matematika, IKIP Malang tahun masuk 1992
S1: Pendidikan Matematika, IKIP Malang tahun masuk 1977

Judul Buku yang Pernah Ditelaah/Editor (10 tahun terakhir)

2019	Buku Guru dan Buku Peserta didik Matematika Untuk Program Peminatan SMA/MA Kelas X
2021	Buku Guru dan Buku Peserta didik Matematika SMA/SMK Kelas X
2018	Buku Guru dan Buku Peserta didik Matematika SMP/MTs Kelas VII (Editor)
2018	Matematika Fisika 1
2018	Matematika Fisika 2
2016	Strategi Belajar Mengajar IPA

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir)

2018	Penalaran Matematika, Himpunan, Relasi dan Fungsi
2014	Teori dan Soal-Soal Geometri Analitika Bidang
2012	Strategi Belajar Mengajar Matematika
2011	Model of Teaching and Learning

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir)

Judul Penelitian dan Publikasi dapat dilihat pada
https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=57193683524.

Penelaah

Dr. Kiki Ariyanti Sugeng

Email : kiki@sci.ui.ac.id
Alamat Kantor : Kampus UI Depok, 16424
Bidang Keahlian : Matematika

Riwayat pekerjaan/profesi

1989 - sekarang Dosen Universitas Indonesia

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar

2006 S3: Matematika, Federation University (a/n Univ. of Ballarat), Australia.
1987 S2: Matematika, Institut Teknologi Bandung.
1985 S1: Matematika, Universitas Indonesia.

Judul Buku dan Tahun Terbit

2014 Teori Graf dan Aplikasinya

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir)

1. Sugeng, K.A., Silaban, D.R., Bača, M., Semaničová-Feňovčíková, A., Local inclusive distance verteX irregular graphs, Mathematics, 9 (14) (2021), 1673
2. Lu, J., Peng, J., Chen, J., Sugeng, K.A., Prediction method of autoregressive moving average models for uncertain time series , International Journal of General Systems , 49(5) (2020), pp. 546–572.
3. Septiyanto, F. Sugeng, K.A., Rainbow connection number of generalized composition, AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics, 17(1)(2020), pp. 367–372.
4. Utami, B., Sugeng, K.A., Utama, S., On inclusive d-distance irregularity strength on triangular ladder graph and path, AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics , 17(3)(2020), pp. 810–819.
5. Hendy,, Mudholifah, A.N., Sugeng, K.A., Bača, M., Semaničová-Feňovčíková, A., On H-antimagic decomposition of toroidal grids and triangulations, AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics, 17(3)(2020), pp. 761–770.
6. Bong, N., Bača, M., Semaničová-Feňovčíková, A., Sugeng, K.A., Wang, T.-M., Local Face Antimagic Evaluations and Coloring of Plane Graphs, Fundamenta Informaticae, 174(2 (2020), pp. 103–119.
7. Arumugam, S., Bača, M., Marr, A., Semaničová-Feňovčíková, A., Sugeng, K.A., Note on in-antimagicness and out-antimagicness of digraphs, Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography, 2020 (in press).

Ilustrator dan Desainer

Hasbi Yusuf

Email : abi.yusuf09@gmail.com
Bidang Keahlian : Ilustrator dan Disainer

Riwayat Pekerjaan
- Desainer & Ilustrator RSL Award
- Desainer & Ilustrator SD Menara St. Martinus Makasar

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

2018 Pianika Method
2018 Syllabus Trumpet
2018 Syllabus Mellophone
2018 Syllabus Baritone
2018 Syllabus Snare Drum
2018 Syllabus Keyboard Percussion
2018 Syllabus Drill Design
2018 Syllabus Colour Guard
2020 Buku Panduan Guru Seni Musik untuk SMP Kelas VII
2021 Buku Panduan Guru Seni Musik untuk SD Kelas IV
2021 Buku Panduan Guru Seni Musik untuk SMP Kelas VIII

Penyunting

Legina Aditya, S.Si

Email : legina.aditya@gmail.com
Alamat Kantor : PT. Sumber Mitra Agung Jaya, Jakarta
Bidang Keahlian : Editing

Riwayat pekerjaan/profesi
Editor dan product specialist 2011-sekarang

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar
S1 Biologi FMIPA, Universitas Indonesia , Tahun 2007

Judul Buku dan Tahun Terbit
Buletin Summit Lipid Update Edisi Tahun 2013 s.d. Tahun 2018