KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET, DAN TEKNOLOGI
BADAN STANDAR, KURIKULUM, DAN ASESMEN PENDIDIKAN
PUSAT PERBUKUAN

Buku Panduan Guru
Matematika

Mohammad Tohir, dkk.

2022

SMA/SMK/MA KELAS XII

Hak Cipta pada Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi Republik Indonesia
Dilindungi Undang-Undang

Disclaimer: Buku ini disiapkan oleh Pemerintah dalam rangka pemenuhan kebutuhan buku pendidikan yang bermutu, murah, dan merata sesuai dengan amanat dalam UU No. 3 Tahun 2017. Buku ini disusun dan ditelaah oleh berbagai pihak di bawah koordinasi Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi. Buku ini merupakan dokumen hidup yang senantiasa diperbaiki, diperbarui, dan dimutakhirkan sesuai dengan dinamika kebutuhan dan perubahan zaman. Masukan dari berbagai kalangan yang dialamatkan kepada penulis atau melalui alamat surel buku@kemdikbud.go.id diharapkan dapat meningkatkan kualitas buku ini.

Buku Panduan Guru Matematika untuk SMA/SMK/MA Kelas XII

Penulis
Mohammad Tohir
Ahmad Choirul Anam
Ibnu Taufiq

Penelaah
Widowati
Ali Mahmudi

Penyelia/Penyelaras
Supriyatno
E. Oos M. Anwas
NPM Yuliarti Dewi

Ilustrator
Ahmad Saad Ibrahim

Editor

Cicilia Erni Setyowati

Desainer
Imee Amiatun

Penerbit
Pusat Perbukuan
Badan Standar, Kurikulum, dan Asesmen Pendidikan
Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi
Kompleks Kemdikbudristek Jalan RS. Fatmawati, Cipete, Jakarta Selatan
https://buku.kemdikbud.go.id

Cetakan Pertama, 2022
ISBN 978-602-244-536-4 (no.jil.lengkap)
ISBN 978-602-244-739-9 (jil.3)

Isi buku ini menggunakan huruf Linux Libertine12/16pt., Philipp H. Poll.
viii, 192 hlm.: 17,6 × 25 cm.

Kata Pengantar

Pusat Perbukuan; Badan Standar, Kurikulum, dan Asesmen Pendidikan; Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi memiliki tugas dan fungsi mengembangkan buku pendidikan pada satuan Pendidikan Anak Usia Dini, Pendidikan Dasar, dan Pendidikan Menengah. Buku yang dikembangkan saat ini mengacu pada Kurikulum Merdeka, dimana kurikulum ini memberikan keleluasaan bagi satuan/program pendidikan dalam mengembangkan potensi dan karakteristik yang dimiliki oleh peserta didik. Pemerintah dalam hal ini Pusat Perbukuan mendukung implementasi Kurikulum Merdeka di satuan pendidikan Pendidikan Anak Usia Dini, Pendidikan Dasar, dan Pendidikan Menengah dengan mengembangkan Buku Teks Utama.

Buku teks utama merupakan salah satu sumber belajar utama untuk digunakan pada satuan pendidikan. Adapun acuan penyusunan buku teks utama adalah Capaian Pembelajaran PAUD, SD, SMP, SMA, SDLB, SMPLB, dan SMALB pada Program Sekolah Penggerak yang ditetapkan melalui Keputusan Kepala Badan Penelitian dan Pengembangan dan Perbukuan Nomor 028/H/KU/2021 Tanggal 9 Juli 2021. Sajian buku dirancang dalam bentuk berbagai aktivitas pembelajaran untuk mencapai kompetensi dalam Capaian Pembelajaran tersebut. Buku ini digunakan pada satuan pendidikan pelaksana implementasi Kurikulum Merdeka.

Sebagai dokumen hidup, buku ini tentu dapat diperbaiki dan disesuaikan dengan kebutuhan serta perkembangan keilmuan dan teknologi. Oleh karena itu, saran dan masukan dari para guru, peserta didik, orang tua, dan masyarakat sangat dibutuhkan untuk pengembangan buku ini di masa yang akan datang. Pada kesempatan ini, Pusat Perbukuan menyampaikan terima kasih kepada semua pihak yang telah terlibat dalam penyusunan buku ini, mulai dari penulis, penelaah, editor, ilustrator, desainer, dan kontributor terkait lainnya. Semoga buku ini dapat bermanfaat khususnya bagi peserta didik dan guru dalam meningkatkan mutu pembelajaran.

Jakarta, Juni 2022
Kepala Pusat,

Supriyatno
NIP 19680405 198812 1 001

Prakata

Puji syukur dipanjatkan ke hadirat Allah SWT karena hidayah dan inayah-Nya penulisan buku siswa ini dapat diselesaikan sesuai dengan waktu yang telah ditetapkan. Buku Siswa ini disusun sesuai Capaian Pembelajaran Fase F untuk SMA/MA Kelas XII sesuai dengan Keputusan Menteri Pendidikan dan Kebudayaan Republik Indonesia Nomor 028/H/KU/2021 Tanggal 9 Juli 2021 tentang Capaian Pembelajaran pada PAUD, SD, SMP, SMA, SDLB, SMPLB, dan SMALB.

Buku Panduan Guru ini disusun untuk memenuhi Kompetensi Keterampilan 4Cs (*Creativity, Critical Thinking, Collaboration, Communication*) dalam pembelajaran abad ke-21 yang meliputi: kehidupan dan karier, pembelajaran dan inovasi, serta informasi, media, dan teknologi. Oleh karena itu, dalam uraian setiap bab akan mengembangkan kompetensi/keterampilan/sikap siswa antara lain: (i) berpikir tingkat tinggi (HOTS), (ii) berpikir kritis dan *problem solving*, kreatif dan inovatif, komunikasi, dan kolaborasi, dan (iii) literasi informasi, media, dan teknologi. Untuk mempelajari materi dalam buku ini siswa lebih banyak diberi kesempatan secara aktif terlibat untuk mencari tahu, sedangkan guru akan membantu siswa yang mendapat hambatan belajar. Untuk mengembangkan keterampilan hidup dan karier, dalam buku ini disediakan projek yang harus dilakukan siswa secara kolaborasi atau mandiri dan hasilnya untuk dikomunikasikan.

Buku Panduan Guru ini terdiri atas dua bagian, yaitu Buku Panduan Guru Petunjuk Umum dan Buku Panduan Guru Petunjuk Khusus. Adapun pada Buku Panduan Guru Bagian Umum memuat: pendahuluan, capaian pembelajaran, penjelasan bagian-bagian buku siswa, strategi umum pembelajaran, gambaran umum bab, skema pembelajaran, panduan pembelajaran, dan interaksi guru dengan orang tua/wali. Sementara itu, materi yang akan diajarkan dalam buku ini dibagi menjadi tiga bab. Bab 1 tentang Transformasi Fungsi, memuat: Translasi fungsi, Refleksi fungsi, Dilatasi fungsi, Rotasi fungsi, Kombinasi Transformasi Fungsi. Bab 2 tentang Busur dan Juring Lingkaran, memuat: Busur Lingkaran, Pengertian Busur Lingkaran, Juring Lingkaran, Hubungan Panjang Busur dan Luas Juring

Lingkaran, serta Tembereng. Bab 3 tentang Kombinatorik, memuat: Aturan Pengisian Tempat, Permutasi, Kombinasi, Peluang Suatu Kejadian, Peluang Kejadian Majemuk Saling Lepas, Peluang Kejadian Majemuk Saling Bebas, Peluang Kejadian Majemuk Saling Bebas Bersyarat.

Terima kasih disampaikan kepada Kepala Pusat Perbukuan dan Kurikulum Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan Republik Indonesia yang telah memfasilitasi Tim Penulis untuk memperlancar tersusunnya buku ini.

Kami menyadari kekurangan buku ini. Oleh karena itu, saran dan kritik untuk memperbaiki buku ini sangat diharapkan dari semua pihak. Semoga buku ini bermanfaat bagi pembelajaran secara umum dan khusus pada pembelajaran matematika di SMA/SMK/MA.

Jakarta, Oktober 2021
Penulis

Mohammad Tohir, dkk.

Daftar Isi

iii | Kata Pengantar
v | Prakata
vi | Daftar Isi
viii | Daftar Gambar

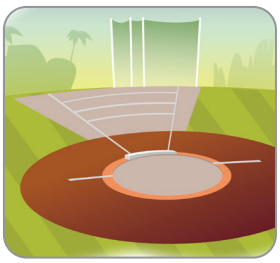
Panduan Umum

1
2 | A. Pendahuluan
4 | B. Capaian Pembelajaran
9 | C. Penjelasan Bagian-bagian Buku Siswa
14 | D. Strategi Umum Pembelajaran

Panduan Khusus

21
Bab 1
Transformasi Fungsi
32 | A. Translasi
45 | B. Refleksi
50 | C. Dilatasi
55 | D. Rotasi
57 | E. Kombinasi Transformasi Fungsi
65 | Uji Kompetensi 1

67
Bab 2
Busur dan Juring Lingkaran
75 | A. Busur Lingkaran
89 | B. Juring Lingkaran
99 | C. Hubungan Panjang Busur dan Luas Juring
108 | Uji Kompetensi 2



115 Bab 3
Kombinatorik

122 | A. Aturan Pengisian Tempat
126 | B. Permutasi
134 | C. Kombinasi
142 | D. Peluang Suatu Kejadian
147 | E. Peluang Kejadian Majemuk
160 | F. Peluang Kejadian Majemuk Saling Bebas Bersyarat
166 | Uji Kompetensi 3
173 | G. Sistem Penilaian Hasil Belajar
173 | H. Kegiatan Tindak Lanjut
173 | I. Interaksi Guru dengan Orang Tua/Wali

Glosarium | 175
Daftar Pustaka | 179
Indeks | 181
Biodata Pelaku Perbukuan | 183

Daftar Gambar

Gambar 1.1	Perkembangan Kasus Terkonfirmasi Covid-19 Per Bulan	22
Gambar 1.2	Perkembangan Kasus Terkonfirmasi Covid-19 dengan Angka Sama	23
Gambar 1.3	Grafik Fungsi $y = 2^x$	33
Gambar 1.4	Grafik Fungsi $y = 2^{x+1}$	33
Gambar 1.5	Grafik Fungsi $y = x^2 - 2x - 3$	35
Gambar 1.6	Grafik Fungsi $y = (x + 3)^2 - 2(x + 3) - 3$	36
Gambar 1.7	Grafik $y = (x + 3)^2 - 2(x + 3) - 1$	36
Gambar 1.8	Grafik Fungsi Eksponen $y = 2^x$ Ditranslasi 2 Satuan ke Kanan	38
Gambar 1.9	Grafik Fungsi Eksponen $y = 2^{-x}$ Ditranslasi 2 Satuan ke Kanan	38
Gambar 1.10	Translasi Fungsi $y = x + \frac{6}{x}$	40
Gambar 1.11	Grafik Fungsi	51
Gambar 1.12	Lengkungan Jembatan sebagai Penerapan Fungsi Kuadrat	58
Gambar 2.1	Lapangan Olahraga Tolak Peluru	68
Gambar 2.2	Bentuk Lapangan Olahraga Tolak Peluru	68
Gambar 2.3	Ilustrasi Lapangan Tolak Peluru	69
Gambar 3.1	Denah Perumahan Bunga Indah	116

KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET, DAN TEKNOLOGI
REPUBLIK INDONESIA, 2022
Matematika untuk SMA/SMK/MA Kelas XII
Penulis: Mohammad Tohir, dkk.
ISBN: 978-602-244-739-9

Panduan Umum

Sumber: pikisuperstar/freepik

A. Pendahuluan

Buku Siswa digunakan oleh siswa untuk kegiatan pembelajaran di dalam kelas dalam mencapai tujuan pembelajaran, sementara itu Buku Guru digunakan oleh guru sebagai pedoman membimbing siswa dalam melaksanakan pembelajaran di dalam kelas. Buku Guru berfungsi sebagai petunjuk dalam menerapkan Buku Siswa. Sebelum mengajar, guru harus membaca Buku Guru terlebih dahulu agar memahami Capaian Pembelajaran, tujuan pembelajaran, materi yang ada pada setiap bab, alternatif aktivitas pembelajaran yang akan diterapkan sehingga memberikan arahan dan petunjuk untuk melaksanakan kegiatan pembelajaran yang tepat untuk mencapai tujuan pembelajaran. Dengan demikian, guru mempunyai gambaran dan metode yang tepat yang akan diterapkan dalam kegiatan pembelajaran. Di dalam Buku Guru dicantumkan tujuan pembelajaran yang akan dicapai dari setiap bab, beberapa alternatif jawaban dari pertanyaan pemantik, beberapa alternatif kegiatan pembelajaran siswa serta alternatif penyelesaian soal latihan. Diharapkan Buku Guru ini dapat membantu guru untuk menentukan alternatif kegiatan pembelajaran dalam rangka mencapai tujuan pembelajaran. Pada Buku Guru diberikan alternatif pemecahan masalah kegiatan sehari-hari yang berkaitan dengan materi yang ada dalam bab. Dalam Buku Guru juga diberikan bagaimana cara guru membimbing siswa dalam kegiatan eksplorasi, yang dapat menuntun siswa dalam memahami konsep matematika sehingga pembelajaran menjadi bermakna. Guru juga diharapkan dapat mengembangkan metode dan pendekatan pembelajaran yang menekankan pada profil pelajar Pancasila. Profil Pelajar Pancasila adalah perwujudan siswa sebagai pembelajar sepanjang hayat yang memiliki kompetensi global dan berperilaku sesuai dengan nilai-nilai Pancasila, dengan enam ciri utama, yaitu:

1. Beriman, bertakwa kepada Tuhan YME, dan berakhlak mulia

Pelajar Indonesia yang berakhlak mulia adalah pelajar yang berakhlak dalam hubungannya dengan Tuhan Yang Maha Esa. Pelajar Pancasila memahami ajaran agama dan kepercayaannya serta menerapkan pemahaman tersebut dalam kehidupan sehari-hari. Elemen kunci beriman, bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa, dan berakhlak mulia adalah akhlak beragama, akhlak pribadi, akhlak kepada manusia, akhlak kepada alam, dan akhlak bernegara.

2. Berkebinekaan global

Pelajar Indonesia mempertahankan kebudayaan luhur, lokalitas, dan identitasnya, dan tetap berpikiran terbuka dalam berinteraksi dengan budaya lain. Perilaku pelajar Pancasila ini menumbuhkan rasa saling menghargai dan memungkinkan terbentuknya budaya baru yang positif dan tidak bertentangan dengan budaya luhur bangsa. Elemen kunci berkebinekaan global adalah mengenal dan menghargai budaya, kemampuan komunikasi interkultural dalam berinteraksi dengan sesama, serta refleksi dan tanggung jawab terhadap pengalaman kebinekaan.

3. Bergotong royong

Pelajar Indonesia memiliki kemampuan gotong royong, yaitu kemampuan pelajar Pancasila untuk melakukan kegiatan secara bersama-sama dengan sukarela agar kegiatan yang dikerjakan dapat berjalan lancar, mudah, dan ringan. Elemen kunci gotong royong adalah kolaborasi, kepedulian, dan berbagi.

4. Mandiri

Pelajar Indonesia adalah pelajar mandiri, yaitu pelajar Pancasila yang bertanggung jawab atas proses dan hasil belajarnya. Elemen kunci mandiri adalah kesadaran akan diri dan situasi yang dihadapi dan regulasi diri.

5. Bernalar kritis

Pelajar yang bernalar kritis adalah pelajar Pancasila yang mampu secara objektif memproses informasi baik kualitatif maupun kuantitatif, membangun keterkaitan antara berbagai informasi, menganalisis informasi, mengevaluasi, dan menyimpulkannya. Elemen kunci bernalar kritis adalah memperoleh dan memproses informasi dan gagasan, menganalisis dan mengevaluasi penalaran, merefleksi pemikiran dan proses berpikir, dan mengambil keputusan.

6. Kreatif

Pelajar yang kreatif adalah pelajar Pancasila yang mampu memodifikasi dan menghasilkan sesuatu yang orisinal, bermakna, bermanfaat, dan berdampak. Elemen kunci kreatif adalah menghasilkan gagasan yang orisinal dan menghasilkan karya serta tindakan yang orisinal.

Selain Profil Pelajar Pancasila, perlu dimasukkan 4 isu penting dalam pembelajaran Matematika, yaitu

1) Kesadaran Lingkungan

   Ruang lingkup kesadaran lingkungan meliputi perubahan iklim/ pemanasan global, keanekaragaman hayati, pengolaan limbah, deforestasi, bencana alam, gaya hidup berkelanjutan, kemampuan berfikir sistem

2) Keamanan Digital

   Ruang lingkup Keamanan Digital meliputi teknologi digital dan internet sehat, risiko aktifitas dan interaksi dalam jaringan, etika berinternet, bijak dalam bersosial media

3) Nutrisi dan Kebugaran

   Ruang lingkup Nutrisi dan Kebugaran meliputi kecukupan nutrisi, kebugaran jasmani, kesehatan mental/rohani

4) Literasi Finansial

   Ruang lingkup Literasi Finansial meliputi uang dan transaksi, perencanaan dan pengolahan keuangan, risiko dan pendapatan, pemahaman regulasi dan perlindungan konsumen, hak dan kewajiban dalam transaksi keuangan, fungsi lembaga keuangan, gaya hidup (keinginan, kebutuhan), keterampilan mengidentifikasi informasi finansial, menganalisis informasi dan situasi finansial, mengevaluasi isu-isu finansial, menerapkan pemahaman finansial dalam konteks yang beragam.

   Dalam proses pembelajaran di kelas, diharapkan guru dapat mengaitkan empat isu penting dengan materi pelajaran, untuk memberikan penguatan nilai-nilai karakter yang berkaitan dengan lingkungan, keamanan digital, nutrisi dan kebugaran, serta literasi finansial.

B. Capaian Pembelajaran

Matematika merupakan ilmu atau pengetahuan tentang belajar atau berpikir logis yang sangat dibutuhkan manusia untuk hidup yang mendasari perkembangan teknologi modern. Matematika mempunyai peran penting dalam berbagai disiplin ilmu dan memajukan daya pikir manusia. Matematika

dipandang sebagai materi pembelajaran yang harus dipahami sekaligus sebagai alat konseptual untuk mengonstruksi dan merekonstruksi materi tersebut, mengasah, dan melatih kecakapan berpikir yang dibutuhkan untuk memecahkan masalah dalam kehidupan. Belajar matematika dapat meningkatkan kemampuan siswa dalam berpikir logis, analitis, sistematis, kritis, dan kreatif. Kompetensi tersebut diperlukan agar siswa memiliki kemampuan memperoleh, mengelola, dan memanfaatkan informasi untuk bertahan hidup pada keadaan yang selalu berubah, penuh dengan ketidak-pastian, dan bersifat kompetitif.

Mata pelajaran Matematika membekali siswa tentang cara berpikir, bernalar, dan berlogika melalui aktivitas mental tertentu yang membentuk alur berpikir berkesinambungan dan berujung pada pembentukan alur pemahaman terhadap materi pembelajaran matematika berupa fakta, konsep, prinsip, operasi, relasi, masalah, dan solusi matematis tertentu yang bersifat formal-universal. Proses mental tersebut dapat memperkuat disposisi siswa untuk merasakan makna dan manfaat matematika dan belajar matematika serta nilai-nilai moral dalam belajar Mata pelajaran Matematika, meliputi kebebasan, kemahiran, penaksiran, keakuratan, kesistematisan, kerasionalan, kesabaran, kemandirian, kedisiplinan, ketekunan, ketangguhan, kepercayaan diri, keterbukaan pikiran, dan kreativitas. Dengan demikian, relevansinya dengan profil pelajar Pancasila, Mata pelajaran Matematika ditujukan untuk mengembangkan kemandirian, kemampuan bernalar kritis, dan kreativitas siswa. Adapun materi pembelajaran pada Mata pelajaran Matematika di setiap jenjang pendidikan dikemas melalui bidang kajian Bilangan, Aljabar, Pengukuran, Geometri, Analisis Data dan Peluang.

1. Tujuan Mata Pelajaran Matematika

Mata Pelajaran Matematika bertujuan untuk membekali siswa agar dapat:

a. Memahami materi pembelajaran matematika berupa fakta, konsep, prinsip, operasi, dan relasi matematis dan mengaplikasikannya secara luwes, akurat, efisien, dan tepat dalam pemecahan masalah matematis (pemahaman matematis)

b. Menggunakan penalaran pada pola dan sifat, melakukan manipulasi matematis dalam membuat generalisasi, menyusun bukti, atau menjelaskan gagasan dan pernyataan matematika (penalaran dan pembuktian matematis)

c. Memecahkan masalah yang meliputi kemampuan memahami masalah, merancang model matematis, menyelesaikan model atau menafsirkan solusi yang diperoleh (pemecahan masalah matematis)

d. Mengomunikasikan gagasan dengan simbol, tabel, diagram, atau media lain untuk memperjelas keadaan atau masalah, serta menyajikan suatu situasi ke dalam simbol atau model matematis (komunikasi dan representasi matematis)

e. Mengaitkan materi pembelajaran matematika berupa fakta, konsep, prinsip, operasi, dan relasi matematis pada suatu bidang kajian, lintas bidang kajian, lintas bidang ilmu, dan dengan kehidupan (koneksi matematis)

f. Memiliki sikap menghargai kegunaan matematika dalam kehidupan, yaitu memiliki rasa ingin tahu, perhatian, dan minat dalam mempelajari matematika, serta sikap kreatif, sabar, mandiri, tekun, terbuka, tangguh, ulet, dan percaya diri dalam pemecahan masalah (disposisi matematis)

2. Karakteristik Mata Pelajaran Matematika

Mata pelajaran Matematika diorganisasikan dalam lingkup lima elemen konten dan lima elemen kecakapan.

a. Elemen konten dalam mata pelajaran Matematika terkait dengan pandangan bahwa matematika sebagai materi pembelajaran (*subject matter*) yang harus dipahami siswa.

Elemen	Deskripsi
Bilangan	Bidang kajian Bilangan membahas tentang angka sebagai simbol bilangan, konsep bilangan, operasi hitung bilangan, dan relasi antara berbagai operasi hitung bilangan dalam subelemen representasi visual, sifat urutan, dan operasi.
Aljabar	Bidang kajian Aljabar membahas tentang aljabar nonformal dalam bentuk simbol gambar sampai dengan aljabar formal dalam bentuk simbol huruf yang mewakili bilangan tertentu dalam subelemen persamaan dan pertidaksamaan, relasi dan pola bilangan, serta rasio dan proporsi.

Pengukuran	Bidang kajian Pengukuran membahas tentang besaran-besaran pengukuran, cara mengukur besaran tertentu, dan membuktikan prinsip atau teorema terkait besaran tertentu dalam subelemen pengukuran besaran geometris dan nongeometris.
Geometri	Bidang kajian Geometri membahas tentang berbagai bentuk bangun datar dan bangun ruang baik dalam kajian Euclides maupun non-Euclides serta ciri-cirinya dalam subelemen geometri datar dan geometri ruang.
Analisis Data dan Peluang	Bidang kajian Analisis Data dan Peluang membahas tentang pengertian data, jenis-jenis data, pengolahan data dalam berbagai bentuk representasi, dan analisis data kuantitatif terkait pemusatan dan penyebaran data serta peluang munculnya suatu data atau kejadian tertentu dalam subelemen data dan representasinya, serta ketidakpastian dan peluang.

b. Elemen kecakapan dalam mata pelajaran Matematika terkait dengan pandangan bahwa matematika sebagai alat konseptual untuk mengonstruksi dan merekonstruksi materi pembelajaran matematika berupa aktivitas mental yang membentuk alur berpikir dan alur pemahaman yang dapat mengembangkan kecakapan-kecakapan.

Elemen	Deskripsi
Pemahaman Matematis	Pemahaman matematis terkait erat dengan pembentukan alur pemahaman terhadap materi pembelajaran matematika berupa fakta, konsep, prinsip, operasi, dan relasi yang bersifat formal-universal, dengan cara mengingat, menjelaskan, dan menerapkannya secara rutin dalam kasus sederhana.
Penalaran dan Pembuktian Matematis	Penalaran terkait erat dengan pembentukan alur berpikir dalam mengonstruksi dan merekonstruksi materi pembelajaran matematika berupa fakta, konsep, prinsip, operasi, dan relasi dengan cara menggunakan

	pola hubungan untuk menganalisis situasi dan menyusun konjektur, sedangkan pembuktian matematis terkait erat dengan pembentukan alur pemahaman terhadap materi pembelajaran matematika berupa fakta, konsep, prinsip, operasi, dan relasi yang bersifat formal-universal dengan cara membuktikan kebenaran suatu prinsip, rumus, atau teorema tertentu.
Pemecahan Masalah Matematis	Pemecahan masalah matematis terkait erat dengan pembentukan alur berpikir dalam mengonstruksi dan merekonstruksi materi pembelajaran matematika dan pembentukan alur pemahaman terhadap materi pembelajaran matematika berupa fakta, konsep, prinsip, operasi, dan relasi yang bersifat formal-universal, dengan cara menggunakan berbagai strategi yang efektif untuk menerapkan materi pembelajaran matematika dalam menyelesaikan masalah matematis atau masalah sehari-hari.
Komunikasi dan Representasi Matematis	Komunikasi dan representasi matematis terkait erat dengan pembentukan alur pemahaman terhadap materi pembelajaran matematika berupa fakta, konsep, prinsip, operasi, dan relasi yang bersifat formal-universal dengan cara mengomunikasikan gagasan dengan simbol, tabel, diagram, atau media lain untuk memperjelas keadaan atau masalah, serta menyajikan suatu situasi ke dalam simbol atau model matematis.
Koneksi Matematis	Koneksi matematis terkait erat dengan pembentukan alur pemahaman terhadap materi pembelajaran matematika berupa fakta, konsep, prinsip, operasi, dan relasi yang bersifat formal-universal dengan cara mengaitkan antarmateri pembelajaran matematika pada suatu bidang kajian, lintas bidang kajian, lintas bidang ilmu, dan dengan kehidupan.

c. Capaian Pembelajaran Matematika fase F

Pada akhir fase F, siswa dapat menentukan fungsi invers, komposisi fungsi dan transformasi fungsi untuk memodelkan situasi dunia nyata

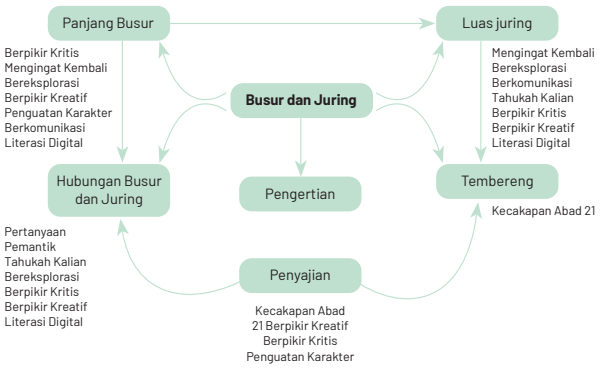
berdasarkan fungsi yang sesuai (linier, kuadrat, eksponensial). Siswa menerapkan teorema tentang lingkaran, dan menentukan panjang busur dan luas juring lingkaran. Siswa juga dapat mengevaluasi berbagai laporan berbasis statistik.

Fase F Berdasarkan Elemen

Elemen	Capaian Pembelajaran
Bilangan	-
Aljabar dan Fungsi	Pada akhir fase F, siswa dapat menentukan fungsi invers, komposisi fungsi dan transformasi fungsi untuk memodelkan situasi dunia nyata berdasarkan fungsi yang sesuai (linier, kuadrat, eksponensial).
Pengukuran	-
Geometri	Pada akhir fase F, siswa menerapkan teorema tentang lingkaran, dan menentukan panjang busur dan luas juring lingkaran.
Analisis Data dan Peluang	Pada akhir fase F, siswa dapat merumuskan pertanyaan, mengumpulkan informasi, menyajikan, menganalisis, hingga menarik kesimpulan dari suatu data dengan membuat rangkuman statistik deskriptif, mengevaluasi proses acak yang mendasari percobaan statistik. Mereka menggunakan peluang bebas dan bersyarat untuk menafsirkan data.
Fungsi	-
Kalkulus	-

C. Penjelasan Bagian-bagian Buku Siswa

1. Peta Konsep

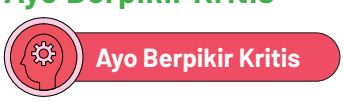


Peta Konsep memberikan gambaran bab secara umum, yang merupakan diagram yang menggambarkan hubungan yang bermakna antarkonsep yang ada dalam bab tersebut. Dengan adanya peta konsep ini diharapkan guru memiliki gambaran utuh tentang hubungan konsep yang ada sehingga membantu guru dalam memilih strategi pembelajaran yang tepat dan bermakna.

2. Ayo Bereksplorasi

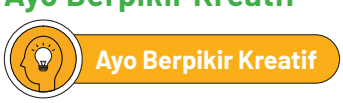
Dalam kegiatan Ayo Bereksplorasi ini siswa diharapkan aktif dalam mencari informasi suatu pengetahuan atau konsep, teknik baru, metode dan rumus baru, atau menyelidiki pola hubungan antarunsur konsep antarbab, sambil berusaha memahaminya. Inti kegiatan eksplorasi adalah pelibatan siswa dalam menelaah sesuatu hal baru yang ada di Buku Siswa dengan bimbingan guru. Pengetahuan tersebut bisa jadi berhubungan dengan materi pelajaran sebelumnya maupun yang benar-benar baru bagi siswa.

3. Ayo Berpikir Kritis



Dalam kegiatan Ayo Berpikir Kritis siswa diajak mencari tahu untuk memahami konsep atau pengetahuan baru melalui penemuan terbimbing sehingga mereka yakin betul bahwa apa yang mereka dapatkan adalah benar-benar pengetahuan. Salah satu ciri dari siswa yang mampu berpikir kritis adalah mereka tidak mudah percaya terhadap informasi yang diterimanya sebelum melakukan proses berpikir yang mendalam. Kegiatan ini perlu dilatih terus-menerus agar siswa memiliki kemampuan berpikir kritis yang terlatih untuk membangun pengetahuannya.

4. Ayo Berpikir Kreatif



Dalam kegiatan Ayo Berpikir Kreatif siswa diminta untuk mencari, membuat ide, atau alternatif jawaban atau solusi dari permasalahan yang ada sebanyak-banyaknya. Guru diharapkan memberikan ruang yang terbuka dengan memberi kesempatan siswa untuk berpikir dengan berbagai macam ide yang muncul dari siswa.

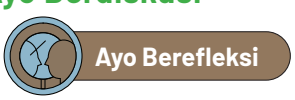
5. Ayo Mencoba

Dalam kegiatan Ayo Mencoba siswa diminta untuk mengerjakan soal latihan, baik secara individu maupun kelompok. Hal ini penting sekali bagi siswa untuk menguji kemampuan siswa dalam mengaplikasikan pengetahuan yang diperoleh dalam menyelesaikan permasalahan.

6. Penguatan Karakter

Dalam kegiatan Penguatan Karakter, diharapkan kegiatan pembelajaran dapat dikaitkan dengan profil pelajar Pancasila. Guru harus mencari ide-ide yang dapat mengaitkan semua aspek pembelajaran dalam menanamkan nilai-nilai karakter dalam kehidupan sehari-hari.

7. Ayo Berdiskusi



Dalam kegiatan Ayo Berdiskusi, diharapkan guru dapat memilih berbagai model diskusi yang sesuai agar siswa terlatih untuk bertukar pikiran, gagasan, ide, yang bermanfaat dalam membangun dan memperdalam pengetahuan siswa dalam rangka menyelesaikan permasalahan atau menjawab pertanyaan.

8. Petunjuk

Dalam kegiatan Petunjuk, guru memberi petunjuk dan langkah-langkah untuk memancing siswa dalam pemecahan masalah. Bentuk dari kegiatan ini ada banyak variasi tergantung pada kebutuhan dan jenis permasalahan yang ada.

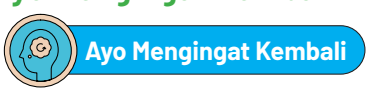
9. Tahukah Kalian?

Dalam kegiatan Tahukah Kalian, siswa mendapat informasi yang berkaitan dengan materi yang sedang dipelajari yang merupakan manfaat matematika dalam kehidupan manusia dalam sejarah kehidupan agar pengetahuan siswa makin kuat dan terbangun semangat untuk senang bermatematika.

10. Ayo Berefleksi

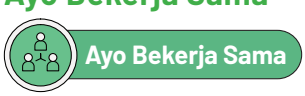
Dalam kegiatan Ayo Berefleksi, siswa diajak untuk melihat dan mengingat kembali semua materi yang telah mereka pelajari. Bentuk kegiatan ini dapat berupa membandingkan pengetahuan yang sudah didapatkan dan diaplikasikan untuk menyelesaikan soal.

11. Ayo Mengingat Kembali



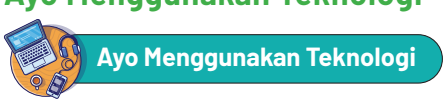
Dalam kegiatan Ayo Mengingat Kembali, siswa diajak untuk mengingat pengetahuan sebelumnya yang menjadi prasyarat untuk mempelajari materi saat ini, yang berupa hubungan antara konsep yang satu dengan konsep yang lainnya.

12. Ayo Bekerja Sama



Dalam kegiatan Ayo Bekerja Sama, siswa saling bertukar pikiran dan gagasan untuk menyelesaikan permasalahan atau menyelesaikan soal. Permasalahan akan dapat diselesaikan jika ada kerja sama yang baik antara siswa satu dengan lainnya sehingga pengetahuan menjadi utuh. Kegiatan ini juga untuk mendorong nilai karakter saling memahami dan menghargai antara siswa satu dengan lainnya.

13. Ayo Menggunakan Teknologi



Dalam kegiatan Ayo Menggunakan Teknologi, siswa diajak menggunakan berbagai macam bentuk teknologi baik dalam bentuk perangkat keras seperti kalkulator maupun perangkat lunak berupa aplikasi matematika agar dapat membantu siswa dalam menyelesaikan permasalahan yang ada.

Setiap kali membahas msalah teknologi, diharapkan guru dapat menambahkan salah satu dari 4 muatan penting yaitu Keamanan Digital yang meliputi teknologi digital dan internet sehat, risiko aktifitas dan interaksi dalam jaringan, etika berinternet, bijak dalam bersosial media.

14. Contoh Soal

Contoh Soal 1.11

Diketahui fungsi eksponen $y = 2^{x+1}$. Jika fungsi eksponen tersebut dirotasi sejauh 90° searah jarum jam, tentukan hasil rotasi dan gambar grafiknya!

Dalam Contoh Soal, diberikan soal beserta alternatif penyelesaiannya yang dapat membantu siswa dalam memahami suatu konsep atau prosedur yang terkait dengan materi yang sedang dipelajari.

15. Latihan

Latihan 1.1

1. Tentukan hasil translasi dari fungsi berikut!
   a. $y = 2x^2$ yang ditranslasi oleh $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$
   b. $y = 3x^2 - 2$ yang ditranslasi oleh $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
   c. $y = \frac{2}{x}$ yang ditranslasi oleh $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Dalam Latihan dibagi menjadi tiga kategori, yaitu soal dasar, soal menengah, dan soal tingkat tinggi. Pertanyaan pada tingkat dasar berupa jawaban pendek untuk menguji pemahaman konsep materi dasar. Tingkat menengah dalam bentuk aplikasi soal yang terstruktur, sedangkan tingkat tinggi berupa permasalahan dan keterampilan tingkat tinggi.

16. Uji Kompetensi

Uji Kompetensi 1

1. Jika titik puncak suatu parabola $y = g(x)$ adalah $(2,-4)$, tentukan titik puncak yang lain pada parabola berdasarkan fungsi berikut!
   a. $y = g(x - 3)$
   b. $y = g(x) - 4$
   c. $y = -g(x)$
   d. $y = g(3x)$
   e. $y = 3g(x)$
2. Diberikan $g(x) = 3^x$, sketsalah setiap kurva berikut ini!
   a. $g(x - 1) - 4$
   b. $g(\frac{1}{2}x + 2) + 3$
   c. $\frac{1}{3}g(-x) + 4$
   d. $3g(x) - 1$

Uji Kompetensi ini ada di setiap akhir bab, yang merupakan alat ukur bagi siswa untuk menguji tingkat ketercapaian siswa dalam memahami materi dalam bab tersebut. Siswa dapat mengerjakan sejumlah soal yang bervariasi dari yang sederhana hingga yang kompleks.

17. Pengayaan/Projek

Ayo Mengerjakan Proyek

Guru meminta siswa melakukan kegiatan projek 2.1 untuk menentukan nilai konstanta π. Jika kegiatan ini dilakukan di dalam kelas, guru harus menginformasikan terlebih dahulu perlengkapan dan instrumen yang akan digunakan. Projek juga dapat digunakan untuk tugas siswa.

Aktivitas informasi selanjutnya dibagi menjadi dua komponen. Informasi pertama menunjukkan bahwa sudut pusat berhubungan dengan panjang busur lingkaran. Informasi kedua mengacu pada hubungan antara sudut pusat dan luas juring lingkaran.

Pengayaan/Projek untuk memperluas atau memperdalam pemahaman siswa terhadap konsep dan prosedur matematika dan aplikasinya dalam kehidupan sehari-hari terutama dalam bidang teknologi.

D. Strategi Umum Pembelajaran

Strategi pembelajaran yang dirancang dalam Buku Siswa banyak mengarah ke pendekatan penemuan terbimbing. Siswa diberi kesempatan seluas-luasnya untuk melakukan eksplorasi dengan bimbingan guru yang mengarah pada menemukan konsep dan membangun pemahaman yang menjadi tujuan dalam pembelajaran. Namun, guru juga boleh melakukan pendekatan lain yang sesuai dengan kondisi dan karakteristik siswa dalam membangun pemahaman dan menemukan konsep yang sesuai. Sebelum masuk ke materi pelajaran, guru dapat mengecek pengetahuan siswa yang menjadi dasar dalam mempelajari materi yang akan dibahas. Guru dapat memulai pelajaran dengan memberitahukan tujuan dan alasan mempelajari materi, memberikan kesempatan kepada siswa untuk melakukan eksplorasi secara individu maupun kelompok dengan bimbingan dan petunjuk dari guru untuk mengarahkan proses berpikir siswa dalam rangka menemukan konsep dan pemahaman konsep yang mendalam. Pada pembelajaran tentang konsep dan prosedur, guru dapat memberikan latihan terbimbing untuk dikerjakan siswa. Latihan ini dapat dilakukan secara individu maupun kelompok. Pembelajaran dapat berjalan dengan baik jika motivasi siswa dalam mengikuti pelajaran juga baik. Oleh karena itu, guru harus pandai-pandai meningkatkan motivasi siswa dalam mengikuti pembelajaran, meskipun hal ini tidak mudah bagi guru. Beberapa cara untuk meningkatkan motivasi belajar siswa antara lain, usahakan tujuan pembelajaran dijelaskan dengan semenarik mungkin dan kontekstual, memperlihatkan antusias

dalam mengajar dan dikaitkan dengan manfaat dalam kehidupan sehari-hari, mengupayakan sebanyak mungkin agar siswa terlibat dalam pembelajaran, memberi pujian dalam berbagai bentuk keberhasilan siswa dan menghargai pekerjaan siswa yang telah dilakukan.

Beberapa alternatif model pembelajaran yang dapat diterapkan antara lain:

1. Pembelajaran Berbasis Penemuan (*Discovery Learning*)

Discovery mempunyai prinsip yang sama dengan inkuiri (*inquiry*) dan *problem solving*. Tidak ada perbedaan yang prinsipiel pada ketiga istilah ini. *Discovery Learning* lebih menekankan pada ditemukannya konsep atau prinsip yang sebelumnya tidak diketahui, masalah yang dihadapkan kepada siswa semacam masalah yang direkayasa oleh guru. Pada inkuiri masalahnya bukan hasil rekayasa sehingga siswa harus mengerahkan seluruh pikiran dan keterampilannya untuk mendapatkan temuan-temuan di dalam masalah itu melalui proses penelitian, sedangkan *problem solving* lebih memberi tekanan pada kemampuan menyelesaikan masalah. Pada *Discovery Learning* materi yang akan disampaikan tidak disampaikan dalam bentuk final, tetapi siswa didorong untuk mengidentifikasi apa yang ingin diketahui, dilanjutkan dengan mencari informasi sendiri kemudian mengorganisasi atau membentuk (konstruktif) apa yang mereka ketahui dan mereka pahami dalam suatu bentuk akhir.

Penggunaan *Discovery Learning* ingin mengubah kondisi belajar yang pasif menjadi aktif dan kreatif, mengubah pembelajaran yang *teacher oriented* ke *student oriented*, mengubah modus *ekspository* (siswa hanya menerima informasi secara keseluruhan dari guru) ke modus *discovery* (siswa menemukan informasi sendiri).

Dalam *Discovery Learning* bahan ajar tidak disajikan dalam bentuk akhir, siswa dituntut untuk melakukan berbagai kegiatan menghimpun informasi, membandingkan, mengategorikan, menganalisis, meng-integrasikan, mereorganisasikan bahan serta membuat kesimpulan-kesimpulan. Bruner mengatakan bahwa proses belajar akan berjalan dengan baik dan kreatif jika guru memberikan kesempatan kepada siswa untuk menemukan suatu konsep, teori, aturan, atau pemahaman melalui contoh-contoh yang ia jumpai dalam kehidupannya (Budiningsih, 2005: 41). Pada akhirnya yang menjadi tujuan dalam *Discovery Learning* menurut Bruner adalah hendaklah guru memberikan kesempatan

kepada siswanya untuk menjadi seorang *problem solver*, seorang *scientist*, *historian*, atau ahli matematika. Dan melalui kegiatan tersebut siswa akan menguasainya, menerapkan, serta menemukan hal-hal yang bermanfaat bagi dirinya.

Langkah-langkah *Discovery Learning* menurut Syah (2004) adalah sebagai berikut.

a. *Stimulation* (Stimulasi/pemberian rangsangan)

   Pertama-tama pada tahap ini siswa dihadapkan pada sesuatu yang menimbulkan kebingungannya dan timbul keinginan untuk menyelidiki sendiri. Guru dapat memulai kegiatan pembelajaran dengan mengajukan pertanyaan, anjuran membaca buku, dan aktivitas belajar lainnya yang mengarah pada persiapan pemecahan masalah. Stimulasi pada tahap ini berfungsi untuk menyediakan kondisi interaksi belajar yang dapat mengembangkan dan membantu siswa dalam mengeksplorasi bahan. Dengan demikian, seorang guru harus menguasai teknik-teknik dalam memberi stimulus kepada siswa agar tujuan mengaktifkan siswa untuk mengeksplorasi dapat tercapai.

b. *Problem Statement* (Pernyataan/Identifikasi Masalah)

   Setelah dilakukan stimulasi, guru memberi kesempatan kepada siswa untuk mengidentifikasi sebanyak mungkin masalah yang relevan dengan bahan pelajaran, kemudian salah satunya dipilih dan dirumuskan dalam bentuk hipotesis (jawaban sementara atas pertanyaan masalah).

c. *Data Collection* (Pengumpulan Data)

   Pada saat siswa melakukan eksperimen atau eksplorasi, guru memberi kesempatan kepada para siswa untuk mengumpulkan informasi sebanyak-banyaknya yang relevan untuk membuktikan benar atau tidaknya hipotesis. Data dapat diperoleh dengan membaca literatur, mengamati objek, wawancara dengan narasumber, melakukan uji coba sendiri, dan sebagainya.

d. *Data Processing* (Pengolahan Data)

   Menurut Syah (2004: 244) pengolahan data merupakan kegiatan mengolah data dan informasi yang telah diperoleh para siswa baik melalui wawancara, observasi, dan sebagainya, lalu ditafsirkan.

e. *Verification* (Pembuktian)

Pada tahap ini siswa melakukan pemeriksaan secara cermat untuk membuktikan benar atau tidaknya hipotesis yang telah ditetapkan, dihubungkan dengan hasil *data processing*. Berdasarkan hasil pengolahan dan tafsiran, atau informasi yang ada, pernyataan atau hipotesis yang telah dirumuskan terdahulu itu kemudian dicek, apakah terjawab atau tidak, apakah terbukti atau tidak.

f. *Generalization* (Menarik Kesimpulan/Generalisasi)

Tahap generalisasi/menarik kesimpulan adalah proses menarik sebuah kesimpulan yang dapat dijadikan prinsip umum dan berlaku untuk semua kejadian atau masalah yang sama, dengan memperhatikan hasil verifikasi. Berdasarkan hasil verifikasi maka dirumuskan prinsip-prinsip yang mendasari generalisasi.

2. Model Pembelajaran Berbasis Masalah (*Problem Based Learning*)

Problem Based Learning (PBL) adalah model pembelajaran yang dirancang agar siswa mendapat pengetahuan penting yang membuat mereka mahir dalam memecahkan masalah dan memiliki model belajar sendiri serta memiliki kecakapan berpartisipasi dalam tim. Proses pembelajarannya menggunakan pendekatan yang sistemik untuk memecahkan masalah atau menghadapi tantangan yang nanti diperlukan dalam kehidupan sehari-hari.

Prinsip-prinsip PBL yang harus diperhatikan meliputi konsep dasar, pendefinisian masalah, pembelajaran mandiri, pertukaran pengetahuan dan penilaiannya.

a. Konsep Dasar (*Basic Concept*)

Pada pembelajaran ini fasilitator dapat memberikan konsep dasar, petunjuk, referensi, atau *link* dan *skill* yang diperlukan dalam pembelajaran tersebut. Hal ini dimaksudkan agar siswa lebih cepat mendapatkan 'peta' yang akurat tentang arah dan tujuan pembelajaran. Konsep yang diberikan tidak perlu detail, diutamakan dalam bentuk garis besar saja sehingga siswa dapat mengembangkannya secara mandiri dan mendalam.

b. Pendefinisian Masalah (*Defining the Problem*)

Dalam langkah ini fasilitator menyampaikan skenario atau per-masalahan dan dalam kelompoknya siswa melakukan berbagai

kegiatan. Pertama, *brainstorming* dengan cara semua anggota kelompok mengungkapkan pendapat, ide, dan tanggapan terhadap skenario secara bebas sehingga dimungkinkan muncul berbagai macam alternatif pendapat. Kedua, melakukan seleksi untuk memilih pendapat yang lebih fokus. Ketiga, menentukan permasalahan dan melakukan pembagian tugas dalam kelompok untuk mencari referensi penyelesaian dari isu permasalahan yang didapat. Fasilitator memvalidasi pilihan-pilihan yang diambil siswa yang akhirnya diharapkan memiliki gambaran yang jelas tentang apa saja yang mereka ketahui, apa saja yang mereka tidak ketahui, dan pengetahuan apa saja yang diperlukan untuk menjembataninya.

c. Pembelajaran Mandiri (*Self Learning*)

Setelah mengetahui tugasnya, masing-masing siswa mencari berbagai sumber yang dapat memperjelas isu yang sedang diinvestigasi, misalnya dari artikel tertulis di perpustakaan, halaman web, atau bahkan tulisan pakar dalam bidang yang relevan. Tujuan utama tahap investigasi, yaitu: (1) agar siswa mencari informasi dan mengembangkan pemahaman yang relevan dengan permasalahan yang telah didiskusikan di kelas, dan (2) informasi dikumpulkan untuk dipresentasikan di kelas, relevan dan dapat dipahami.

d. Pertukaran Pengetahuan (*Exchange Knowledge*)

Setelah mendapatkan sumber untuk keperluan pendalaman materi secara mandiri, pada pertemuan berikutnya siswa berdiskusi dalam kelompoknya dapat dibantu guru untuk mengklarifikasi capaiannya dan merumuskan solusi dari permasalahan kelompok. Langkah selanjutnya presentasi hasil dalam kelas dengan mengakomodasi masukan dari pleno, menentukan kesimpulan akhir, dan dokumentasi akhir.

3. Model Pembelajaran Berbasis Projek (*Project Based Learning*)

Pembelajaran Berbasis Projek atau *Project Based Learning* (PBL) adalah model pembelajaran yang melibatkan siswa dalam suatu kegiatan (projek) yang menghasilkan suatu produk. Siswa yang melakukan semua kegiatan mulai dari merancang, melaksanakan, dan membuat laporan serta menunjukkan hasil produk yang dihasilkan.

Titik tekan model pembelajaran ini adalah proses pembelajaran jangka panjang, siswa terlibat secara langsung untuk menyusun dan

menyelesaikan persoalan kehidupan sehari-hari yang melibatkan beberapa disiplin ilmu. Dalam pelaksanaannya, Pembelajaran Berbasis Projek bertitik tolak dari masalah dalam kehidupan sehari-hari sebagai langkah awal sebelum mengumpulkan data dengan mengintegrasikan pengetahuan baru berdasarkan pengalamannya dalam beraktivitas. Pembelajaran model ini dirancang agar siswa dapat mengalami secara langsung dan mendalam permasalahan kehidupan yang kompleks dan melatih daya nalar mereka untuk mengembangkan kemampuannya sebagai wahana pembelajaran dalam memahami permasalahan yang kompleks dan melatih serta mengembangkan kemampuan siswa dalam melakukan insvestigasi dan melakukan kajian untuk menemukan solusi permasalahan.

Pembelajaran Berbasis Projek dirancang dalam rangka (1) mendorong dan membiasakan siswa untuk menemukan sendiri (*inquiry*), melakukan penelitian/pengkajian, menerapkan keterampilan dalam merencanakan (*planning skills*), berpikir kritis (*critical thinking*), dan penyelesaian masalah (*problem-solving skills*) dalam menuntaskan suatu kegiatan/projek; (2) mendorong siswa untuk menerapkan pengetahuan, keterampilan, dan sikap tertentu ke dalam berbagai konteks (*a variety of contexts*) dalam menuntaskan kegiatan/projek yang dikerjakan; (3) memberikan peluang kepada siswa untuk belajar menerapkan *interpersonal skills* dan berkolaborasi dalam suatu tim sebagaimana orang bekerja sama dalam sebuah tim dalam lingkungan kerja atau kehidupan nyata. Adapun langkah-langkah Pembelajaran Berbasis Projek sebagai berikut.

a. Penentuan Pertanyaan Mendasar (*Start with the Essential Question*)

   Pembelajaran dimulai dengan pertanyaan esensial, yaitu pertanyaan yang dapat memberi penugasan siswa dalam melakukan suatu aktivitas, mengambil topik yang sesuai dengan realitas dunia nyata dan dimulai dengan sebuah investigasi mendalam. Guru berusaha agar topik yang diangkat relevan untuk para siswa.

b. Mendesain Perencanaan Projek (*Design a Plan for the Project*)

   Perencanaan dilakukan secara kolaboratif antara pengajar dan siswa. Dengan demikian, siswa diharapkan akan merasa "memiliki" projek tersebut. Perencanaan berisi tentang aturan main, pemilihan aktivitas yang dapat mendukung dalam menjawab pertanyaan esensial dengan cara mengintegrasikan berbagai subjek yang

mungkin, serta mengetahui alat dan bahan yang dapat diakses untuk membantu penyelesaian projek.

c. Menyusun Jadwal (*Create a Schedule*)

Guru dan siswa secara kolaboratif menyusun jadwal aktivitas dalam menyelesaikan projek. Aktivitas pada tahap ini antara lain: (1) membuat *timeline* untuk menyelesaikan projek, (2) membuat *deadline* penyelesaian projek, (3) membawa siswa agar merencanakan cara yang baru, (4) membimbing siswa ketika mereka membuat cara yang tidak berhubungan dengan projek, dan (5) meminta siswa untuk membuat penjelasan (alasan) tentang pemilihan suatu cara.

d. Memonitor Siswa dan Kemajuan Projek (*Monitor the Students and the Progress of the Project*)

Guru bertanggung jawab untuk melakukan monitor terhadap aktivitas siswa selama menyelesaikan projek. *Monitoring* dilakukan dengan cara menfasilitasi siswa pada setiap proses. Dengan kata lain guru berperan menjadi mentor bagi aktivitas siswa. Agar mempermudah proses *monitoring*, dibuat sebuah rubrik yang dapat merekam keseluruhan aktivitas yang penting.

e. Menguji Hasil (*Assess the Outcome*)

Penilaian dilakukan untuk membantu guru dalam mengukur ketercapaian standar, berperan dalam mengevaluasi kemajuan masing-masing siswa, memberi umpan balik tentang tingkat pemahaman yang sudah dicapai siswa, membantu guru dalam menyusun strategi pembelajaran berikutnya.

f. Mengevaluasi Pengalaman (*Evaluate the Experience*)

Pada akhir proses pembelajaran, guru dan siswa melakukan refleksi terhadap aktivitas dan hasil projek yang sudah dijalankan. Proses refleksi dilakukan baik secara individu maupun kelompok. Pada tahap ini siswa diminta untuk mengungkapkan perasaan dan pengalamannya selama menyelesaikan projek. Guru dan siswa mengembangkan diskusi dalam rangka memperbaiki kinerja selama proses pembelajaran sehingga pada akhirnya ditemukan suatu temuan baru (*new inquiry*) untuk menjawab permasalahan yang diajukan pada tahap pertama pembelajaran.

KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET, DAN TEKNOLOGI
REPUBLIK INDONESIA, 2022
Matematika untuk SMA/SMK/MA Kelas XII
Penulis: Mohammad Tohir, dkk.
ISBN: 978-602-244-739-9

Bab
1

Panduan Khusus

Transformasi Fungsi

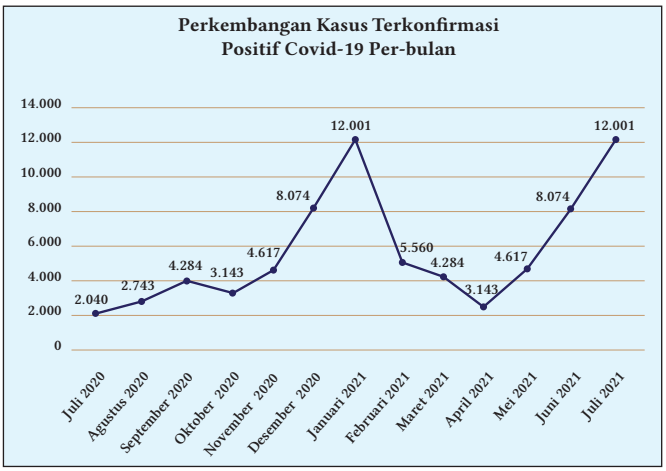
Tujuan Pembelajaran

1. Memahami transformasi pada suatu fungsi linear, fungsi kuadrat, dan fungsi eksponen
2. Menentukan transformasi translasi pada suatu fungsi
3. Menentukan transformasi refleksi pada suatu fungsi
4. Menentukan transformasi dilatasi pada suatu fungsi
5. Menentukan transformasi rotasi pada suatu fungsi
6. Menentukan kombinasi transformasi pada suatu fungsi

Severe Acute Respiratory Syndrome Coronavirus 2 (SARS-CoV-2) yang kemudian oleh World Health Organization (WHO) diganti namanya menjadi *Coronavirus Disease* 2019 (Covid-19) merupakan pandemi global yang sudah tersebar ke banyak negara di dunia. Indonesia juga tidak lepas dari pandemi tersebut sehingga beberapa daerah mengalami penambahan kasus terkonfirmasi positif Covid-19 sejak virus ini masuk ke Indonesia awal tahun 2020. Covid-19 adalah penyakit menular yang disebabkan oleh tipe baru *coronavirus* dengan gejala umum demam, lemah, batuk, kejang, dan diare (WHO, 2020). Virus ini dapat bergerak cepat dari manusia ke manusia melalui kontak langsung (Li et al., 2020). Pada pertengahan tahun 2021 jumlah penambahan kasus terkonfirmasi positif Covid-19 makin meningkat hingga mencapai angka lebih dari 2.000.000 pasien terkonfirmasi. Hal tersebut sungguh menjadi perhatian pemerintah dengan terus menggencarkan patuh protokol kesehatan dan mengeluarkan peraturan Pemberlakuan Pembatasan Kegiatan Masyarakat (PPKM) sebagai upaya mengantisipasi penyebaran Covid-19. Berikut ditunjukkan penambahan kasus terkonfirmasi Covid-19 secara nasional pada semester pertama tahun 2021.

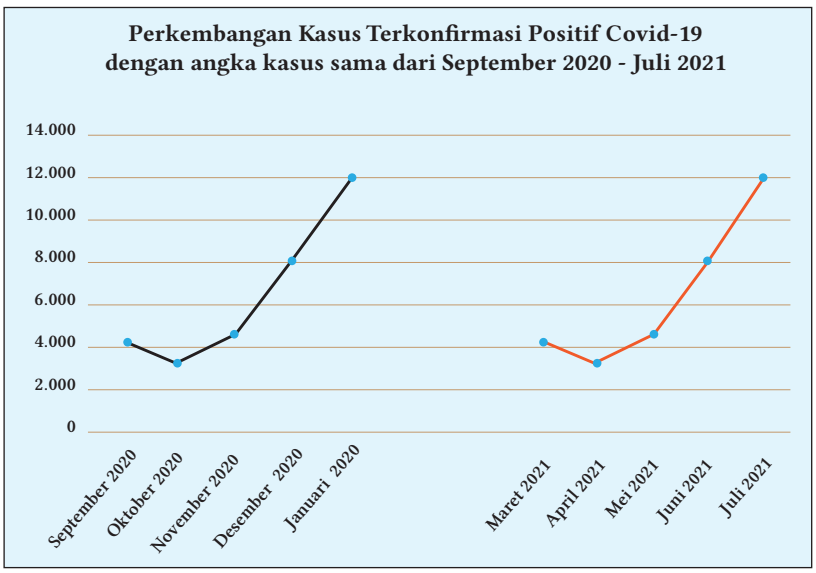
Jumlah penambahan kasus terkonfirmasi positif Covid-19 di Indonesia pada semester pertama tahun 2021

Penambahan kasus terkonfirmasi positif Covid-19 berdasarkan data dari https://covid19.go.id/peta-sebaran-covid19 per bulan sejak pertengahan tahun 2020 sampai dengan pertengahan tahun 2021 ditunjukkan pada diagram berikut.



Gambar 1.1 Perkembangan Kasus Terkonfirmasi Covid-19 Per Bulan

Berdasarkan Gambar 1.1 di atas diketahui bahwa perkembangan kasus terkonfirmasi setiap bulan berbeda-beda, terkadang meningkat terkadang menurun. Gambar di atas menunjukkan bahwa sejak Oktober 2020 grafik selalu meningkat, setelah memasuki bulan Februari 2021 grafik mulai menurun, tetapi meningkat lagi pada Mei 2021. Pada saat grafik meningkat atau naik maka pemerintah secara bertahap melaksanakan kebijakan PPKM. Coba perhatikan angka perkembangan kasus terkonfirmasi pada bulan September 2020 dan Maret 2021, ternyata memiliki angka sama yaitu 4.284 kasus. Pada bulan Oktober 2020 dan April 2021 juga memiliki angka sama yaitu 3.143 kasus, kemudian pada bulan November 2020 dan Mei 2021 juga memiliki angka sama yaitu 4.617 kasus. Selanjutnya, pada bulan Desember 2020 dan Juni 2021 angka perkembangannya adalah 8.074 kasus, sedangkan pada bulan Januari 2021 dan Juli 2021 memiliki angka perkembangan paling tinggi yaitu 12.001 kasus. Kesamaan data pada bulan berbeda tersebut, jika dimodelkan dalam bentuk grafik, akan tampak seperti pada gambar berikut.



Gambar 1.2 Perkembangan Kasus Terkonfirmasi Covid-19 dengan Angka Sama

Berdasarkan gambar tersebut, dapat kita ketahui bahwa data yang dimodelkan dengan diagram garis di atas menunjukkan bahwa data pada bulan Maret 2021–Juli 2021 merupakan pergeseran ke kanan dari grafik yang memodelkan data pada bulan September 2020–Januari 2021. Pergeseran tersebut merupakan penerapan transformasi. Pada bab ini akan kita pelajari terkait transformasi suatu fungsi.

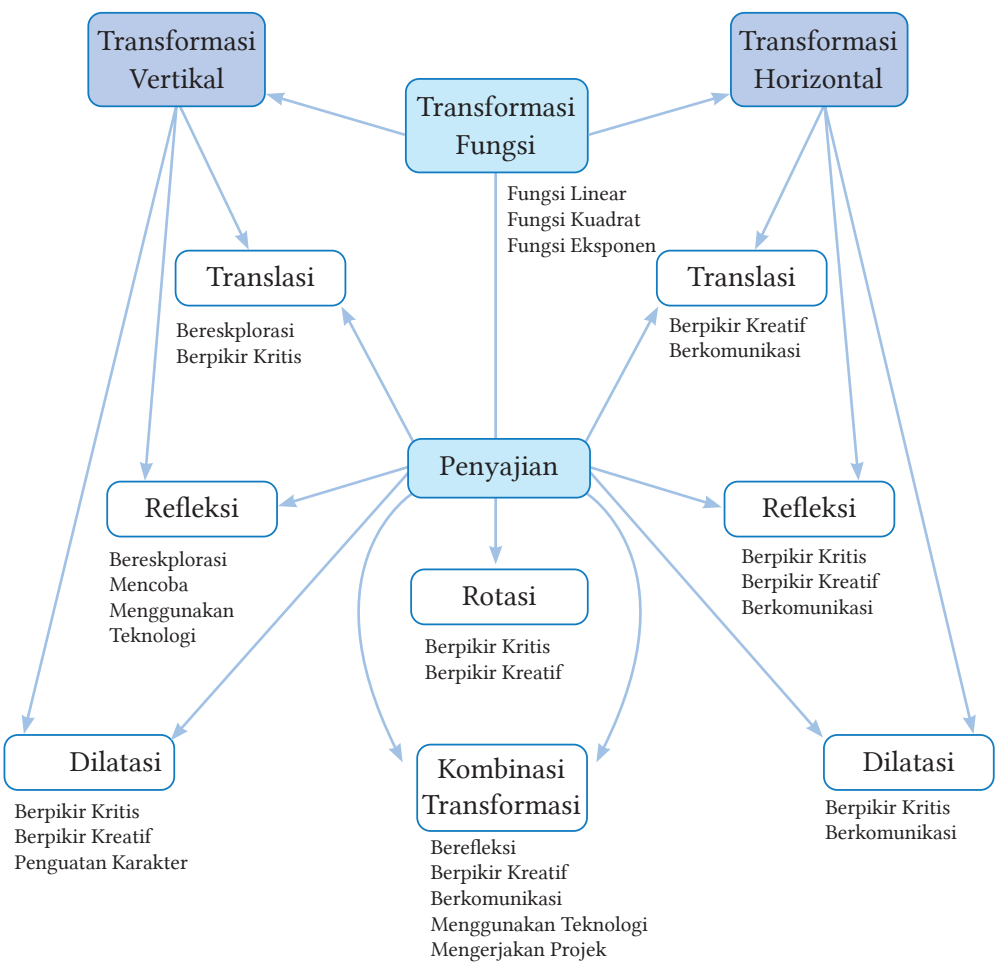
Kata Kunci

Transformasi fungsi linear, transformasi fungsi kuadrat, transformasi fungsi eksponensial, translasi, refleksi, dilatasi, rotasi.

Pertanyaan Pemantik

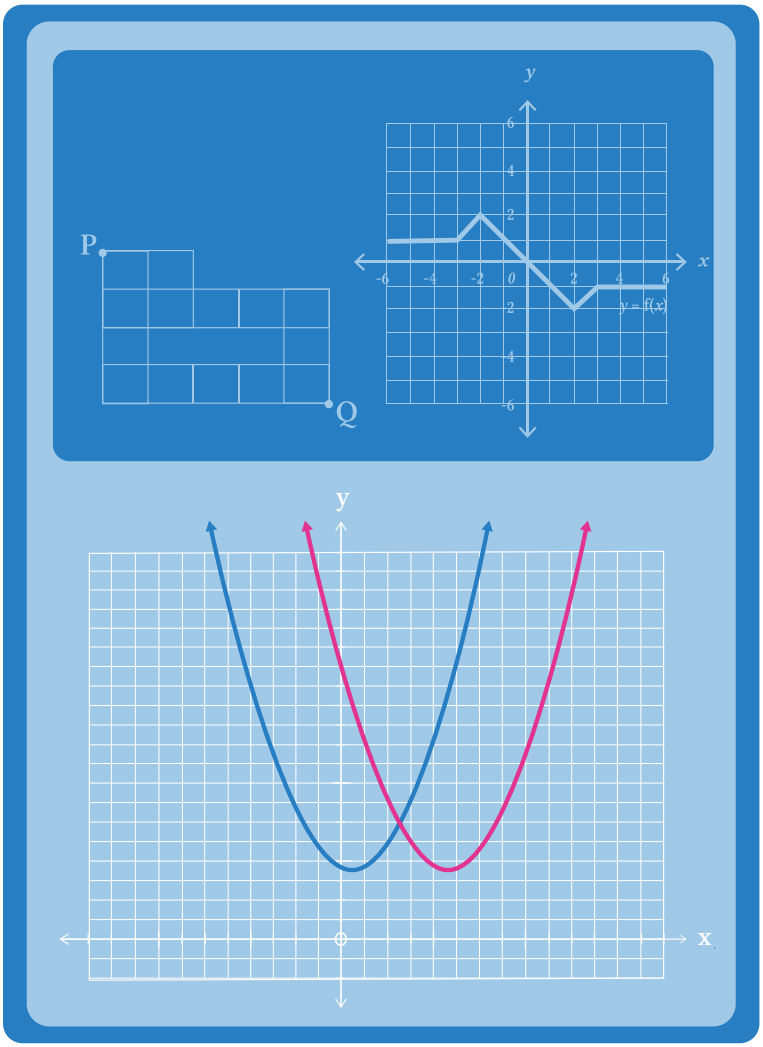
1. Bagaimana hasil bayangan translasi dari suatu fungsi?
2. Apakah refleksi dari suatu fungsi terhadap salah satu sumbu memiliki jarak yang sama?
3. Mengapa hasil rotasi dari suatu fungsi yang diputar searah jarum jam memiliki sudut bernilai negatif?
4. Apa yang terjadi jika semua transformasi dikombinasikan?

Peta Konsep



Gambaran Umum Bab 1

Bab 1 ini menyajikan konsep transformasi fungsi. Pada setiap subbabnya akan disajikan penanaman karakter Pancasila dan keterampilan abad ke-21 untuk mendukung tercapainya generasi emas tahun 2045, yaitu 1) konsep dan teori matematika, 2) pengenalan 4Cs (*Creativity*, *Critical Thinking*, *Collaboration*, *Communication*), 3) literasi matematika, 4) literasi budaya, dan 5) literasi digital. Sajian dalam Bab 1 ini bertujuan untuk mengeksplorasi kemampuan siswa dalam menentukan transformasi fungsi baik berupa translasi, refleksi, dilatasi, maupun rotasi pada fungsi linear, fungsi kuadrat, dan fungsi eksponen sehingga dapat menarik kesimpulan dan mengaplikasikan pemahaman yang dimiliki melalui kelima kegiatan pembelajaran tersebut.



Kegiatan 1.1 membahas translasi yang diawali dengan kegiatan Ayo Bereksplorasi. Siswa dapat menghubungkan dan menemukan penerapan konsep translasi dalam permasalahan yang lebih konkret. Siswa diajak melaksanakan beberapa kegiatan seperti: berpikir kritis, mengingat kembali, bereksplorasi, dan berkomunikasi terkait dengan konsep dan prosedur transformasi dari suatu fungsi dengan memperhatikan suatu grafik fungsi sebagai fungsi semula, sedangkan grafik fungsi yang lain sebagai bayangan dari grafik fungsi semula. Siswa diminta untuk memperdalam pengetahuannya melalui kegiatan berpikir kreatif, berpikir kritis, berkomunikasi, dan bekerja sama untuk memberikan penguatan karakter. Ajaklah siswa untuk aktif dalam pelaksanaan pembelajaran.

Kegiatan 1.2 membahas refleksi yang diawali dengan sajian gambar grafik fungsi dan contoh grafik yang mengalami refleksi. Siswa diajak untuk mempelajari kembali prosedur transformasi dan menentukan perubahannya. Siswa diajak melakukan eksplorasi dan berkomunikasi untuk mengetahui hasil dari suatu refleksi terhadap suatu fungsi. Siswa diminta untuk memperdalam pengetahuannya melalui kegiatan berpikir kritis, berpikir kreatif, dan menggunakan teknologi. Ajaklah siswa untuk mengevaluasi kemampuan dirinya melalui kegiatan refleksi.

Kegiatan 1.3 membahas dilatasi yang berhubungan dengan peregangan dan rapatan. Siswa diajak untuk memahami bentuk dilatasi dan perubahan fungsi dari fungsi semula. Siswa diminta untuk mengingat kembali penerapan translasi dan refleksi, kemudian melakukan eksplorasi dengan mengikuti prosedur menemukan hasil transformasi dari suatu fungsi. Siswa diminta untuk memperdalam pengetahuannya melalui kegiatan berpikir kritis, berpikir kreatif, dan menggunakan teknologi. Ajaklah siswa untuk mengevaluasi kemampuan dirinya melalui kegiatan refleksi.

Kegiatan 1.4 membahas kombinasi transformasi yang merupakan perubahan dari suatu bentuk fungsi. Siswa diajak untuk memahami bentuk transformasi yang sesuai dan lebih dari satu. Siswa diminta untuk mengingat kembali tentang penerapan translasi, refleksi dilatasi, kemudian melakukan eksplorasi dengan mengikuti prosedur menemukan hasil transformasi suatu fungsi. Siswa diminta untuk memperdalam pengetahuannya melalui kegiatan berpikir kritis, berpikir kreatif, dan menggunakan teknologi. Ajaklah siswa untuk mengevaluasi kemampuan dirinya melalui kegiatan-kegiatan tersebut.

Skema Pembelajaran

Pokok Materi	Kosakata	Metode dan Aktivitas	Sumber Utama	Sumber Lain	Subbab	Waktu (JP)*	Tujuan
Translasi	Translasi	Berpikir kritis, mengingat kembali, bereksplorasi, berkomunikasi, berpikir kreatif, (penguatan karakter), refleksi, menggunakan teknologi, mengerjakan projek, latihan	Buku Siswa	Hardy, G. H. (2018). *Course of Pure Mathematics*. Courier Dover Publications. Neill, H., & Quadling, D. (2014). Advanced Level Mathematics Pure Mathematics.	1.1 Translasi	6 JP	1. Memahami bentuk translasi pada suatu fungsi (linear, kuadrat, dan eksponen) 2. Menganalisis hubungan antar-transformasi 3. Mengeksplorasi hubungan dari suatu transformasi
Refleksi	Refleksi	Mengingat kembali, bereksplorasi, berkomunikasi, berpikir kritis, berpikir kreatif, menggunakan teknologi, berefleksi, latihan	Buku Siswa	Hardy, G. H. (2018). *Course of Pure Mathematics*. Courier Dover Publications. Neill, H., & Quadling, D. (2014). Advanced Level Mathematics Pure Mathematics.	1.2 Refleksi	8 JP	1. Memahami bentuk refleksi pada suatu fungsi (linear, kuadrat, dan eksponen) 2. Menganalisis hubungan antar-transformasi 3. Mengeksplorasi hubungan dari suatu transformasi

Dilatasi	Dilatasi	Bereksplorasi, mengerjakan projek, berpikir kritis, berpikir kreatif, menggunakan teknologi, latihan soal	Buku Siswa	Hardy, G. H. (2018). *Course of Pure Mathematics*. Courier Dover Publications. Neill, H., & Quadling, D. (2014). Advanced Level Mathematics Pure Mathematics.	1.3 Dilatasi	6 JP	1. Memahami bentuk dilatasi pada suatu fungsi (linear, kuadrat, dan eksponen) 2. Menganalisis hubungan antar-transformasi 3. Mengeksplorasi hubungan dari suatu transformasi
Rotasi	Rotasi	Bereksplorasi, mengerjakan projek, berpikir kritis, berpikir kreatif, menggunakan teknologi, latihan soal	Buku Siswa	Hardy, G. H. (2018). *Course of Pure Mathematics*. Courier Dover Publications. Neill, H., & Quadling, D. (2014). Advanced Level Mathematics Pure Mathematics.	1.4 Rotasi	4 JP	1. Memahami bentuk rotasi pada suatu fungsi (linear, kuadrat, dan eksponen) 2. Menganalisis hubungan antar-transformasi 3. Mengeksplorasi hubungan dari suatu transformasi
Kombinasi transformasi	transformasi	Bereksplorasi, mengerjakan projek, berpikir kritis, berpikir kreatif, menggunakan teknologi, latihan soal	Buku Siswa	Hardy, G. H. (2018). *Course of Pure Mathematics*. Courier Dover Publications. Neill, H., & Quadling, D. (2014). Advanced Level Mathematics Pure Mathematics.	1.5 Kombinasi Transformasi	8 JP	1. Memahami bentuk kombinasi transformasi pada suatu fungsi (linear, kuadrat, dan eksponen) 2. Menganalisis hubungan antar-transformasi 3. Mengeksplorasi hubungan dari suatu transformasi

Catatan:

* Waktu merupakan saran rentang jam pelajaran. Guru dapat menyesuaikan dengan kondisi aktual pembelajaran.

Panduan Pembelajaran

Pengalaman Belajar

Sebelum memulai materi tentang transformasi fungsi, guru diharapkan dapat menginformasikan pengalaman belajar siswa setelah mempelajari Bab 1 ini.

1. Siswa dapat mempelajari informasi yang sebelumnya pernah dipelajari terkait materi transformasi geometri.
2. Siswa dapat melakukan kegiatan eksplorasi berdasarkan instruksi yang disajikan pada buku siswa.
3. Siswa dapat memahami teori dan konsep transformasi (translasi, refleksi, dilatasi, dan rotasi).
4. Siswa dapat mengembangkan kemampuannya dengan melakukan kegiatan berpikir kritis, berpikir kreatif, berkomunikasi, berdiskusi, mencoba, berefleksi, mengerjakan projek, dan menggunakan teknologi.
5. Siswa dapat mengimplementasikan pengetahuannya dalam menyelesaikan permasalahan matematika terkait transformasi fungsi dalam kehidupan sehari-hari.

Sarana dan Prasarana Pembelajaran

- Pensil berwarna dan kertas berpetak
- Mistar (penggaris) dan jangka, gambar grafik fungsi linear, fungsi kuadrat, dan fungsi eksponen
- Aplikasi pendukung seperti Geogebra, Maple, FX Draw 6
- Lingkungan, teman, dan lembar kegiatan projek.

Apersepsi

Kegiatan diawali dengan mengajak siswa untuk mengingat kembali materi terkait transformasi geometri yang sudah dipelajari ketika duduk di bangku SMP, khususnya transformasi tentang translasi, refleksi, rotasi, dan dilatasi. Selanjutnya, guru mengajak siswa untuk mengingat kembali manfaat transformasi dalam kehidupan sehari-hari, serta menemukan contoh lain yang merupakan penerapan transformasi utamanya, transformasi fungsi, memahami dan menentukan transformasi fungsi yang digunakan (translasi, refleksi, rotasi, dan dilatasi).

Guru diharapkan dapat memancing siswa untuk mengingat kembali prosedur dalam memahami dan mempelajari terkait materi transformasi. Berikut ditunjukkan prosedur dan rangkuman yang dapat digunakan oleh guru dalam melaksanakan kegiatan apersepsi.

1. Transformasi adalah perubahan posisi dan atau ukuran suatu objek, baik berupa titik, garis, kurva, ataupun bidang.
2. Translasi adalah transformasi yang memindahkan titik-titik dengan arah dan jarak tertentu atau biasa disebut pergeseran.
   - Titik $A(x, y)$ ditranslasikan oleh $T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ menghasilkan bayangan ditulis dengan
   $$A(x, y) \xrightarrow{T(a\ b)} A'(x', y')$$
   - Bentuk matriks translasi $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$
   - $T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ disebut sebagai komponen translasi, dengan konstanta a adalah pergeseran secara horizontal dan b adalah pergeseran secara vertikal.
3. Refleksi adalah transformasi yang memindahkan tiap titik dengan menggunakan sifat bayangan oleh suatu cermin (pencerminan). Suatu refleksi disimbolkan sebagai M_a untuk a sebagai sumbu cermin.
   - Sifat refleksi
     a. Jarak titik semula dengan cermin sama dengan jarak cermin dengan titik bayangan.
     b. Garis penghubung dari titik semula dengan titik bayangan bersifat tegak lurus terhadap cermin.
     c. Garis-garis yang terbentuk antara titik semula dengan titik bayangan akan saling sejajar.
   - Jenis refleksi
     a. Titik $A(x, y)$ direfleksikan terhadap sumbu x menghasilkan bayangan $A'(x', y')$ ditulis dengan
     $$A(x, y) \xrightarrow{M_x} A'(x', y')$$
     Bentuk matriks refleksi $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
     Dapat dituliskan refleksi dari $A(x, y)$ terhadap sumbu x adalah $A'(x, -y)$.
     b. Titik $A(x,y)$ direfleksikan terhadap sumbu y menghasilkan bayangan $A'(x',y')$ ditulis dengan

$$A(x, y) \xrightarrow{M_y} A'(x', y')$$

Bentuk matriks refleksi $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Dapat dituliskan refleksi dari $A(x,y)$ terhadap sumbu y adalah $A'(-x,y)$

4. Dilatasi adalah transformasi yang mengubah jarak dari titik-titik dengan faktor pengali tertentu terhadap suatu titik tertentu.
   - Titik (x,y) didilatasikan dengan faktor skala k terhadap titik pusat (0,0), kemudian menghasilkan bayangan di titik (x',y'), maka persamaan umum dalam bentuk matriks dapat dituliskan sebagai berikut.
   $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
   - Titik (x,y) didilatasikan dengan faktor skala k terhadap titik pusat (a,b), kemudian menghasilkan bayangan di titik (x',y'), maka persamaan umum dalam bentuk matriks dapat dituliskan sebagai berikut.
   $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$
5. Rotasi adalah transformasi yang memindahkan titik-titik pada suatu daerah dengan cara memutar titik-titik tersebut sejauh α terhadap suatu titik tertentu. Rotasi pada suatu bidang ditentukan oleh beberapa hal:
   - titik pusat rotasi
   - besar sudut rotasi
   - arah sudut rotasi
     a. Jika arah rotasi diputar searah jarum jam maka besar sudut rotasinya negatif $(-\alpha)$.
     b. Jika arah rotasi diputar berlawanan arah jarum jam maka besar sudut rotasinya positif.
   - jenis rotasi
     a. Jika koordinat titik semula akan dirotasikan dengan besar sudut terhadap pusat akan menghasilkan bayangan
     $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
     b. Jika koordinat titik semula $A(x,y)$ akan dirotasikan dengan besar sudut α terhadap pusat (a,b) akan menghasilkan bayangan
     $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

A. Translasi

Ayo Bereksplorasi

Guru mengajak siswa untuk mengamati gambar grafik fungsi linear yang menunjukkan pergeseran grafik fungsi linear secara vertikal dan horizontal. Guru diharapkan dapat menyajikan gambar grafik fungsi yang lain, misalkan grafik fungsi kuadrat dan grafik fungsi eksponensial yang mengalami pergeseran. Kegiatan ini bertujuan untuk menggali dan meningkatkan rasa ingin tahu siswa dalam menentukan pergeseran suatu fungsi (translasi) yang ditunjukkan dengan perbedaan konstanta.

Subbab translasi terbagi menjadi translasi vertikal dan horizontal. Guru diharapkan memberikan pengarahan dan pemahaman kepada siswa melalui contoh dan kegiatan yang ada pada subbab ini. Tunjukkan bentuk umum terkait transformasi translasi kepada siswa.

- Titik $A(x,y)$ ditranslasikan oleh $T(a\ b)$ menghasilkan bayangan $A'(x',y')$ ditulis dengan
$$A(x,\ y) \xrightarrow{T(a\ b)} A'(x',\ y')$$
- Bentuk matriks translasi $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$
- $T(a\ b)$ disebut sebagai komponen translasi, dengan konstanta a adalah pergeseran secara horizontal dan b adalah pergeseran secara vertikal.

1. Translasi Vertikal

Definisi 1.1

Grafik $y = f(x) + b$ adalah hasil translasi dari $y = f(x)$ oleh $\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$.

Pada translasi $y = f(x) + b$, berlaku:
untuk b > 0, maka grafik bergeser **ke atas**
untuk b < 0, maka grafik bergeser **ke bawah**
sehingga translasi $y = f(x) + b$ disebut sebagai bentuk **Pergeseran Vertikal**.

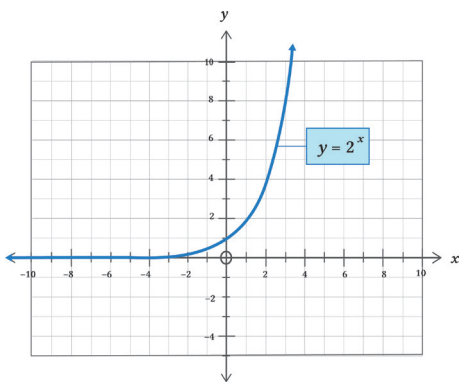
Ayo Berpikir Kritis

Andi melakukan percobaan mengamati bakteri selama beberapa waktu, yang hasil percobaannya dimodelkan dalam grafik $y = 2^x$. Setelah mengalami perlakuan, hasil bakteri yang diamati berubah dan membentuk model grafik $y = 2^{x+1}$. Berdasarkan gambar kedua grafik tersebut, apakah grafik mengalami pergeseran ke atas atau ke bawah dari grafik fungsi $y = 2^x$?

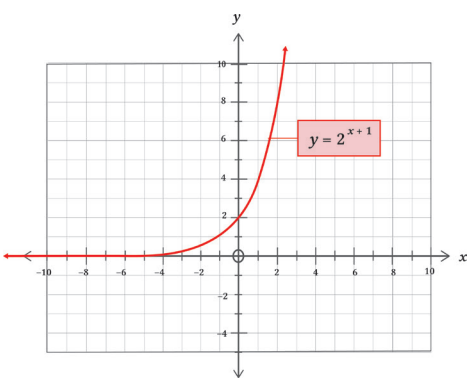
Guru dapat mengaitkan masalah bakteri dengan keanekaragaman hayati yang ada di sekitar kita dalam praktek kesadaran lingkungan.

Petunjuk Guru untuk kegiatan Ayo Berpikir Kritis

1. Berikan kesempatan dan waktu kepada siswa untuk mengamati kegiatan Ayo Berpikir Kritis. Ajak siswa agar berpasangan dalam kegiatan ini untuk lebih meningkatkan pemahaman satu sama lain.
2. Guru dapat memberikan ilustrasi terkait gambar grafik pada kegiatan Ayo Berpikir Kritis sebagai bentuk visualisasinya, kemudian ajaklah pasangan dari setiap siswa untuk menyusun argumen dan penjelasannya. Berikut ilustrasi gambar grafiknya.



Gambar 1.3 Grafik Fungsi $y = 2^x$



Gambar 1.4 Grafik Fungsi $y = 2^{x+1}$

3. Tunjukkan kepada siswa kedua gambar tersebut, kemudian ajaklah siswa untuk mengamati dan berikan stimulus untuk berpikir kritis.

   Tugas guru memberikan ilustrasi gambar lainnya terkait pergeseran, utamanya pada fungsi linear, fungsi kuadrat, dan fungsi eksponensial.

4. Alternatif yang dapat digunakan dalam menampilkan ilustrasi adalah
   a. Perhatikan bentuk grafik yang digambar.
   b. Perhatikan perbedaan konstanta dengan perbedaan yang terjadi, apakah pergeseran tersebut ke atas atau ke bawah?
5. Instruksikan kepada setiap pasangan untuk mempresentasikan hasil diskusinya, dilanjutkan memberikan kesimpulan.

2. Translasi Horizontal

Ayo Bereksplorasi

Guru mengajak siswa untuk melakukan kegiatan eksplorasi melalui pengamatan gambar. Pada Gambar 1.7 (Buku Siswa) ditunjukkan gambar grafik dari suatu fungsi yang mengalami pergeseran ke atas dan ke kiri. Siswa diajak untuk memperhatikan perbedaan fungsi dan gambar grafik fungsi yang terbentuk. Tujuan kegiatan ini adalah untuk memberikan pancingan kepada siswa dalam memahami translasi fungsi secara horizontal. Guru diharapkan dapat menunjukkan gambar lain untuk meningkatkan pemahaman siswa.

Definisi 1.2

Grafik $y = f(x) - a$ adalah hasil translasi dari $y = f(x)$ oleh $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$.

Pada translasi $y = f(x - a)$, berlaku:

untuk $a > 0$, maka grafik bergeser **ke kanan**

untuk $a < 0$, maka grafik bergeser **ke kiri**

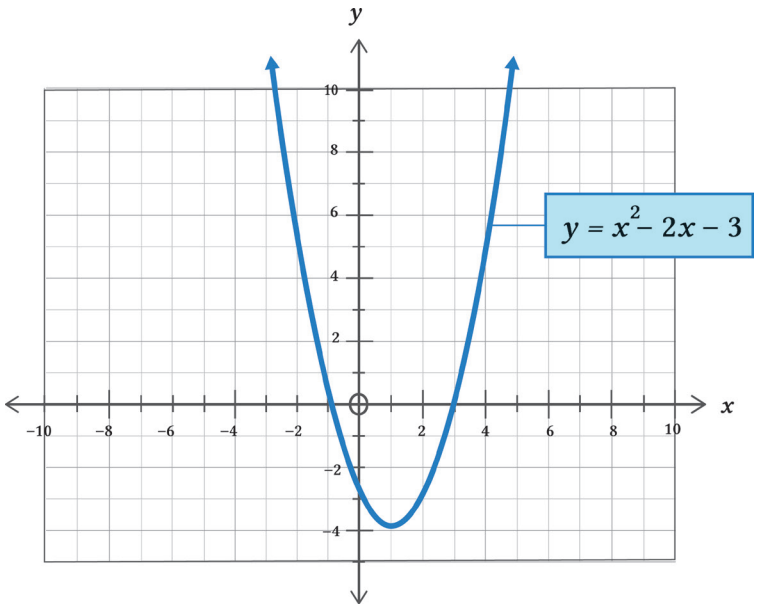
sehingga translasi $y = f(x - a)$ disebut sebagai bentuk **Pergeseran Horizontal.**

Ayo Berpikir Kreatif

Translasi dari fungsi $f(x) = (x + 1)(x - 3)$ oleh $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ untuk $a = -3$ adalah ke kiri, sedangkan oleh $\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$ untuk $b = 2$ adalah ke atas. Tentukan nilai a dan b yang lain, jika $f(x) = (x + 1)(x - 3)$ ditranslasi masing-masing ke bawah, ke kanan, ke atas, dan kekiri.

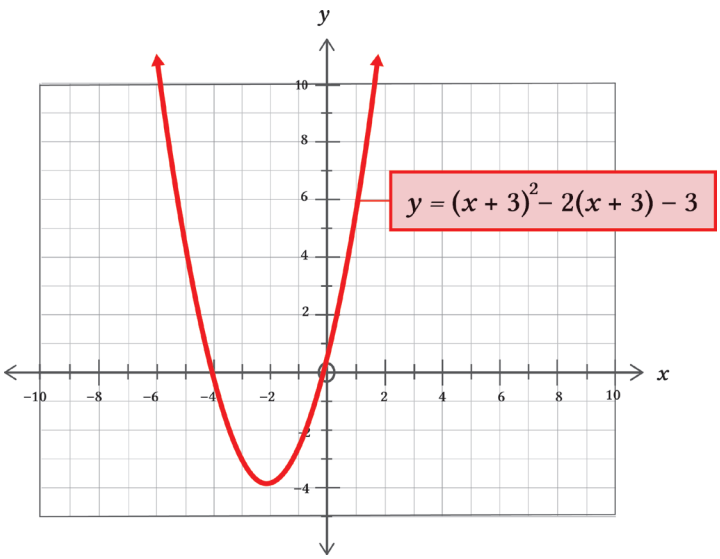
Pada kegiatan Ayo Berpikir Kreatif, guru diharapkan dapat memancing siswa untuk meningkatkan kreativitas siswa melalui langkah berikut:

1. Guru meminta siswa untuk membuat grafik fungsi kemudian siswa diminta memperhatikan penggunaan definisi 1.1 dan definisi 1.2 dalam kegiatan Ayo Berpikir Kreatif.
2. Secara lebih detail, terkait langkah-langkah dalam kegiatan ini sepenuhnya diberikan kepada guru dalam menyelesaikannya. Sebagai petunjuk, guru dapat memperhatikan ilustrasi gambar fungsi $f(x) = (x + 1)(x - 3)$ atau dapat dituliskan $y = x^2 - 2x - 3$
   a. Grafik $y = x^2 - 2x - 3$



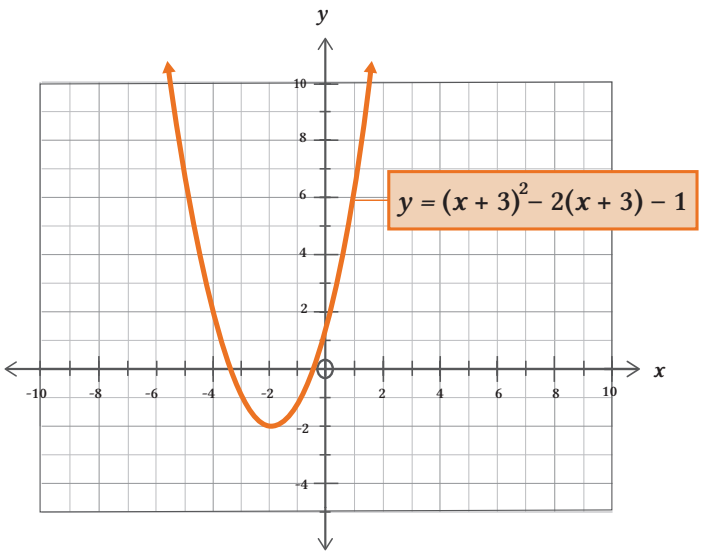
Gambar 1.5 Grafik Fungsi $y = x^2 - 2x - 3$

b. Selanjutnya, $y = x^2 - 2x - 3$ ditranslasi oleh $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ untuk $a = -3$ sehingga grafik bergeser ke kiri.



Gambar 1.6 Grafik Fungsi $y = (x + 3)^2 - 2(x + 3) - 3$

c. Grafik hasil translasinya adalah $y = (x + 3)^2 - 2(x + 3) - 3$. Grafik tersebut ditranslasikan oleh $\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$ untuk $b = 2$, maka grafiknya bergeser ke atas menjadi $y = (x + 3)^2 - 2(x + 3) - 1$.



Gambar 1.7 Grafik $y = (x + 3)^2 - 2(x + 3) - 1$

Alternatif penyelesaian yang dapat digunakan adalah dengan memperhatikan Definisi 1.1 dan Definisi 1.2.

d. Selanjutnya, guru diharapkan dapat mempertegas kegiatan Ayo Berpikir Kreatif siswa supaya hasil kegiatan dapat maksimal dengan memperhatikan pergeseran pada konstanta jika pergeserannya ke arah yang lain sesuai dengan perintah.

e. Siswa diminta untuk membuat kesimpulan.

Ayo Berpikir Kritis

Pak Ahmad menentukan hasil translasi dari fungsi eksponen $y = 2^x$ ke kanan sejauh 2 satuan menjadi $y = 2^{x-2}$ sehingga Pak Ahmad menyimpulkan bahwa definisi 1.2 pasti berlaku pada setiap fungsi eksponen seperti $y = 2^x$. Setujukah kalian dengan kesimpulan Pak Ahmad?

Petunjuk Guru untuk kegiatan Ayo Berpikir Kritis

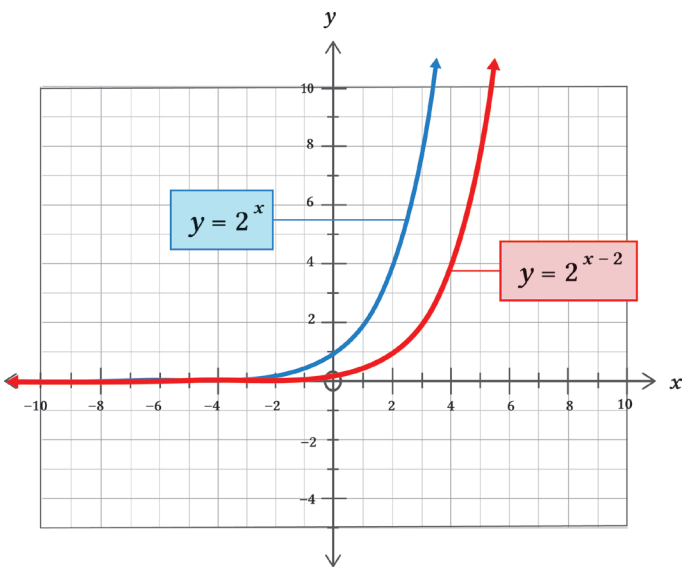
1. Guru menginformasikan kepada siswa terkait permasalahan. Berdasarkan pertanyaan setuju dan tidak setuju, daftarlah siswa yang menjawab setuju dan tidak setuju. Selanjutnya, kelompokkan siswa berdasarkan kesamaan pilihan jawaban. Ajaklah siswa untuk membuat penjelasan dari pilihan jawaban yang sudah dibuat terkait kesimpulan dari Pak Ahmad.
2. Guru memberikan stimulus melalui visualisasi grafik yang sesuai, kemudian meminta siswa untuk menganalisis dan menjelaskan temuannya. Berikan informasi tambahan terkait bentuk grafik fungsi eksponensial dengan mengajak siswa mengingat kembali materi fungsi eksponen yang sebelumnya sudah dipelajari.
3. Ajaklah siswa untuk berpikir melalui beberapa pertanyaan pancingan:
   a. Apakah bentuk fungsi eksponen $y = a^x$, untuk x positif dan x memiliki gambar yang sama?

b. Bagaimana bentuk pergeseran ketika konstanta sama pada kedua grafik fungsi eksponen tersebut?

c. Apakah berlaku definisi yang sudah dipelajari sebelumnya? Jika tidak berlaku, berikan alasanmu!

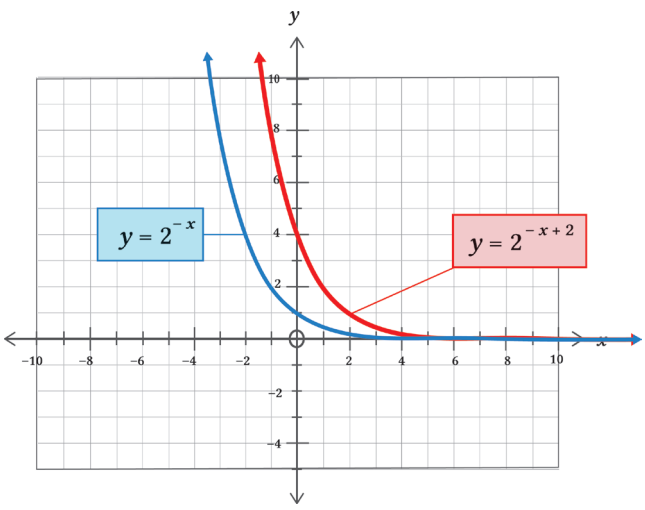
4. Sebagai petunjuk guru, berikut ditunjukkan gambar grafik eksponen:

a. Gambar grafik $y = 2^x$



Gambar 1.8 Grafik Fungsi Eksponen $y = 2^x$ Ditranslasi 2 Satuan ke Kanan

b. Gambar grafik $y = 2^{-x}$



Gambar 1.9 Grafik Fungsi Eksponen $y = 2^{-x}$ Ditranslasi 2 Satuan ke Kanan

Berdasarkan gambar grafik fungsi eksponen pada poin a dan b, guru mengajak siswa untuk membandingkan kedua gambar tersebut. Siswa diminta menjelaskan argumennya.

5. Guru memberikan penguatan terkait kegiatan Ayo Berpikir Kritis dengan membandingkan dua gambar tersebut. Berikut ditunjukkan catatan yang dapat digunakan oleh guru.

Grafik $y = f(x - a)$ adalah hasil translasi dari $y = f(x)$ oleh $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$.

Pada translasi $y = f(x - a)$, berlaku:
Jika bentuk umum fungsi eksponen adalah $y = e^{(f(x) + g)} + h$, maka
$f > 0$ **(positif)**
untuk $a > 0$, maka grafik bergeser **ke kanan**
untuk $a < 0$, maka grafik bergeser **ke kiri**
$f < 0$ **(negatif)**
untuk $a > 0$, maka grafik bergeser **ke kiri**
untuk $a < 0$, maka grafik bergeser **ke kanan**
sehingga translasi $y = f(x - a)$ disebut sebagai bentuk **Pergeseran Horizontal**.

Ayo Berkomunikasi

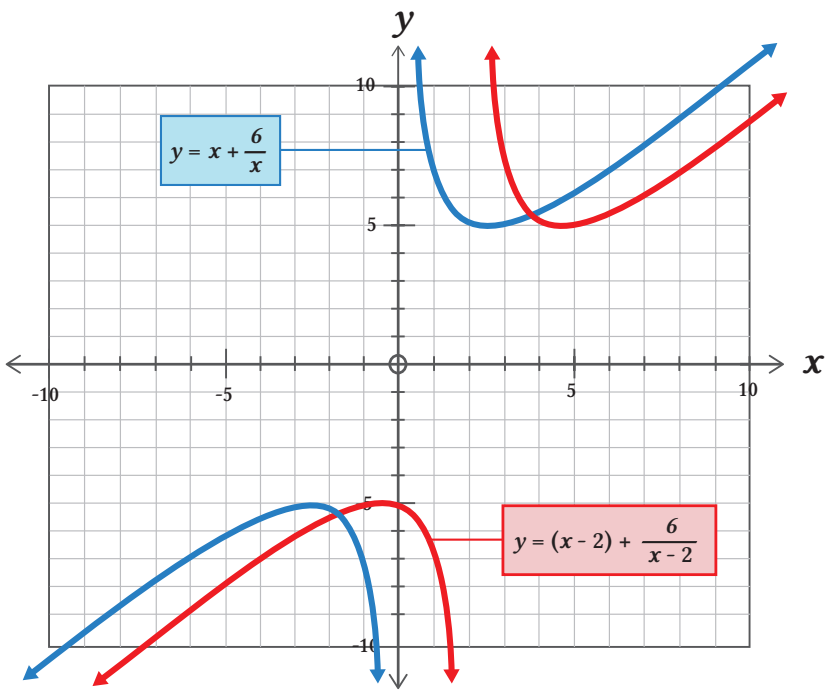
Jika suatu fungsi $y = x - 2 + \frac{6}{x-2}$ adalah hasil translasi dari fungsi $y = x + \frac{6}{x}$. Tentukan matriks transformasinya (gunakan gambar supaya lebih paham).

Diskusikan dengan temanmu dan sampaikan hasilnya kepada teman lain.

Petunjuk Guru untuk kegiatan Ayo Berkomunikasi

1. Instruksikan kepada siswa untuk membuat kelompok dengan anggota masing-masing kelompok sesuai dengan kebutuhan.
2. Berikan informasi kepada setiap kelompok terkait permasalahan dalam kegiatan Ayo Berkomunikasi.
3. Biarkan kelompok berdiskusi dan fasilitasi jika terdapat kelompok yang mengalami kesulitan.
4. Berikan kesempatan kepada kelompok untuk menjelaskan hasil diskusinya kepada kelompok lain.
5. Berikan kesempatan kepada kelompok lain untuk menyampaikan hasil temuan yang berbeda.
6. Buat kesimpulan bersama dengan kelompok.

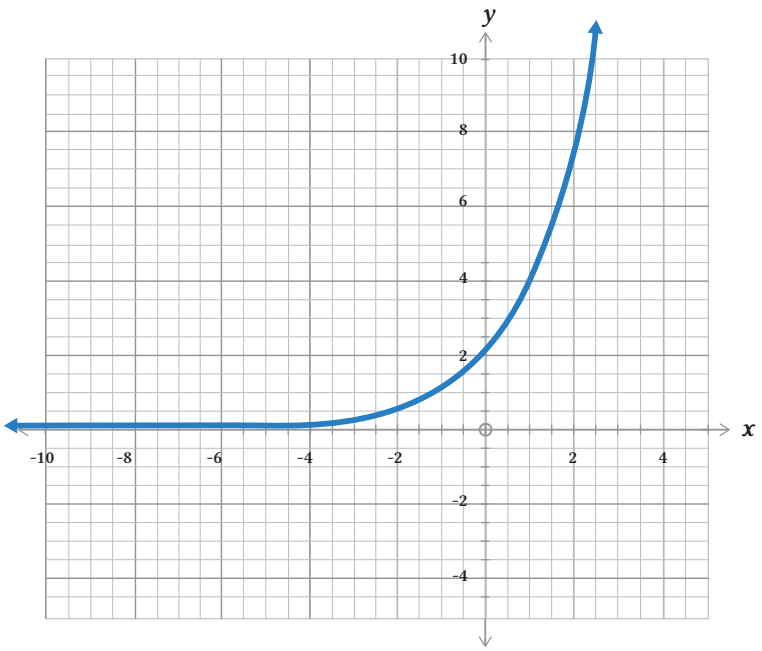
Selama proses kegiatan Ayo Berkomunikasi, guru dapat menunjukkan ilustrasi yang berbeda terkait translasi. Berikut ilustrasi yang dapat digunakan sebagai acuan.



Gambar 1.10 Translasi Fungsi $y = x + \frac{6}{x}$

Latihan 1.1

1. Tentukan hasil translasi dari fungsi berikut!
   a. $y = 2x^2$ yang ditranslasi oleh $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$
   b. $y = 3x^2 - 2$ yang ditranslasi oleh $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
   c. $y = \frac{2}{x}$ yang ditranslasi oleh $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$
2. Tentukan translasi dari transformasi berikut!
   a. $y = x^2 + 3x - 4$ menjadi grafik $y = x^2 + 3x + 4$
   b. $y = 3^x + 4$ menjadi grafik $y = 3^{(x+2)} + 6$
3. Diketahui grafik $y = f(x)$



   Buatlah gambar grafik dari translasi berikut.
   a. $y = f(x) - 2$
   b. $y = f(x + 3)$
   c. $y = f(x - 1) + 4$
4. Tentukan bayangan dari fungsi $y = |x| + 2x$ yang ditranslasi oleh $\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ dalam beberapa alternatif penyelesaian!

Ayo Berpikir Kritis

5. Hasil translasi dari suatu fungsi $y^2 = x$ yang mengalami pergeseran 2 satuan ke kanan ke arah sumbu x positif menjadi $y^2 = x - 2$. Berdasarkan Definisi 1.1 dan Definisi 1.2, berikan penjelasan kalian!

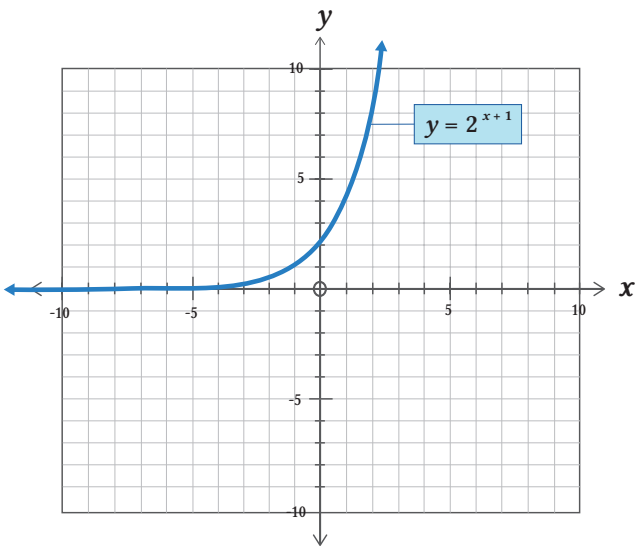
Alternatif penyelesaian:

1. Tentukan hasil translasi dari fungsi berikut!
   a. $y = 2x^2$ yang ditranslasi oleh $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, karena translasi oleh $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ akan menggeser $f(x)$ 2 satuan ke kanan dan 4 satuan ke atas, maka hasil translasinya adalah $y = 2x^2 + 2$.
   b. $y = 3x^2 - 2$ yang ditranslasi oleh $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, karena translasi oleh $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ maka akan menggeser $f(x)$ ke kanan sejauh 2 satuan, dan ke atas sejauh 3 satuan, maka hasil translasinya adalah $y = 3(x - 2)^2 - 2 + 3$.
   $y = 3(x - 2)^2 - 2 + 3$
   $y = 3(x^2 - 4x) + 1$
   c. $y = \frac{2}{x}$ yang ditranslasi oleh $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, karena translasi oleh $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ akan menggeser $f(x)$ ke kanan sejauh 3 satuan, maka hasil translasinya adalah $y = \frac{2}{x-3}$.

2. Tentukan translasi dari transformasi berikut!
   a. $y = x^2 + 3x - 4$ menjadi grafik $y = x^2 + 3x + 4$
   b. $y = x^2 + 6x$ menjadi grafik $y = (x + 3)^2 + 6(x + 3)$

3. Diketahui grafik $y = f(x)$

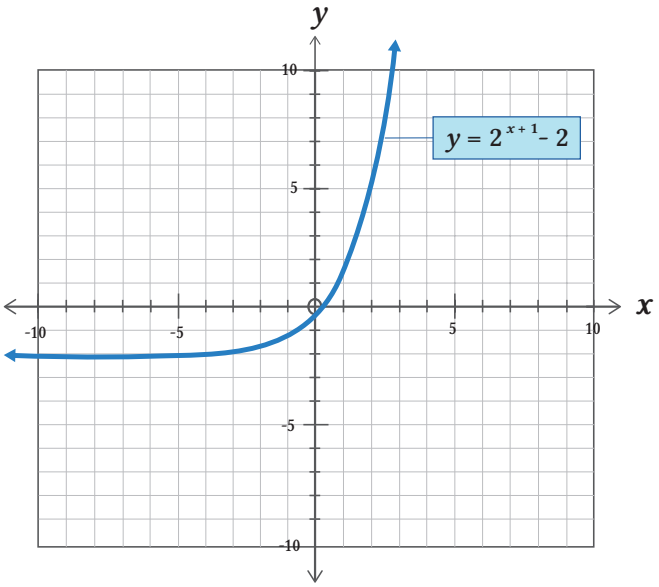
Grafik $y = f(x)$ adalah $y = 2^{x+1}$



Jadi, hasil dari translasi berikut dan gambar grafiknya adalah

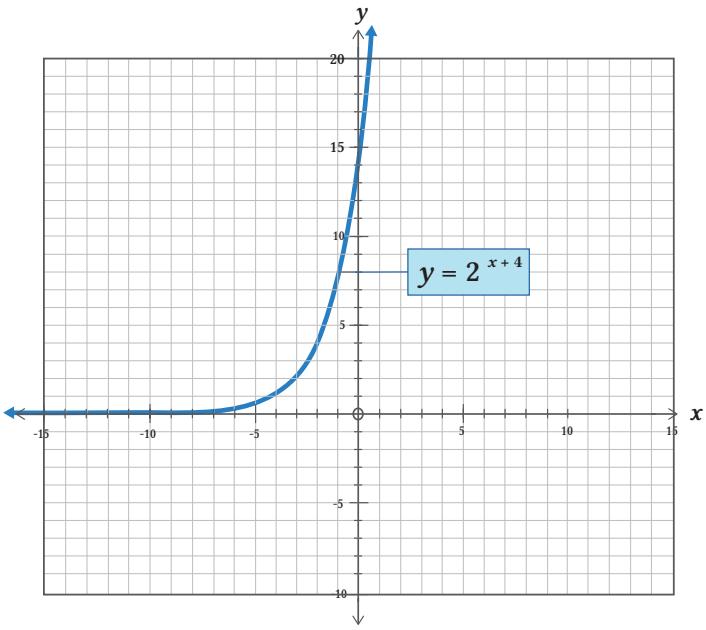
a. $y = f(x) - 2$

$y = 2^{x+1} - 2$



b. $y = f(x + 3)$

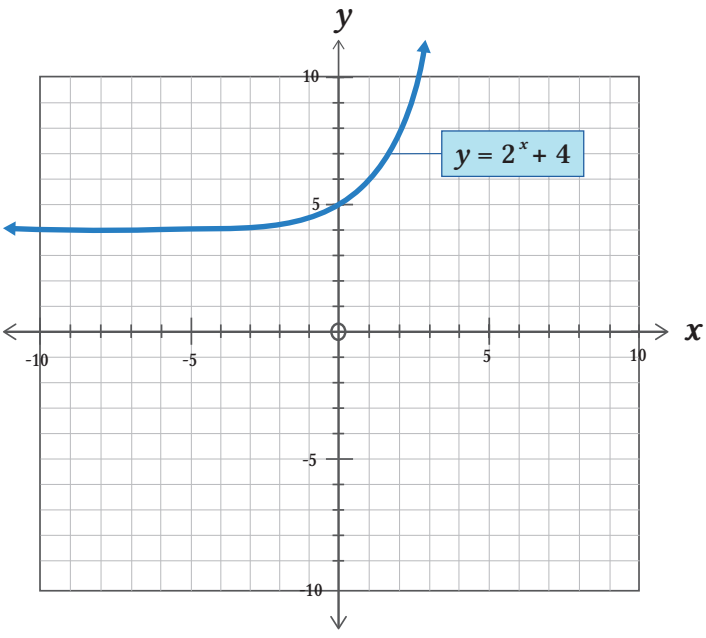
$y = 2^{x+4}$



c. $y = f(x - 1) + 4$

$y = 2^{(x+1-1)} + 4$

$y = 2^x + 4$



B. Refleksi

Ayo Bereksplorasi

Guru mengajak siswa untuk mengamati gambar terkait penerapan pencerminan dalam kehidupan sehari-hari. Kegiatan ini bertujuan untuk memberikan pendorong dan memotivasi siswa untuk meningkatkan rasa ingin tahu terkait refleksi (pencerminan). Selanjutnya, guru menunjukkan pemodelan yang ada pada Gambar 1.7 (pada Buku Siswa) dan siswa diminta menyusun argumen serta meminta salah satu siswa untuk menjelaskan temuannya.

Ayo Mengingat Kembali

Guru mengajak siswa mengulas kembali submateri refleksi (pencerminan) yang sudah dipelajari sebelumnya, seperti berikut.

i. Jika titik $A(x,y)$ dicerminkan terhadap sumbu x, maka akan menghasilkan bayangan $A'(x,-y)$

ii. Jika titik $A(x,y)$ dicerminkan terhadap sumbu y, maka akan menghasilkan bayangan $A'(-x,y)$

1. Refleksi Vertikal

Guru menjelaskan materi refleksi pada fungsi dengan menunjukkan beberapa gambar grafik. Siswa diajak untuk mengamati dan menganalisis gambar yang diberikan melalui penjelasan guru. (*Guru dapat menggunakan software pembantu seperti* https://tinyurl.com/TransformasiFungsi1 *yang dapat memaksimalkan dalam menjelaskan materi kepada sisiwa.*)

Definisi 1.3

Grafik $y = -f(x)$ adalah hasil refleksi dari $y = f(x)$ terhadap sumbu x.

Ayo Mencoba

$f(x) = (x + 1)(x - 2)$. Gambarlah grafik berdasarkan fungsi berikut!

a. $-f(x)$ b. $-f(x + 3)$

Pada kegiatan Ayo Mencoba, guru membagi siswa menjadi beberapa kelompok yang heterogen. Kegiatan ini bertujuan untuk memberikan kesempatan kepada setiap siswa untuk membuktikan permasalahan dan menemukan hasil pengamatannya. Guru dapat menggunakan tautan https://tinyurl.com/AyoMencoba1 untuk memudahkan dalam memberikan instruksi kepada siswa.

Ayo Menggunakan Teknologi

Kunjungi

https://tinyurl.com/AyoMencoba1

untuk lebih memaksimalkan dalam pemahaman terkait gambar fungsi dan transformasinya pada kegiatan Ayo Mencoba.

2. Refleksi Horizontal

Definisi 1.2

Grafik $y = f(-x)$ adalah hasil refleksi dari $y = f(x)$ terhadap sumbu y.

Ayo Berkomunikasi

Guru memberikan instruksi kepada siswa untuk berkelompok, selanjutnya setiap kelompok siswa diberikan permasalahan yang harus diselesaikan dengan berdiskusi bersama temannya pada kegiatan Ayo Berkomunikasi. Kegiatan ini bertujuan untuk meningkatkan pemahaman kepada siswa terkait refleksi pada fungsi dan juga titik-titik yang termuat di dalam grafik fungsi tersebut.

Petunjuk Guru untuk kegiatan Ayo Berkomunikasi

1. Guru memberikan instruksi kepada siswa untuk menggambar koordinat kartesius yang memuat titik $P(-3,5)$ dan titik $Q(-2,-8)$. Ajaklah siswa untuk menganalisis titik-titik tersebut.
2. Berikan waktu kepada siswa untuk mengobservasi dan menganalisis tugas yang diberikan.
3. Tunjuk salah satu siswa atau berikan kesempatan kepada siswa untuk menyampaikan hasil analisisnya. Berikan kesempatan kepada siswa lain untuk menyampaikan hasil analisis yang berbeda atau jika terdapat penjelasan yang disampaikan oleh siswa sebelumya belum maksimal.
4. Ajak siswa untuk menyimpulkan penjelasan yang disampaikan oleh beberapa siswa.

Setiap grafik fungsi pasti memuat titik. Jika titik $P(-3,5)$ dan titik $Q(-2,-8)$ terletak pada grafik fungsi $y = f(x)$, tentukan titik koordinat P dan Q setelah grafik tersebut mengalami transformasi berdasarkan

a. $f(-x)$

b. $-f(x)$

c. $f(-x + 1)$

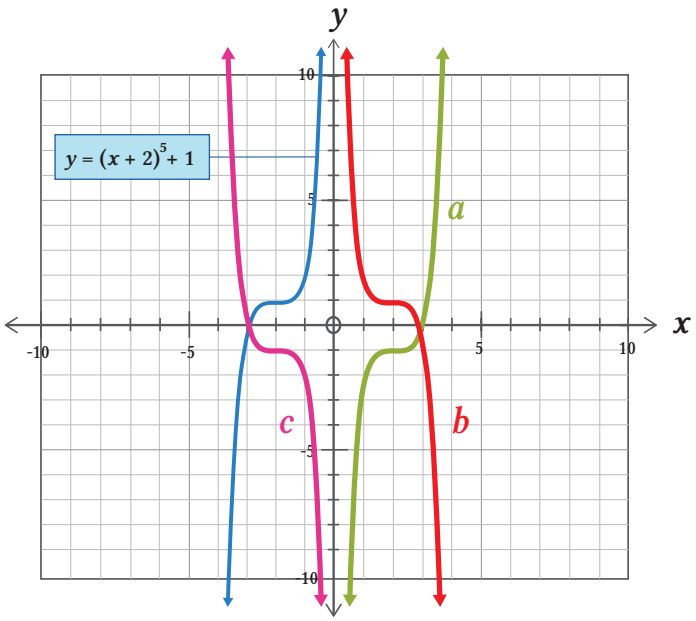
d. $-f(x) + 5$

Diskusikan dengan temanmu dan komunikasikan hasilnya.

Latihan 1.2

1. Jika $y = x^2 + 2x - 1$, tentukan fungsi yang dihasilkan dari
   a. $y = -f(x)$
   b. $y = -f(-x)$
2. Diketahui $f(x) = x(x + 1)(x - 2)$, gambarlah grafik fungsi berdasarkan
   a. $1 + f(-x)$
   b. $-f(x + 5)$
3. **Ayo Berpikir Kreatif**

   Terdapat suatu grafik fungsi $y = (x + 2)^4 + 1$. Jika grafik fungsi tersebut direfleksikan secara horizontal dan vertikal, bagaimana prosedur menentukan hasil refleksinya? Tunjukkan prosedur yang bervariasi!
4. Tentukan persamaan grafik setelah diberikan transformasi berikut!
   a. $y = 2x^4$ setelah direfleksikan terhadap sumbu x.
   b. $y = 2^{x+1} - 3$ setelah direfleksikan terhadap sumbu y.
   c. $y = 3^{-x} + 1$ setelah direfleksikan terhadap sumbu x.
5. Diketahui suatu fungsi $y = f(x)$ seperti gambar di bawah ini.



Tunjukkan fungsi yang ditunjukkan pada grafik a, b, dan c.

Alternatif penyelesaian:

1. Jika $y = x^2 + 2x - 1$, tentukan fungsi yang dihasilkan dari

   $y' = -f(x)$

   $y' = -x^2 - 2x + 1$

   $y' = -f(-x)$

   $y' = -((-x)^2 - 2(-x) - 1)$

   $y' = -(x^2 + 2x - 1)$

   $y' = -x^2 - 2x + 1$

2. Diketahui $f(x) = x(x + 1)(x - 2)$, gambarlah grafik fungsi berdasarkan

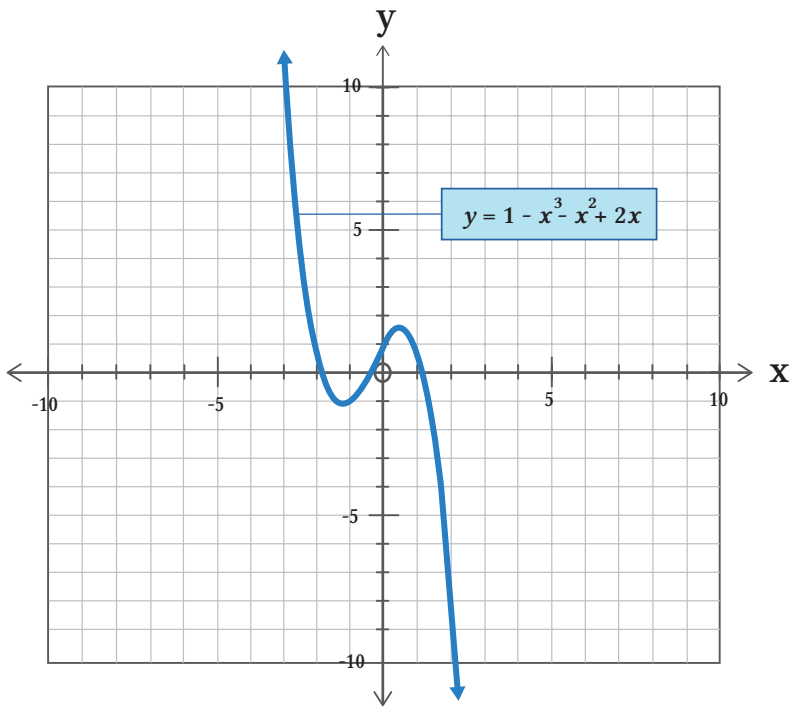
   $f(x) = x(x + 1)(x - 2)$

   $y = x^3 - x^2 - 2x$, maka

   a. $1 + f(-x)$

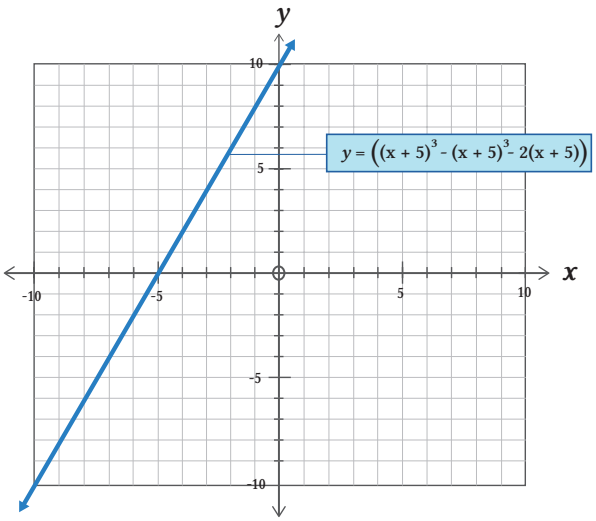
      $y' = 1 + (-x)^3 - (-x)^2 - 2(-x)$

      $y' = 1 - x^3 - x^2 + 2x$



b. $-f(x+5)$

$y' = -((x+5)^3 - (x+5)^2 - 2(x+5))$



3. Tentukan persamaan grafik setelah diberikan transformasi berikut!

a. $y = 2x^4$ setelah direfleksikan terhadap sumbu x

Menggunakan = $f(x) \longrightarrow y = -f(x)$ sehingga

$y = 2x^4$

$y' = -(2x^4)$

b. $y = 2x^2 - 3x + 1$ setelah direfleksikan terhadap sumbu y

Menggunakan = $f(x) \longrightarrow y = f(-x)$ sehingga

$y = 2(-x)^2 - 3(-x) + 1$

c. $y = 5 + 2x - 3x^2$ setelah direfleksikan terhadap sumbu x

$y = 3x^2 - 2x - 5$

C. Dilatasi

1. Dilatasi Vertikal

Guru menjelaskan submateri terkait dilatasi pada fungsi.

(*Pelaksanaan dan penjelasan terkait submateri diserahkan kepada guru yang menyampaikan*). Selanjutnya, guru memberikan penguatan terkait definisi dilatasi pada fungsi.

Definisi 1.5

Grafik $y = kf(x)$ adalah hasil dilatasi dari $y = f(x)$ dengan faktor k yang sejajar sumbu y.

Pada $y = kf(x)$ berlaku:

Jika $k > 1$, maka grafik $y = kf(x)$ adalah grafik $y = f(x)$ yang diperbesar secara vertikal dengan mengalikan setiap koordinat y dengan k.

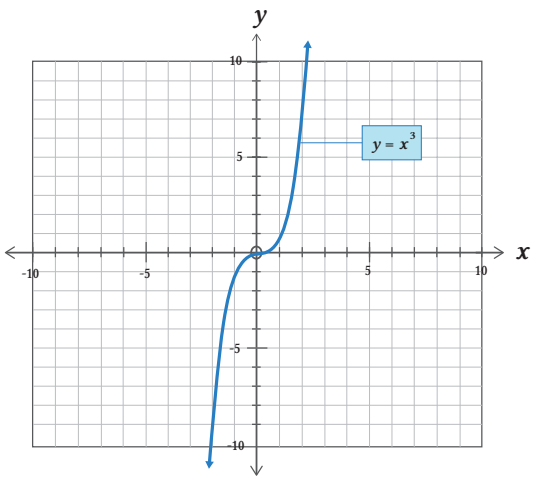
Jika $0 < k < 1$, maka grafik $y = kf(x)$ adalah grafik $y = f(x)$ yang diperkecil secara vertikal dengan mengalikan setiap koordinat y dengan k.

Ayo Berpikir Kritis

Grafik $y = 4x^3$ adalah hasil dilatasi dari $f(x) = x^3$. Jika k adalah konstanta untuk $k \leq 0$, setujukah kalian bentuk $y = kf(x)$ sebagai dilatasi dari $y = f(x)$?

Petunjuk Guru untuk kegiatan Ayo Berpikir Kritis

1. Guru memberikan stimulus kepada siswa untuk mengawali kegiatan dengan menunjukkan grafik fungsi $y = x^3$ seperti berikut.



Gambar 1.11 Grafik Fungsi

2. Daftarlah siswa yang memilih setuju dan tidak setuju terkait permasalahan pada kegiatan tersebut. Selanjutnya, ajaklah siswa untuk berpikir dan menalar dengan tetap memfasilitasi siswa jika ada yang mengalami kesulitan.
3. Berikan kesempatan kepada siswa untuk menyusun argumen dalam menjelaskan hasil pengamatan tersebut.
4. Tunjuk salah satu siswa atau berikan kesempatan kepada siswa untuk menyampaikan argumennya.

Pada permasalahan dalam kegiatan Ayo Berpikir Kritis, hasil translasi dari $y = x^3$ adalah $y = 4x^3$. Dengan memperhatikan bentuk umum, guru dapat menentukan alternatif lain sebagai perbandingan dan referensi sebagai upaya meningkatkan berpikir kritis siswa.

2. Dilatasi Horizontal

Guru menyampaikan submateri dilatasi horizontal melalui model dan strategi pembelajaran yang menarik dan melibatkan aktivitas siswa.

Definisi 1.6

Grafik $y = f(kx)$ adalah hasil dilatasi dari $y = f(x)$ dengan faktor k yang sejajar sumbu x.

Pada $y = f(kx)$ berlaku:

Jika $k > 1$, maka grafik $y = f(kx)$ adalah grafik $y = f(x)$ yang diperkecil secara horizontal dengan membagi setiap koordinat x dengan k.

Jika $0 < k < 1$, maka grafik $y = f(x)$ adalah grafik $y = f(x)$ yang diperbesar secara horizontal dengan membagi setiap koordinat x dengan k.

Penguatan Karakter

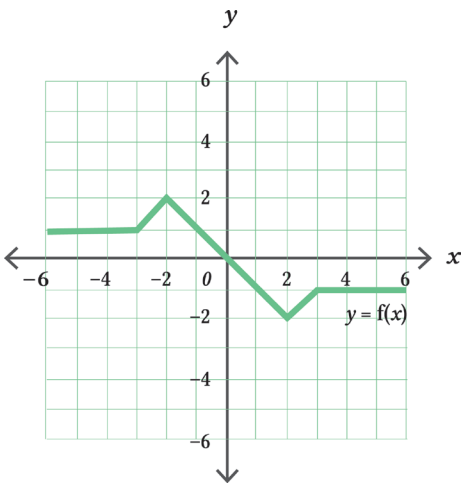
Guru mengajak siswa untuk memahami bagian dari "Penguatan Karakter" yang disajikan pada Buku Siswa agar materi yang telah dibahas ini dapat menumbuhkembangkan karakter siswa dalam berkehidupan, kepribadian, berkebinekaan, cinta budaya, cinta hasil karya anak bangsa, dan cinta tanah air.

Latihan 1.3

1. Diketahui $f(x) = x^3$. Tentukan hasil dilatasi dari fungsi berikut!
   a. $y = 6f(x)$
   b. $y = f(4x)$

Ayo Mencoba

2. Diketahui suatu fungsi $y = f(x)$ yang ditunjukkan pada gambar di bawah.



   Gambarlah grafik lain berdasarkan fungsi berikut!
   a. $y = 3f(x)$
   b. $y = f(2x)$

3. Tentukan persamaan setiap grafik setelah diberikan transformasi!
   a. $y = 3x^2$ setelah dilatasi sejajar sumbu y dengan skala 2
   b. $y = x^3 - 1$ setelah dilatasi sejajar sumbu y dengan skala 3
   c. $y = 4^x + 6$ setelah dilatasi sejajar sumbu y dengan skala $\frac{1}{2}$

4. Tunjukkan transformasi yang memetakan fungsi berikut!
   a. $y = x^2 + 2x - 5$ menjadi grafik $y = 4x^2 + 4x - 10$
   b. $y = x^2 - 3x + 2$ menjadi grafik $y = 3x^2 - 9x + 6$
   c. $y = 2^x + 1$ menjadi grafik $y = 2^{x+1} + 2$

Alternatif penyelesaian:

1. Diketahui $f(x) = x^3$. Tentukan hasil dilatasi dari fungsi berikut!

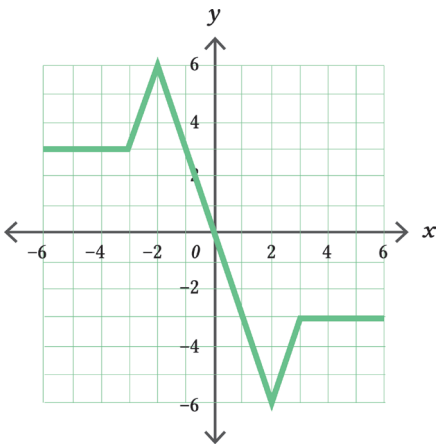
   a. $y = 6f(x)$

   $y' = 6x^3$

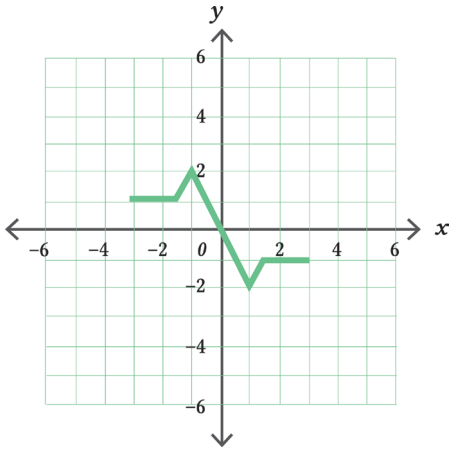
   b. $y = f(4x)$

   $y' = (4x)^3 = 64x^3$

2. a. $y = 3f(x)$



   b. $y = f(2x)$



3. Bentuk transformasi dilatasi menggunakan aturan $y = kf(x)$ dan atau $y = f(kx)$ sehingga:

   b. $y = x^3 - 1$ didilatasi sejajar sumbu y dengan skala 3, maka

   $y' = 3(x^3 - 1)$

   $y' = 3x^3 - 3$

   Jadi, bayangannya adalah $y' = 3x^3 - 3$.

   c. $y = 4^x + 6$ didilatasi sejajar sumbu y dengan skala $\frac{1}{2}$

   $y' = \frac{1}{2}(4^x + 6)$

   $y' = \frac{1}{2}(4^x + 6)$

   $y' = 2^x + 3$

   Jadi, bayangannya adalah $y = 2^x + 3$.

4. Karena dilatasi sejajar dengan sumbu x, maka menggunakan aturan $y = f(kx)$ sehingga

a. $y = x^2 + 2x - 5$ menjadi grafik $y = 4x^2 + 4x - 5$, maka

$y' = 4x^2 + 4x - 5$

$y' = (2x)^2 + 2(2x) - 5$

Karena $x = 2x$, sehingga

y' adalah hasil dilatasi yang sejajar sumbu x dengan skala $\frac{1}{2}$.

b. $y = x^2 - 3x + 2$ menjadi grafik $y = 3x^2 - 9x + 6$

$y' = 3x^2 - 9x + 6$

$y' = 3(x^2 - 3x + 2)$

Karena $y = 3f(x)$ sehingga

y' adalah hasil dilatasi yang sejajar sumbu x dengan skala 3.

D. Rotasi

Guru menyampaikan submateri transformasi rotasi melalui model dan strategi pembelajaran yang menarik dan melibatkan aktivitas siswa.

Definisi 1.7

Jika koordinat titik semula $A(x,y)$ akan dirotasikan dengan besar sudut α terhadap pusat $(0,0)$ akan menghasilkan bayangan

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Dengan catatan:

- Arah rotasi diputar searah jarum jam maka besar sudut rotasinya negatif $(-\alpha)$.
- Arah rotasi diputar berlawanan arah jarum jam maka besar sudut rotasinya positif (α).

Contoh Soal 1.11

Diketahui fungsi eksponen $y = 2^{x+1}$. Jika fungsi eksponen tersebut dirotasi sejauh 90° searah jarum jam, tentukan hasil rotasi dan gambar grafiknya!

Alternatif penyelesaian:

Diketahui:

$y = 2^{(x+1)}$

$\alpha = 90°$

Karena arah rotasi searah jarum jam, jadi sudut rotasinya negatif.

Menggunakan Definisi 1.7, maka

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos -90° & -\sin -90° \\ \sin -90° & \cos -90° \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Sehingga

$x' = 0, x + y,\ y = x'$

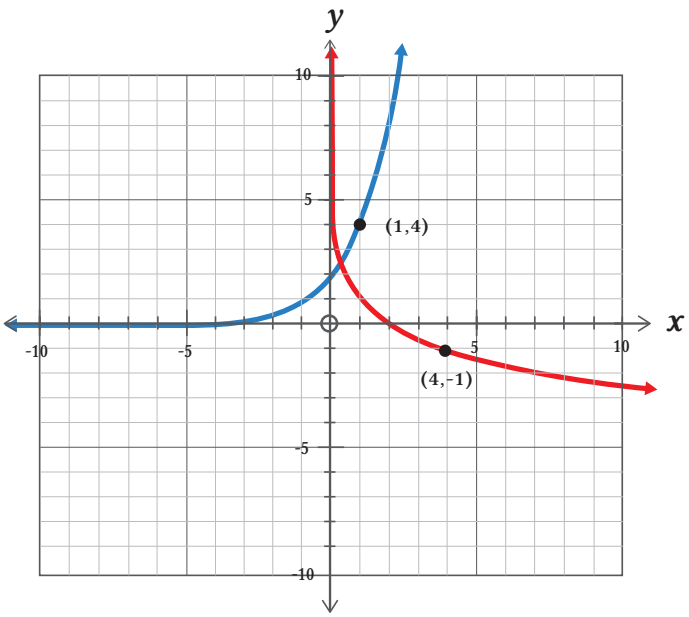
$y' = -x + 0,\ x = -y'$

Dengan demikian,

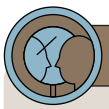
$y = 2^{x+1}$. . . subsituti $y = x'$, $x = y'$

$x' = 2^{-y'+1}$

$x' = 2^{-y'+1}$, hasil rotasinya adalah $x = 2^{(-y+1)}$



E. Komposisi Transformasi Fungsi



Ayo Berefleksi

Berikan instruksi kepada siswa untuk melakukan refleksi terkait submateri sebelumnya dengan mengisi tabel pada kegiatan Ayo Berefleksi.

Tabel 1.2 Rangkuman Transformasi Fungsi

Jika fungsi ditransformasikan, maka hasilnya adalah

Transformasi Vertikal		Transformasi Horizontal	
Fungsi	**Keterangan**	**Fungsi**	**Keterangan**
$y = f(x) + b$	Translasi oleh $\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$	$y = f(x - a)$	Translasi oleh $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$
$y = -f(x)$	Refleksi terhadap sumbu x	$y = f(-x)$	Refleksi terhadap sumbu y
$y = kf(x)$	Dilatasi vertikal dengan skala k	$y = f(kx)$	Dilatasi horizontal dengan skala $\frac{1}{k}$

Lengkapi bagian yang masih kosong pada tabel di atas.

Ayo Bereksplorasi

Guru mengajak siswa untuk mengamati dengan cermat gambar grafik fungsi. Guru menunjukkan ilustrasi gambar grafik fungsi (bisa menggunakan alternatif lain) yang bertujuan untuk memancing rasa ingin tahu siswa khususnya terkait kombinasi transformasi pada dua transformasi vertikal, satu transformasi horizontal dan satu transformasi vertikal, serta dua transformasi horizontal.

Ayo Menggunakan Teknologi

Kegiatan ini termasuk kegiatan integrasi pada kegiatan Ayo Bereksplorasi. Guru mengajak siswa untuk mengunjungi tautan berikut sebagai alat bantu dalam menggambar grafik.

Kunjungi

https://tinyurl.com/AyoMenggunakanTeknologi

Tahukah Kalian

- Jika dua transformasi vertikal atau dua transformasi horizontal dikombinasikan, maka urutan pengerjaan yang diterapkan akan memengaruhi hasil transformasinya.
- Jika satu transformasi vertikal dan satu transformasi horizontal dikombinasikan, maka urutan pengerjaan yang diterapkan tidak akan memengaruhi hasil transformasinya.

Ayo Mengerjakan Projek

Pada kegiatan Ayo Mengerjakan Projek, guru diharapkan dapat memberikan instruksi yang baik. Guru dapat menghubungkan penerapan transformasi fungsi dalam kehidupan sehari-hari. Projek tersebut bertujuan untuk meningkatkan pemahaman siswa terkait transformasi secara nyata melalui kegiatan eksplorasi benda yang ada dalam kehidupan sehari-hari, kemudian menghubungkan dengan konsep transformasi.

Perhatikan lengkungan pada jembatan di bawah ini.

Gambar 1.12 Lengkungan Jembatan sebagai Penerapan Fungsi Kuadrat

Jika lengkungan jembatan tersebut kita misalkan suatu fungsi kuadrat $y = -x^2$, maka tentukan minimal 2 bentuk grafik fungsi tersebut dengan koordinat yang berbeda, selanjutnya transformasikan gambar grafik tersebut sesuai dengan aturan berikut.

1. Gambarlah grafik fungsi kuadrat tersebut.
2. Selanjutnya, tentukan hasil translasi oleh $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ dari grafik tersebut.
3. Kemudian refleksikan terhadap sumbu horizontal.
4. Dari hasil grafik pada no. 3, lanjutkan dilatasi dengan skala 3 sejajar sumbu x.
5. Kemudian rotasikan sejauh 90° dengan pusat (0, 0).

Tempelkan gambar hasil akhir dari transformasi tersebut beserta prosedurnya ke dalam lembar projek.

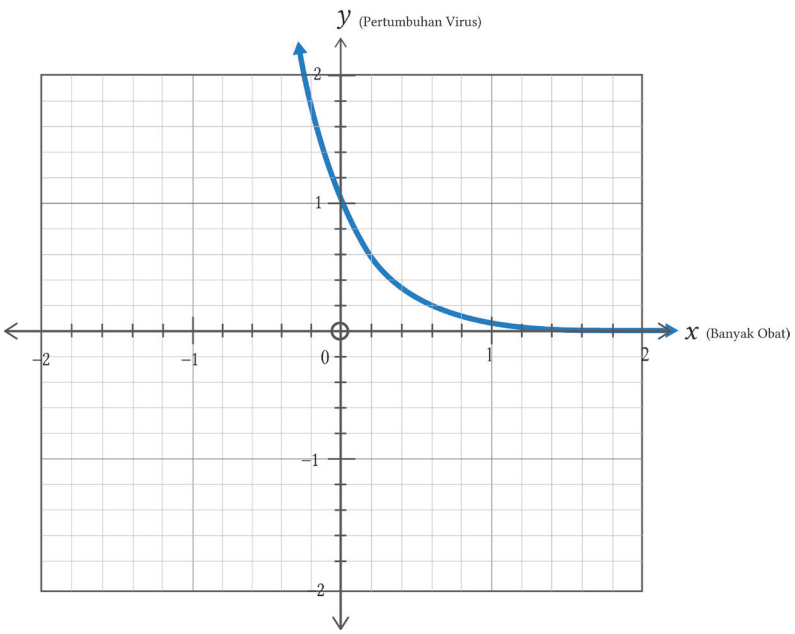
Ayo Berkomunikasi

Hasil akhir dari transformasi yang sudah diselesaikan pada kegiatan Ayo Mengerjakan Projek selanjutnya didiskusikan dengan temanmu terkait hasil temuanmu, kemudian presentasikan temuan kalian kepada teman yang lain.

Latihan 1.4

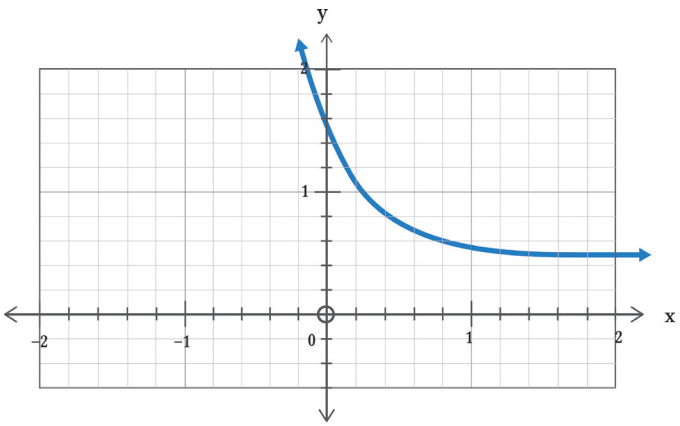
1. Diketahui $f(x) = x^2 + 1$, tentukan hasil transformasi dari $y = f(x)$ berdasarkan kombinasi transformasi berikut.
   a. Translasi oleh $\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$, kemudian dilatasi sejajar sumbu y dengan skala 3.
   b. Translasi oleh $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, kemudian refleksi terhadap sumbu x.
2. Tentukan urutan transformasi yang memetakan
   a. Grafik $y = x^3$ menjadi grafik $y = \frac{1}{2}(x + 5)^3$
   b. Grafik $y = x^3$ menjadi grafik $y = -\frac{1}{2}(x + 1)^3 - 2$

3. Diketahui $f(x) = \sqrt{x}$, tentukan hasil transformasi dari $y = f(x)$ berdasarkan kombinasi transformasi berikut.
   a. Refleksi terhadap sumbu x, dilanjutkan translasi oleh $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, kemudian translasi oleh $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, dilanjutkan dilatasi sejajar sumbu x dengan skala 2.
   b. Translasi oleh $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, dilanjutkan dilatasi sejajar sumbu x dengan skala 2, kemudian refleksi terhadap sumbu x, dilanjutkan translasi oleh $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
4. Seekor sapi terinfeksi virus yang sangat mematikan. Setelah diperiksa oleh dokter hewan terdapat 500 virus. Untuk menyelamatkan sapi tersebut, dokter hewan menyuntikkan obat supaya virus tersebut berkurang dan mati. Hasil pemeriksaan setelah diberikan obat dimodelkan dalam bentuk grafik seperti fungsi $y = f(x)$ yang ditunjukkan pada gambar berikut.

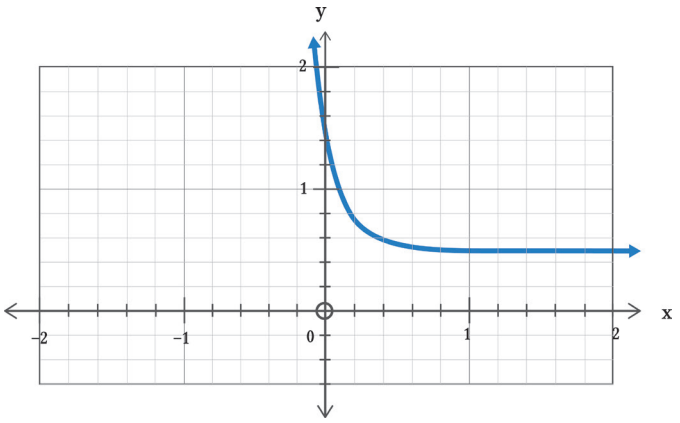


Jika hasil perubahan virus setelah diberikan obat ditunjukkan gambar grafik berikut ini, tentukan fungsi di atas, selanjutnya tentukan fungsi-fungsi yang lain berdasarkan model gambar berikut!

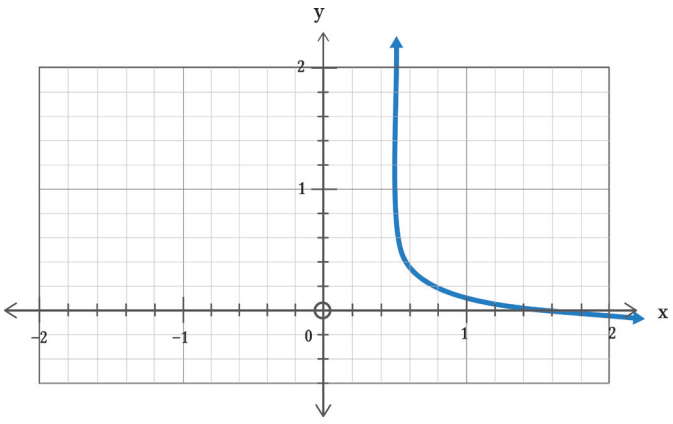
   a. Pemberian obat tipe A oleh dokter hewan menghasilkan perubahan pada pertumbuhan virus seperti gambar berikut ini. Tentukan fungsinya.



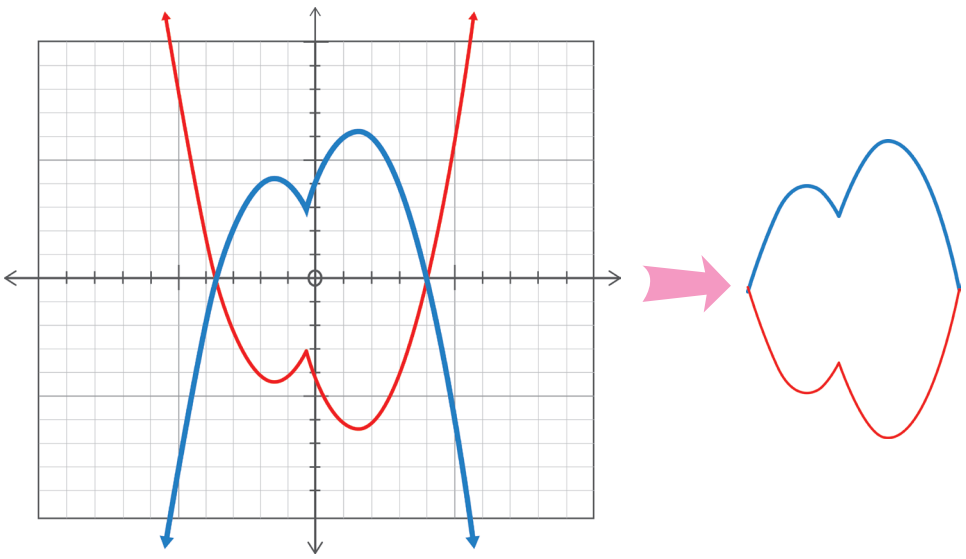
b. Pemberian obat tipe B oleh dokter hewan menghasilkan perubahan pada pertumbuhan virus seperti gambar di bawah ini. Tentukan fungsinya.



c. Pemberian obat tipe C oleh dokter hewan menghasilkan perubahan pada pertumbuhan virus seperti gambar di bawah ini. Tentukan fungsinya.



5. Doni akan membuat cetakan kue. Cetakan kue tersebut mula-mula digambar oleh Doni pada koordinat kartesius supaya bentuknya simetris dan beraturan. Berikut gambar yang direncanakan oleh Doni.



Gambar a Gambar b

Gambar a merupakan sketsa gambar cetakan kue yang terbentuk dari dua buah grafik yang saling berpotongan. Jika grafik yang berwarna biru merupakan fungsi semula, apa yang kalian lakukan terhadap grafik tersebut supaya membentuk cetakan kue seperti gambar di atas?

Alternatif penyelesaian:

1. Diketahui $f(x) = x^2 + 1$,
   a. Translasi oleh $(0\ -4)$, maka
      $f(x) = x^2 + 1 - 4$
      $f(x) = x^2 - 3$
      kemudian dilatasi sejajar sumbu y dengan skala 3, maka
      $3f(x) = 3(x^2 + 1)$
      $y' = 3x^2 + 3$, jadi bayangan akhirnya adalah $y' = 3x^2 + 3$
   b. Translasi oleh $(3\ 0)$, maka
      $f(x) = (x - 3)^2 + 1$

$f(x) = x^2 - 6x + 10$

kemudian refleksi terhadap sumbu x

$f(x) = -f(x)$, maka

$y' = -(x^2 - 6x + 10)$

$y' = -x^2 + 6x - 10$

Jadi bayangan akhirnya adalah $y' = -x^2 + 6x - 10$.

2. Diketahui $f(x) = \sqrt{x}$,

   a. Refleksi terhadap sumbu x, $f(x) = -f(x)$, maka

   $y' = -\sqrt{x}$

   dilanjutkan translasi oleh (0 3), maka $y'' = -\sqrt{x} + 3$

   kemudian translasi oleh (2 0), maka

   $y''' = -\sqrt{x-2} + 3$

   dilanjutkan dilatasi sejajar sumbu x dengan skala 2, maka

   $y'''' = -\sqrt{\frac{1}{2}x - 2} + 3$

3. Translasi oleh (0 2), maka

   $y' = \sqrt{x} + 2$

   dilanjutkan dilatasi sejajar sumbu x dengan skala 2, maka

   $y'' = \sqrt{\frac{1}{2}x} + 2$

   kemudian refleksi terhadap sumbu x, maka

   $y''' = -\sqrt{\frac{1}{2}x} - 2$

   dilanjutkan translasi oleh (1 0), maka

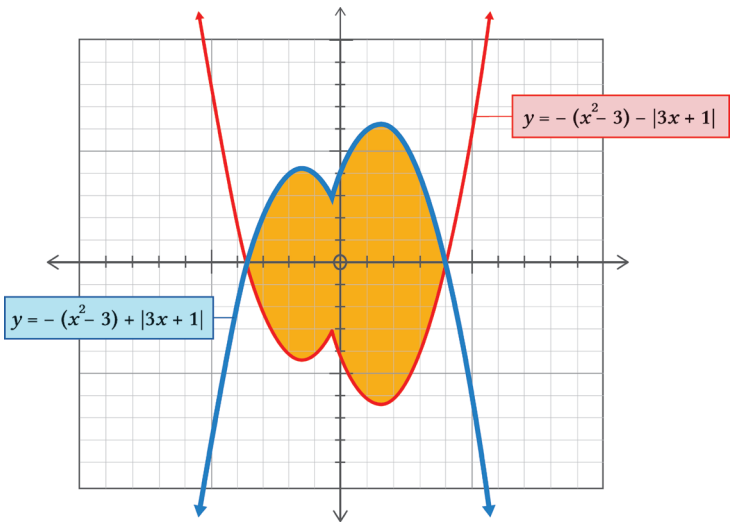
   $y'''' = -\sqrt{\frac{1}{2}(x-1)} - 2$

4. Guru dapat menggunakan tautan berikut untuk memudahkan dalam menentukan alternatif jawaban.

https://tinyurl.com/AyoMencoba1

5. Diketahui fungsi $y = -(x^2 - 3) + |3x + 1|$ sebagai fungsi awal.

   Gambar b merupakan implementasi dari grafik fungsi $y = -(x^2 - 3) + |3x + 1|$ yang direfleksikan terhadap sumbu x menjadi $y = (x^2 - 3) - |3x + 1|$ sehingga daerah di bawah grafik menjadi bentuk dari cetakan kue yang direncanakan (daerah yang berwarna oranye).

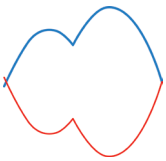


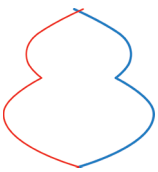
   Sehingga bentuk dari cetakan kue terbentuk dari gambar grafik fungsi $y = -(x^2 - 3) + |3x + 1|$ dan bayangan hasil refleksinya yaitu $y = (x^2 - 3) - |3x + 1|$.

Ayo Berpikir Kreatif

Penjelasan dan alternatif jawaban siswa dalam kegiatan Ayo Berpikir Kreatif sepenuhnya diserahkan kepada guru dalam memberikan ide kreatif kepada siswanya.

Berdasarkan Gambar a di atas, jika kedua fungsi tersebut disatukan (menjadi suatu bangun), jelaskan transformasi yang sesuai jika gambar grafik fungsi tersebut menjadi seperti gambar berikut.

a. 

b. 

Uji Kompetensi 1

1. Jika titik puncak suatu parabola $y = g(x)$ adalah $(2,-4)$, tentukan titik puncak yang lain pada parabola berdasarkan fungsi berikut!
   a. $y = g(x - 3)$
   b. $y = g(x) - 4$
   c. $y = -g(x)$
   d. $y = g(3x)$
   e. $y = 3g(x)$
2. Diberikan $g(x) = 3^x$, sketsalah setiap kurva berikut ini!
   a. $g(x - 1) - 4$
   b. $g(\frac{1}{2}x + 2) + 3$
   c. $\frac{1}{3}g(-x) + 4$
   d. $3g(x) - 1$
3. Diketahui fungsi $f(x) = -x^2$, $x \in R$ dan $g(x) = x^2 + 2x + 8$, $x \in R$
   a. Tentukan $g(x)$ dalam bentuk $(x + a)^2 + b$, di mana a dan b adalah konstanta!
   b. Jelaskan dua transformasi dengan urutan sesuai yang digunakan dalam transformasinya sehingga $g(x)$ adalah hasil transformasi dari $f(x)$!
4. Diketahui $f(x) = 2(x + 1) - 4$. Tentukan $g(x)$ sebagai hasil dari $f(x)$ setelah mengalami transformasi berikut:
   a. translasi oleh $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, dilanjutkan dilatasi vertikal dengan skala 3,
   b. translasi oleh $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$, dilanjutkan dilatasi vertikal dengan skala $\frac{1}{2}$,
   c. refleksi terhadap sumbu horizontal, kemudian ditranslasi oleh $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$,
   d. refleksi terhadap sumbu horizontal, dilanjutkan dilatasi vertikal dengan skala $\frac{1}{2}$, kemudian ditranslasi oleh $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$,
   e. refleksi terhadap sumbu horizontal, kemudian ditranslasi oleh $\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix}$ selanjutnya dilatasi vertikal dengan skala $\frac{3}{2}$.
5. Fungsi $f(x) = ax + b$ ditransformasikan dengan translasi oleh $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, kemudian direfleksi terhadap sumbu y, dilanjutkan dilatasi horizontal dengan skala $\frac{1}{3}$. Jika hasil transformasinya adalah $g(x) = 4 - 15x$, tentukan nilai a dan b.
6. Fungsi $f(x) = ax^2 + bx + c$ ditransformasikan melalui:
   - refleksi terhadap sumbu x,

- translasi oleh $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$,
- dilatasi horizontal dengan skala 2.

Jika hasil transformasinya adalah $g(x) = 4x^2 + ax - 6$, tentukan nilai a, b, dan c.

Alternatif penyelesaian:

1. Diketahui titik puncak suatu parabola $y = g(x)$ adalah $(2, -4)$, maka perubahannya adalah
   a. $y = g(x - 3)$, titiknya adalah $(5,-4)$
   b. $y = g(x) - 4$, titiknya adalah $(2,-8)$
   c. $y = -g(x)$, titiknya adalah $(2,4)$
   d. $y = g(3x)$, titiknya adalah $(0,-4)$
   e. $y = 3g(x)$, titiknya adalah $(2,-12)$
2. Kunjungi tautan di bawah untuk menggambar grafik
   https://bit.ly/TransformasiFungsi1
3. Diketahui fungsi $f(x) = -x^2$, $x \in R$ dan $g(x) = x^2 + 2x + 8$, $x \in R$
   Bentuk $(x + a)^2 + b$ adalah $(x + 1)^2 + 7$, $a = 1$, dan $b = 7$
   Urutan transformasinya adalah refleksi terhadap sumbu x dilanjutkan translasi oleh $\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$
4. Diketahui $f(x) = 2x^2 - 4$,
   a. Translasi oleh $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, dilanjutkan dilatasi vertikal dengan skala 3, maka $g(x) = 6x^2 - 6$
   b. Translasi oleh $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$, dilanjutkan dilatasi vertikal dengan skala $\frac{1}{2}$, maka $g(x) = x^2 + 1$
   c. Refleksi terhadap sumbu horizontal, kemudian ditranslasi oleh $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, maka $g(x) = 3 - 2x^2$

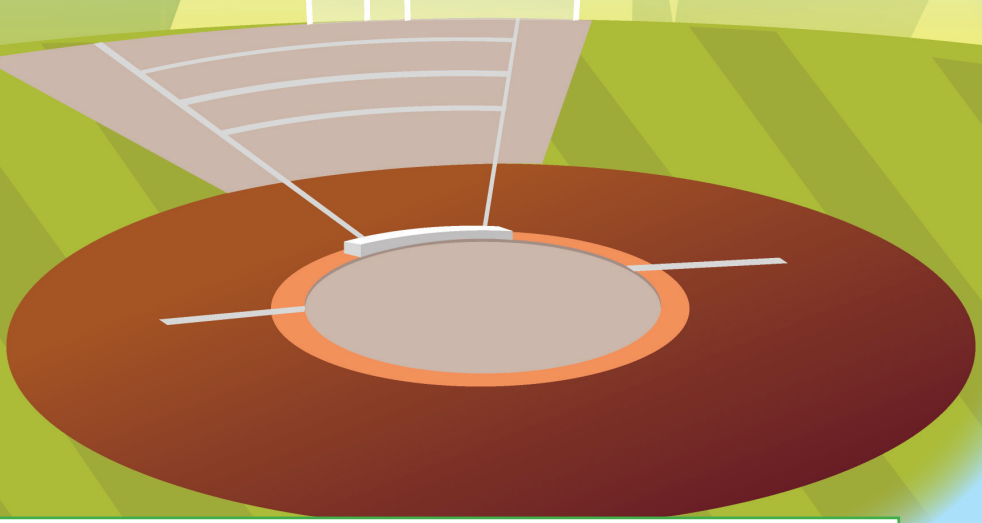
      Refleksi terhadap sumbu horizontal dilanjutkan dilatasi vertikal dengan skala $\frac{1}{2}$, kemudian ditranslasi oleh $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, maka $g(x) = 5 - x^2$
5. $a = 5$, $b = -1$
6. $a = 16$, $b = 0$, dan $c = -25$

KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET, DAN TEKNOLOGI
REPUBLIK INDONESIA, 2022
Matematika untuk SMA/SMK/MA Kelas XII
Penulis: Mohammad Tohir, dkk.
ISBN: 978-602-244-739-9

Bab
2

Panduan Khusus

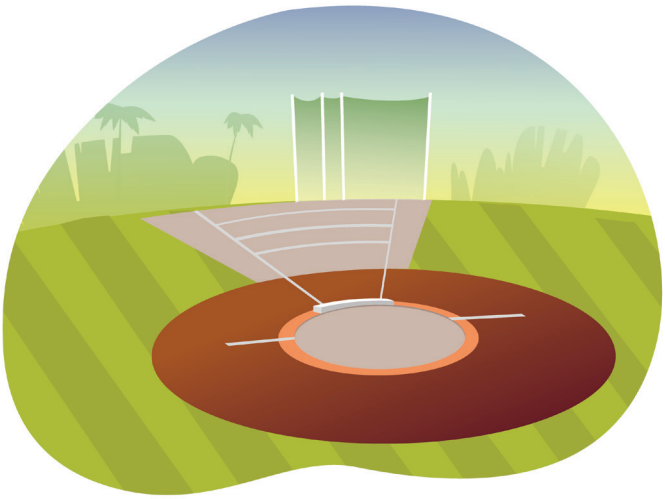
Busur dan Juring Lingkaran



Tujuan Pembelajaran

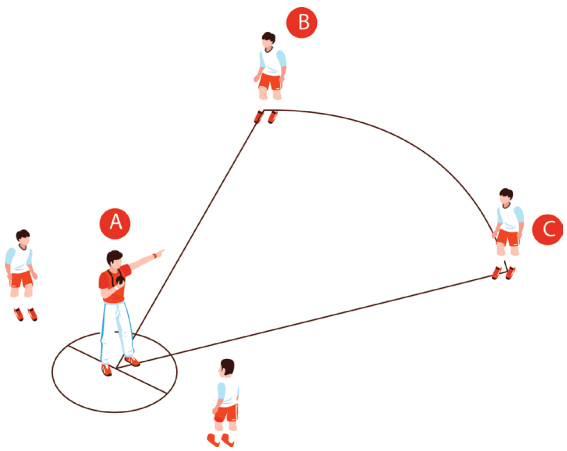
1. Memahami ciri-ciri elemen lingkaran berupa ruas garis atau kurva lengkung: busur, tali busur, jari-jari, diameter, apotema, juring, dan tembereng
2. Menganalisis hubungan antara elemen-elemen lingkaran
3. Menentukan rumus panjang busur suatu lingkaran
4. Menentukan rumus luas juring suatu lingkaran
5. Mengeksplorasi hubungan sudut pusat lingkaran dengan panjang busurnya
6. Mengeksplorasi hubungan sudut pusat lingkaran dengan luas juringnya
7. Mengeksplorasi hubungan sudut pusat lingkaran, panjang busur, dan luas juringnya

Tolak peluru adalah salah satu nomor yang terdapat dalam nomor lempar pada cabang atletik bersama dengan lempar cakram, lempar palu, dan lempar lembing. Permainan tolak peluru tidak luput dari bentuk lapangannya yang berbentuk lingkaran, mulai dari garis tengah atau diameter lingkaran, arah tolak peluru, dan daerah sektor (juring) tolak peluru. Gambar 2.1 adalah bentuk lapangan olahraga tolak peluru, sedangkan Gambar 2.2 adalah ilustrasi bentuk lapangan olahraga tolak peluru.



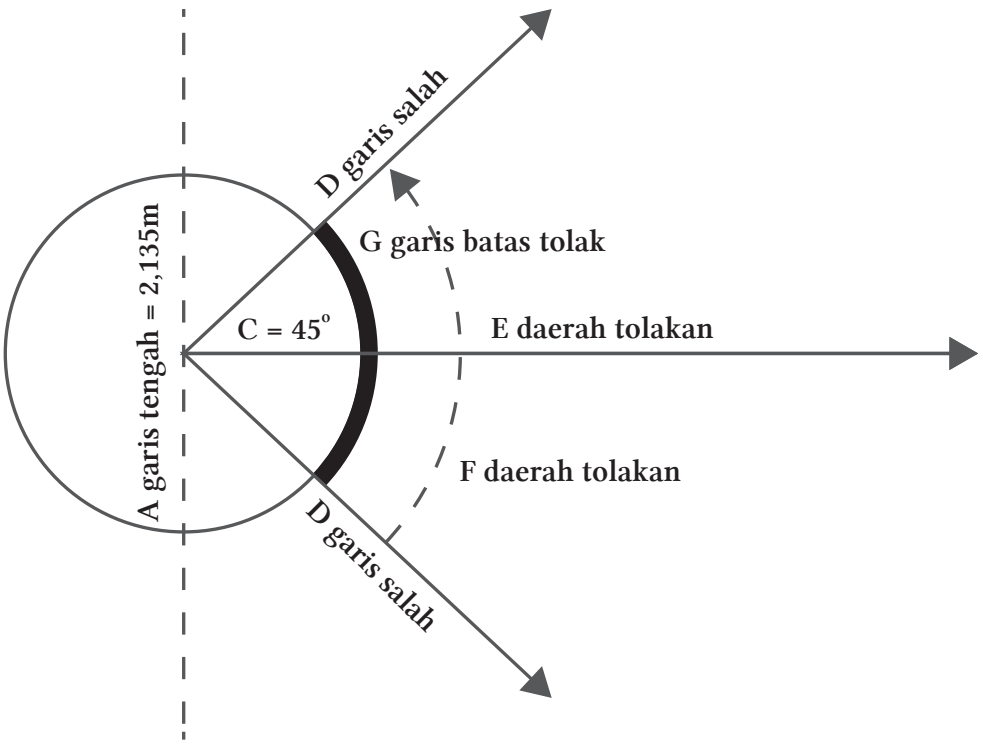
Gambar 2.1. Lapangan Olahraga Tolak Peluru

Apabila kalian amati dengan cermat Gambar 2 di bagian lingkaran pada anak dengan pusat A, maka gambar lapangan tolak peluru tersebut akan seperti pada Gambar 2.3 berikut ini.



Gambar 2.2. Bentuk Lapangan Olahraga Tolak Peluru

Perhatikan Gambar 2.3 di bawah ini. Dapatkah kalian menghitung berapa panjang garis lengkung yang dibentuk oleh sudut 45°? Kemudian, coba kalian amati dengan cermat Gambar 2, titik A yang terbentuk sama persis seperti pada Gambar 3. Apabila jarak anak pada titik A dengan anak pada titik B sepanjang 100 m, maka dapatkah kalian menghitung panjang garis lengkung anak pada titik B dengan anak pada titik C?



Gambar 2.3. Ilustrasi Lapangan Tolak Peluru

Agar kalian bisa memecahkan masalah tersebut, kalian harus memahami konsep keliling lingkaran, luas lingkaran, besar sudut pusat, panjang busur, dan luas juring lingkaran.

Capaian Pembelajaran

Di akhir fase F, siswa dapat menerapkan teorema tentang lingkaran dan menentukan panjang busur dan luas juring lingkaran.

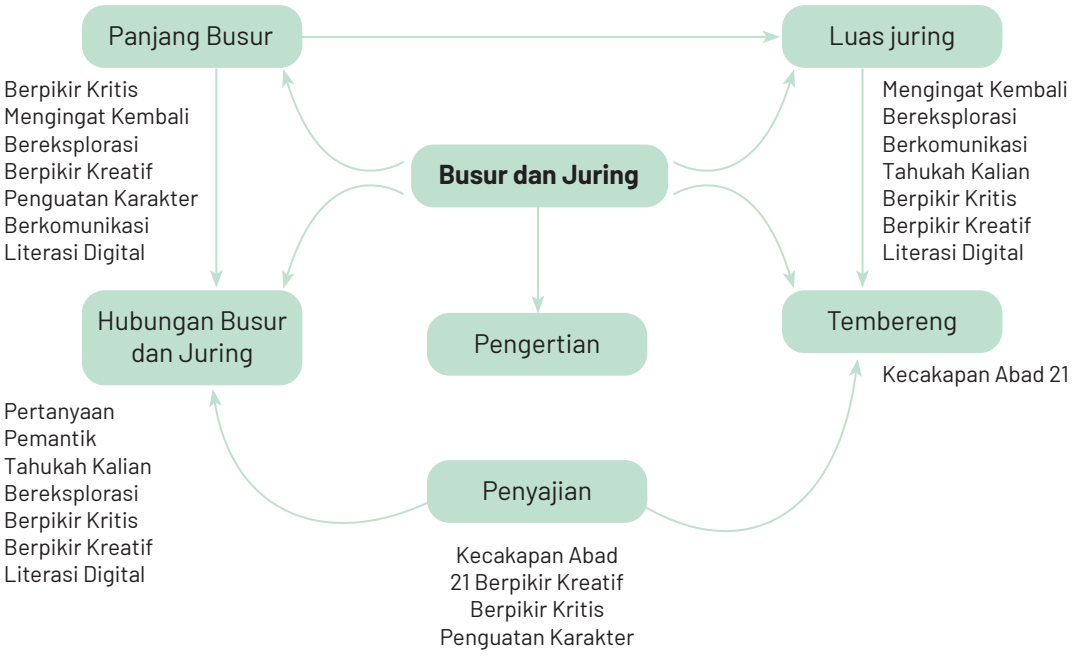
Kata Kunci

Lingkaran, Busur, Juring, Tembereng

Pertanyaan Pemantik

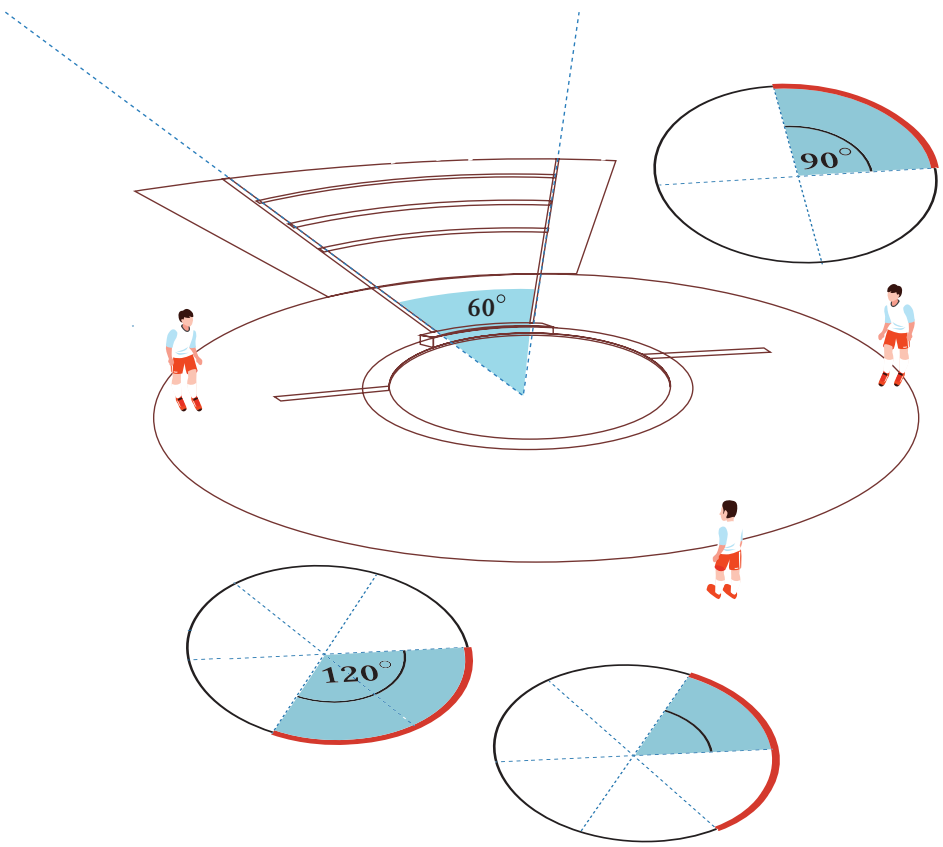
1. Bagaimana hubungan besar sudut pusat lingkaran dengan panjang busurnya?
2. Bagaimana hubungan besar sudut pusat lingkaran dengan luas juringnya?
3. Apakah makin besar sudut pusat lingkaran, makin panjang busur di depan sudut pusat itu?
4. Apakah makin besar sudut pusat lingkaran, makin besar juga luas juring di depan sudut pusat itu?
5. Bagaimana hubungan besar sudut pusat lingkaran, panjang busur, dan luas juringnya?

Peta Konsep



Gambaran Umum Bab 2

Bab 2 ini menyajikan tentang konsep elemen-elemen lingkaran yang berupa busur, juring dan tembereng. Setiap subbabnya akan disajikan penanaman karakter Pancasila dan keterampilan abad 21 untuk mendukung tercapaian generasi emas tahun 2045, yaitu 1) konsep dan teori matematika, 2) pengenalan 4Cs (*Creativity*, *Critical Thinking*, *Collaboration*, *Communication*), 3) literasi matematika, dan 4) literasi budaya, dan 5) literasi digital. Sajian dalam Bab 2 ini bertujuan untuk mengeksplorasikan kemampuan siswa dalam menemukan rumus panjang busur lingkaran, luas juring, dan luas temberengnya sehingga dapat menarik kesimpulan melalui kelima kegiatan pembelajaran tersebut.



Kegiatan 2.1 membahas tentang konsep panjang busur lingkaran yang diawali dengna sajian literasi budaya dan narasi tokoh matematika. Siswa dapat menghubungkan konsep panjang busur lingkaran pada Jembatan

Lengkung Tol Kalikutho Kendal dan meneladan tokoh matematika. Siswa diajak berpikir kritis, mengingat kembali, bereksplorasi, dan berkomunikasi terkait dengan konsep elemen-elemen lingkaran, konsep busur lingkaran dengan memperhatikan garis lengkung warna merah yang dibatasi oleh dua kaki-kaki sudut pusat yang berupa jari-jari lingkaran. Siswa diminta untuk memperdalam pengetahuannya melalui kegiatan berpikir kreatif, berpikir kritis, berkomunikasi, bekerja sama melalui penguatan karakter. Ajaklah siswa untuk mengevaluasi kemamampuan dirinya melalui kegiatan refleksi dan mengerjakan projek. Siswa juga diajak untuk mengaitkan materi dengan lingkungan, keamanan digital, nutrisi dan kebugaran, serta literasi finansial.

Kegiatan 2.2 membahas tentang konsep luas busur lingkaran yang diawali dengan sajian elemen-elemen lingkaran, definisi luas juring, dan literasi budaya. Siswa diajak untuk mempelajari kembali ciri-ciri dari elemen-elemen lingkaran yang disajikan pada Buku Siswa yang dikaitkan dengan literasi budaya. Siswa diajak melakukan eksplorasi dan berkomunikasi untuk mengetahui hubungan sudut pusat lingkaran dengan luas juringnya. Siswa diminta untuk memperdalam pengetahuannya melalui kegiatan berpikir kritis, berpikir kreatif, dan menggunakan teknologi. Ajaklah siswa untuk mengevaluasi kemampuan dirinya melalui kegiatan refleksi.

Kegiatan 2.3 membahas tentang konsep hubungan sudut pusat lingkaran, panjang busur, dan luas juringnya yang diawali dengan pertanyaan pemantik tentang seorang matematikawan Yunani Eratosthenes mengukur keliling bumi dari hasil pengamatannya yang diilustrasikan dalam bentuk gambar tentang konsep sudut pusat lingkaran, panjang busur, dan luas juringnya. Siswa diajak untuk memahami tentang pelabelan busur dan juring lingkaran yang disajjikan pada Buku Siswa agar terbangun pemahaman yang luas. Siswa diajak melakukan eksplorasi dan mengerjakan projek untuk mengetahui sudut pusat lingkaran, panjang busur, dan luas juringnya. Siswa diminta untuk mengingat kembali tentang ciri-ciri tembereng lingkaran yang diawali dengan definisi, kemudian melakukan eksplorasi dengan mengikuti prosedur menemukan rumus luas tembereng. Siswa diminta untuk memperdalam pengetahuannya melalui kegiatan berpikir kritis, berpikir kreatif, dan menggunakan teknologi. Ajaklah siswa untuk mengevaluasi kemamampuan dirinya melalui kegiatan refleksi.

Skema Pembelajaran

Subbab	Waktu (JP)*	Tujuan	Pokok Materi	Kosakata	Metode dan Aktivitas	Sumber Utama	Sumber Lain
A. Busur Lingkaran	12 JP	1. Memahami elemen-elemen suatu lingkaran 2. Menganalisis hubungan elemen-elemen suatu lingkaran 3. Mengeksplorasi hubungan sudut pusat lingkaran dengan panjang busurnya 4. Menentukan rumus panjang busur suatu lingkaran	Busur lingkaran, cici-ciri busur lingkaran, hubungan sudut pusat lingkaran dengan busurnya	Busur, sudut pusat, lingkaran	Berpikir kritis, mengingat kembali, bereksplorasi, berkomunikasi, berpikir kreatif, (penguatan karakter), berefleksi, menggunakan teknologi, mengerjakan projek, latihan	Buku Siswa	https://s.id/SelidikPanjangBusur
B. Juring Lingkaran	8 JP	1. Memahami elemen-elemen suatu lingkaran 2. Menganalisis hubungan elemen-elemen suatu lingkaran	Juring lingkaran, ciri-ciri juring lingkaran, hubungan sudut pusat lingkaran dengan juringnya	juring, sudut pusat, lingkaran	Mengingat kembali, bereksplorasi, berkomunikasi, berpikir kritis, berpikir kreatif, menggunakan teknologi, berefleksi, latihan	Buku Siswa	https://s.id/HitungLuasJuring https://s.id/LuasJuringAnimasi https://s.id/LuasJuringRad

Subbab	Waktu (JP)*	Tujuan	Pokok Materi	Kosakata	Metode dan Aktivitas	Sumber Utama	Sumber Lain
		3. Mengeksplorasi hubungan sudut pusat lingkaran dengan luas juringnya 4. Menentukan rumus luas juring suatu lingkaran					
C. Hubungan Panjang Busur dan Luas Juring	12 JP	1. Memahami elemen-elemen suatu lingkaran 2. Menganalisis hubungan elemen-elemen suatu lingkaran 3. Mengeksplorasi hubungan sudut pusat lingkaran, panjang busur, dan luas juringnya	Hubungan panjang busur dan luas juring, pelabelan busur dan juring lingkaran, hubungan sudut pusat lingkaran dengan panjang busur dan luas juringnya, tembereng lingkaran, ciri-ciri tembereng lingkaran	Busur, juring, sudut pusat, tembereng, lingkaran	Pertanyaaan pemantik, bereksplorasi, mengerjakan projek, berpikir kritis, berpikir kreatif, menggunakan teknologi, latihan, berefleksi	Buku Siswa	https://s.id/HubunganSudutBusurJuring

Catatan:

* Waktu merupakan saran rentang jam pelajaran. Guru dapat menyesuaikan dengan kondisi aktual pembelajaran.

Panduan Pembelajaran

A. Busur Lingkaran

Sebelum memulai materi tentang panjang busur lingkaran, guru diharapkan dapat menginformasikan pengalaman belajar siswa setelah mempelajari bab 2 ini.

1. Siswa dapat mempelajari informasi yang terdapat pada bagian literasi budaya dan narasi tokoh tentang sejarah nilai π.
2. Siswa dapat melakukan kegiatan eksplorasi berdasarkan instruksi yang disajikan pada Buku Siswa.
3. Siswa dapat memahami teori dan konsep sudut pusat lingkaran, panjang busur, luas juring, dan luas temberengnya.
4. Siswa dapat mengembangkan kemampuannya dengan melakukan kegiatan berpikir kritis, berpikir kreatif, berkomunikasi, berdiskusi, mencoba, berefleksi, mengerjakan projek, dan menggunakan teknologi.
5. Siswa dapat mengimplemntasikan pengetahuannya pada permasalahan matematika tentang kosep busur dan juring lingkaran ke dalam permasalahan sehari-hari.

- Jangka, busur, dan kertas berpetak
- Mistar (penggaris), jangka, gambar bangun lingkaran beserta elemen-elemennya
- Cincin, gantungan kunci, jam dinding, gelang, uang logam, kaleng susu, roda sepeda, gunting, kertas kwarto, pensil dan lem kertas, dan lain-lain
- Lingkungan, teman, dan Lembar Kegiatan Projek

Apersepsi

Guru mendorong siswa untuk mengingat kembali elemen lingkaran yang telah dibahas sebelumnya sebelum memulai kegiatan ini terutama tentang panjang busur dan sudut pusat lingkaran serta panjang busur lingkaran yang ada dalam kehidupan sehari-hari, seperti bentuk Jembatan Lengkung Tol Kalikutho Kendal, roda sepeda, bentuk lapangan permainan tolak peluru, dan lain-lain. Tujuannya adalah untuk memungkinkan siswa menemukan rumus dan menghitung panjang busur lingkaran.

Tahukah Kalian

Ajaklah siswa untuk menambahkan pengetahuannya tentang narasi tokoh pada bidang lingkaran, yaitu Bapak Archymedes.

Ayo Mengerjakan Projek

Guru meminta siswa melakukan kegiatan projek 2.1 untuk menentukan nilai konstanta π. Jika kegiatan ini dilakukan di dalam kelas, guru harus menginformasikan terlebih dahulu perlengkapan dan instrumen yang akan digunakan. Projek juga dapat digunakan untuk tugas siswa.

Aktivitas informasi selanjutnya dibagi menjadi dua komponen. Informasi pertama menunjukkan bahwa sudut pusat berhubungan dengan panjang busur lingkaran. Informasi kedua mengacu pada hubungan antara sudut pusat dan luas juring lingkaran.

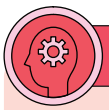
Ayo Mengingat Kembali

Guru meminta siswa untuk mengingat elemen-elemen lingkaran di sekitar busur lingkaran yang telah disajikan pada Buku Siswa.

No.	Nama Elemen	Ciri-ciri
	Busur	✓ Berupa garis lengkung yang berbentuk kurva ✓ Garis lengkung yang berhimpitan dengan lingkaran ✓ Apabila ukurannya kurang dari setengah keliling lingkaran (besar sudut pusat $< 180^o$), maka disebut dengan busur minor. ✓ Apabila ukurannya lebih dari setengah keliling lingkaran (besar sudut pusat $> 180^o$), maka disebut dengan busur mayor. ✓ Apabila ukurannya sama dengan setengah keliling lingkaran (sudut pusat $= 180^o$), maka disebut dengan setengah lingkaran.
	Tali busur	✓ Berbentuk ruas garis ✓ Ruas garis yang dihubungkan oleh dua titik pada lingkaran
	Sudut pusat	✓ Kedua kaki sudutnya terbentuk dari kedua sinar garis. ✓ Kedua kaki sudut-sudutnya berhimpitan dengan jari-jari lingkaran. ✓ Titik sudutnya merupakan titik pusat lingkaran.

Keterangan:

Bila tidak dinyatakan sebagai minor atau mayor, istilah busur atau sudut dianggap sebagai minor.



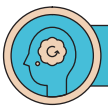
Ayo Berpikir Kritis

Pertanyaan untuk membangun berpikir kritis:

1. Apakah yang dimaksud pada pernyataan nomor 1 adalah makin besar ukuran diameternya maka ukuran panjang kelilingnya tetap atau makin kecil?

2. Pada pernyataan nomor 1, mungkinkah terjadi apabila makin besar ukuran diameternya akan makin kecil panjang keliling lingkarannya?
3. Pada pernyataan nomor 2, mungkinkah perbandingan yang linear menghasilkan nilai yang berbeda apabila pembilang dan penyebutnya berubah?
4. Pada pernyataan nomor 2, berapakah nilai yang didapat dari hasil perbandingan dari K dengan d? Disebut dengan apakah itu?

Daftar Pernyataan Kritis	Ya/Tidak
1. Jika diameter sebuah benda tertentu berbentuk sebuah lingkaran bertambah panjang, maka keliling benda tersebut juga bertambah panjang.	Ya
2. Apabila K dan d berturut-turut merupakan keliling dan diameter suatu lingkaran, maka perbandingan nilai K dengan d akan makin bertambah apabila benda yang berbentuk lingkaran tersebut juga makin bertambah. Begitu juga sebaliknya, perbandingan nilai K dengan d akan makin berkurang apabila suatu benda berbentuk lingkaran makin berkurang juga.	Tidak



Ayo Mengingat Kembali

Siswa diarahkan untuk mempelajari dan memahami sajian pada Ayo Mengingat Kembali agar menambah pengetahuan tentang materi yang sedang dibahas sehingga lebih mengerti dan memahami dengan baik.

Ayo Bereksplorasi

Guru meminta siswa untuk melihat dengan saksama gambar busur dan sudut pusat lingkaran yang terhubung. Sajian gambar busur yang sesuai dengan

sudut pusat yang berbeda diperlukan. Tujuannya adalah untuk mendorong minat siswa tentang hubungan antara sudut pusat lingkaran dan panjang busurnya.

Ayo Berkomunikasi

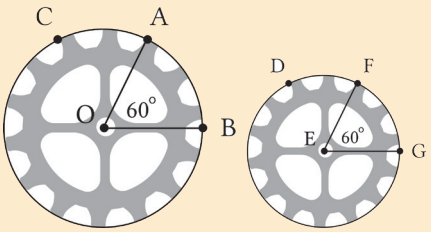
Dalam bentuk pertanyaan, guru mengajak siswa untuk mengungkapkan keingintahuannya terhadap gambar yang diamati. Pertanyaan ditujukan kepada ide-ide pokok capaian pembelajaran. Beberapa contoh pertanyaan adalah:

1. Apakah sudut pusat lingkaran dengan panjang busurnya memiliki hubungan tertentu? Jelaskan.
2. Benarkah makin besar sudut pusat lingkaran, maka makin besar juga panjang busurnya yang sehadap?
3. Bagaimana perbandingan dua sudut pusat pada dua busur lingkaran yang sama?

Selanjutnya, siswa diajak untuk memahami definisi busur lingkaran yang disajikan pada Buku Siswa dan rumusan panjang busur yang didapat. Lalu, siswa diarahkan untuk memahami kedua contoh soal yang disajikan pada Buku Siswa.

Ayo Berpikir Kreatif

Langkah-langkah kegiatan Ayo Berpikir Kreatif ini diserahkan sepenuhnya kepada guru untuk menyusunnya sendiri sebagai latihan. Kemudian perkirakan sendiri juga kesimpulan yang didapat.



Pertimbangkan roda gigi besar yang diwakili oleh lingkaran dengan susut pusat titik O; $\angle AOB$ yang ukurannya sama dengan 60°, busur minor AB, dan busur mayor ACB seperti yang ditunjukkan pada gambar. Pertimbangkan roda gigi kecil yang diwakili oleh lingkaran E,

yang berisi sudut pusat, $\angle FEG$ yang ukurannya sama dengan 60°; busur kecil FG, dan busur utama FDG seperti yang ditunjukkan pada gambar.

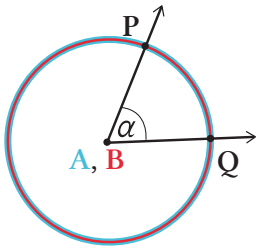
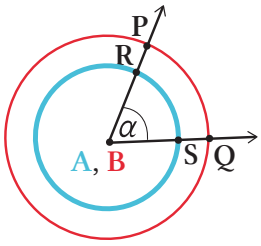
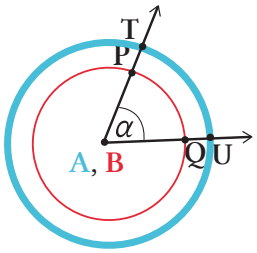
a. Apakah roda gigi besar mirip dengan roda gigi kecil? Jelaskan alasan Anda.
b. Apakah panjang jari-jari roda gigi besar sebanding dengan panjang jari-jari roda gigi kecil? Jelaskan alasan Anda.
c. Tentukan besar derajat busur minor pada setiap lingkaran.
d. Berapa rasio ukuran derajat busur minor dengan ukuran derajat seluruh lingkaran untuk masing-masing dua roda gigi?
e. Ukuran derajat busur potong pada roda gigi besar sama dengan ukuran derajat busur potong pada roda gigi kecil, tetapi apakah kedua busur yang dipotong tampak sama panjang?

Ayo Berpikir Kritis

Halim mengatakan bahwa apabila dua lingkaran mempunyai sudut pusat yang sama besar, maka kedua panjang busur lingkaran tersebut pasti sama panjang. Setujukah kalian dengan pernyataan Halim? Jelaskan.

Petunjuk Guru untuk kegiatan Ayo Berkomunikasi

1. Daftarlah siswa yang mengatakan setuju dan tidak setuju dengan cara mengajukan tangan bagi yang mengatakan setuju. Kemudian, buatlah kelompok siswa yang heterogen berdasarkan siswa yang setuju dan tidak setuju. Selanjutnya, ajaklah siswa untuk menyusun argumen atas pilihannya, mengapa setuju dan mengapa tidak setuju.
2. Guru melakukan pemodelan dengan mendorong siswa untuk berpikir krtitis. Arahkan atau pancinglah siswa untuk membuktikannya dengan cara seperti pada contoh ketiga ilustrasi gambar berikut.

Ilustrasi Gambar I	Ilustrasi Gambar II	Ilustrasi Gambar III
		
Lingkaran A dan B dengan panjang jari-jari r	Lingkaran A dan B dengan $r_a < r_b$	Lingkaran A dan B dengan $r_a > r_b$
Tugas guru membuat ilustrasi gambar yang lainnya. Adakah ilustrasi gambar yang lainnya?		

3. Berikut alternatif mengarahkan/memancing siswa agar bisa membuat seperti ketiga ilustrasi tersebut atau ilustrasi gambar lainnya.
   a) Coba perhatikan besar sudut dan panjang jari-jari dari Lingkaran A dan B.
   b) Coba kalian perhatikan kembali bentuk-bentuk diagram venn pada materi himpunan.
   c) Bisakahkah panjang jari-jarinya berbeda untuk kedua lingkaran tersebut?
   d) Kalau panjang jari-jarinya sama, bagaimana?
   e) Bagaimana kalau titik pusat kedua lingkaran tersebut berbeda?
4. Ajaklah siswa untuk berdiskusi dalam kelompoknya masing-masing dengan menyusun argumen dengan alasan yang kuat untuk mendukung terhadap pilihannya tersebut.
5. Instruksikan kepada masing-masing kelompok siswa untuk memp-resentasikan hasil dikusi yang didapat oleh kelompok masing-masing, kemudian simpulkan.

Berikut Alternatif Kesimpulan yang Didapat dengan Bernilai Benar

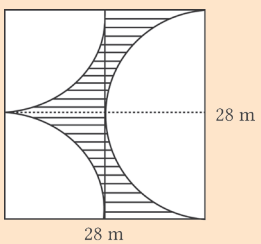
1) **Setuju**, panjang busur pada dua lingkaran akan sama panjang apabila panjang jari-jari kedua lingkaran tersebut sama panjang.

2) **Tidak setuju**, karena panjang jari-jari kedua lingkaran tersebut belum tentu sama sehingga diperlukan tambahan informasi pada soal agar lebih jelas.

Ayo Berkomunikasi

Diskusikan permasalahan berikut dengan teman sebangku, kemudian sampaikan hasilnya kepada teman di kelompok lainnya.

Areal lahan rumput di belakang rumah Pak Hartono berbentuk segi empat dengan panjang sisi-sisinya berukuran 28 × 28 m^2. Sebagian areal lahan rumput akan dibuat menjadi kolam renang (area yang tidak terarsir), sedangkan sisanya akan menjadi rerumputan yang indah (area yang terarsir). Jika biaya peletakan rumput adalah Rp 100.000/m^2 dan biaya tukang Rp1.500.000.00, maka tentukan:



a. panjang keliling areal lahan rumput Pak Hartono,
b. besar anggaran yang harus disiapkan oleh Pak Hartono untuk menggarap lahan rumputnya.

Petunjuk Guru untuk kegiatan Ayo Berkomunikasi

1. Ajaklah siswa untuk memahami masalah tersebut. Apabila diperlukan, bahaslah secara klasikal dengan menuliskan di papan tulis atau di tampilan pada layar LCD atau lainnya. Siswa diberi kesempatan untuk mengamati gambar tersebut dengan diinstruksikan bahwa fokus pengamatannya adalah pada bentuk segi empat dan lingkaran beserta luasnya.
2. Instruksikan kepada siswa untuk saling berpasangan dengan teman sebelahnya, kemudian ajaklah siswa untuk saling berdiskusi.
3. Ambillah kertas kuarto untuk dibuat persegi dan lingkaran dengan panjang sisinya sama dengan panjang diameter lingkaran. Kemudian

bagilah dan guntinglah lingkaran tersebut menjadi 4 bagian yang sama besar (seperempat lingkaran). Selanjutnya tempellah keempat bagian lingkaran tersebut dengan posisi seperti pada gambar.

4. Tukarkan hasil kerja kelompok siswa dengan kelompok lain, kemudian berilah argumennya (apakah semua anggota kelompok memahami jawaban dari kelompok lain?). Kemudian, instruksikan kepada siswa untuk menuliskan kesimpulan dari hasil kegiatan ini.

Penguatan Karakter

Ajaklah siswa untuk memahami bagian dari "Penguatan Karakter" yang disajikan pada Buku Siswa agar materi yang telah dibahas dapat menumbuh-kembangkan karakter siswa dalam berkebinekaan global, cinta budaya, cinta hasil karya anak bangsa, dan cinta tanah air.

Ayo Bekerja Sama

Kemudian, ajaklah siswa untuk bekerja sama menjawab pertanyaan berikut.

Berdasarkan informasi tersebut, coba pikirkan bagaimana cara untuk mengukur panjang lengkungan jembatan yang berwarna merah. Perkirakan panjang lengkungan jembatan yang berwarna merah tersebut dan diskusikan dengan temanmu.

Ayo Bekerja Sama, Ayo Berkomunikasi, dan Ayo Berefleksi

Ajaklah siswa bekerja sama dengan teman sebangku untuk mendiskusikan kegitan Ayo Bekerja Sama, Ayo Berkomunikasi, dan Ayo Berefleksi yang disajikan pada Buku Siswa. Selanjutnya, tukarkan hasil jawabannya dengan hasil jawaban pada bangku yang lain. Buatlah kesepakatan terhadap hasil jawaban yang mereka anggap benar, kemudian dibahas secara klasikal.

Kunci Jawaban Ayo Berefleksi

1. Salinlah tabel berikut, kemudian lengkapi.

Jari-jari (cm)	π (pi)	Sudut pusat (°)	Panjang busur (cm)
21	$\frac{22}{7}$	60	22
1000	3,14	72	1256
7	$\frac{22}{7}$	90	11
42	$\frac{22}{7}$	120	88
100	3,14	18	31,4

2. 25,67 cm

Ayo Menggunakan Teknologi

Kemudian ajaklah siswa untuk melakukan kagiatan literasi digital dengan mengunjungi laman di samping.

https://www.geogebra.org/m/VeD4ZbWe

Ajaklah siswa untuk menuliskan hasil percobaannya.

1. Jika sudut 20° dan diameter 20 cm, berapa jarak yang ditempuh untuk satu putaran roda?
2. Jika sudut 30° dan diameter 24 cm, berapa jarak yang ditempuh untuk satu putaran roda?
3. Jika sudut 40° dan diameter 28 cm, berapa jarak yang ditempuh untuk satu putaran roda?
4. Jika sudut 50° dan diameter 20 cm, berapa jarak yang ditempuh untuk satu putaran roda?
5. Jika sudut 60° dan diameter 24 cm, berapa jarak yang ditempuh untuk satu putaran roda?

6. Jika sudut 70° dan diameter 28 cm, berapa jarak yang ditempuh untuk satu putaran roda?
7. Jika sudut 80° dan diameter 20 cm, berapa jarak yang ditempuh untuk satu putaran roda?
8. Jika sudut 90° dan diameter 24 cm, berapa jarak yang ditempuh untuk satu putaran roda?

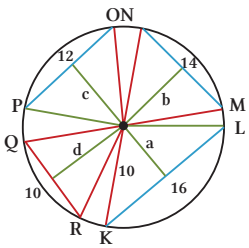
Arahkan siswa untuk membuat kesimpulan dari kegiatan literasi digital.

Pembahasan Latihan 2.1

1. Panjang jari-jari lingkaran A sebesar 10 cm. Apabila pada lingkaran A terdapat beberapa tali busur yaitu busur KL, MN, OP, dan QR dengan berturut-turut panjangnya adalah 16 cm, 14 cm, 12 cm, dan 10 cm, manakah dari apotema tersebut yang terpanjang jika dibangun dari pusat lingkaran A di sekitar setiap tali busur?

   Alternatif penyelesaian:

   Perhatikan ilustrasi gambar berikut.



   Misalkan: a panjang apotema pada tali busur KL
   b panjang apotema pada tali busur MN
   c panjang apotema pada tali busur OP
   d panjang apotema pada tali busur QR

   $a = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$

   $b = \sqrt{10^2 - 7^2} = \sqrt{51} = 7{,}14$

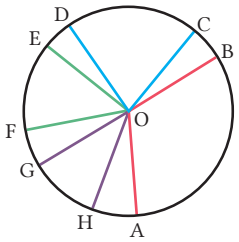
   $c = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$

   $d = \sqrt{10^2 - 5^2} = 5\sqrt{3} = 8{,}66$

   Jadi, apotema terpanjang yang terbentuk dari keempat tali busur adalah tali busur QR.

2. Diketahui pada suatu lingkaran terdapat empat busur, yaitu busur $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{CD}$, $\overset{\frown}{EF}$, dan $\overset{\frown}{GH}$. Panjang $\overset{\frown}{AB}$ > panjang $\overset{\frown}{CD}$ > panjang $\overset{\frown}{EF}$ > panjang $\overset{\frown}{GH}$. Jika pada masing-masing busur tersebut dibuat sudut pusat yang bersesuaian, maka menghadap sudut apakah sudut pusat terkecil tersebut?

Alternatif penyelesaian:



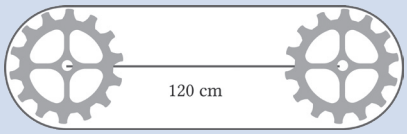
Perhatikan ilustrasi gambar berikut.

Diketahui panjang $\overset{\frown}{AB}$ > panjang $\overset{\frown}{CD}$ > panjang $\overset{\frown}{EF}$ > panjang $\overset{\frown}{GH}$

Sudut pusat terkecil tersebut busur GH.

3. **Ayo Mencoba**

Ada dua roda gigi yang memiliki jari-jari yang sama yaitu 28 cm. Tentukan panjang sabuk lilitan yang diperlukan agar dapat melingkari kedua roda gigi tersebut jika jarak antara pusat kedua roda adalah 120 cm.



Alternatif penyelesaian

Panjang sabuk lilitan minimum = jarak antara pusat kedua roda + keliling lingkaran

$$= 120 \times 2 + 2 \times \frac{22}{7} \times 28$$

$$= 416 \text{ cm}$$

Panjang sabuk lilitan minimum yang diperlukan adalah 416 cm.

4. **Ayo Berpikir Kritis**

Menurut Wafi, makin panjang busur lingkaran, maka makin besar juga sudut pusat yang menghadap busur tersebut. Apabila panjang busur diperkecil, maka ukuran sudut pusat yang berhadapan dengan busur tersebut juga berkurang. Apakah kalian setuju dengan pernyataan Wafi? Jelaskan.

Alternatif penyelesaian:

Setuju, panjang dan pendeknya suatu busur lingkaran yang menghadap busur yang sama dengan sudut pusatnya, tergantung pada besar dan kecilnya sudut lingkarannya.

5.

Ayo Berkomunikasi

Perhatikan tabel di samping. Jajak pendapat *online* dilakukan untuk menentukan jumlah *file* musik yang dimiliki dan diterima melalui pengunduhan gratis.

Free Music Downloads	
How many free music files have you collected:	
100 files or less	76%
101 to 500 files	16%
501 to 1000 files	5%
More than 1000 files	3%

Sumber: *QuickTake.com*

a. Tentukan setiap ukuran sudut pusat setiap kategori tersebut jika kalian membuat diagram lingkaran dari data ini.

b. Gambarlah busur lingkaran yang sesuai kategori tersebut.

c. Buatlah diagram lingkaran dengan data pada tabel di samping.

Alternatif penyelesaian:

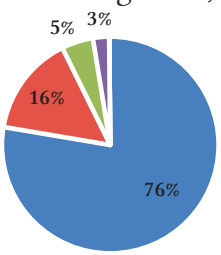
a. 100 files or less (76%) $= 76\% \times 360^\circ$
$= 273{,}6^\circ$

101 to 500 files (16%) $= 16\% \times 360^\circ$
$= 57{,}6^\circ$

501 to 1000 files (5%) $= 5\% \times 360^\circ$
$= 18^\circ$

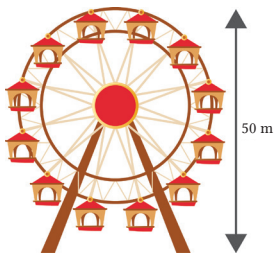
more than 1000 files (3%) $= 16\% \times 360^\circ$
$= 10{,}8^\circ$

b. busur lingkaran, dan c. diagram lingkarannya



6. **Ayo Bereksplorasi**

Suatu Kincir Ria yang ditunjukkan sepertigambar di samping memiliki diameter 50 m. Jika busur baja yang menghubungkan satu mobil penumpang ke mobil penumpang lainnya berbentuk lingkaran. Tentukan panjang setiap busur baja yang menghubungkan setiap mobil penumpang.



Alternatif penyelesaian:

Besar sudut setiap busur baja adalah $\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$

Sehingga panjang busurnya $= \frac{30^\circ}{360^\circ} \times 2\pi r$

$= \frac{1}{12} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 25$

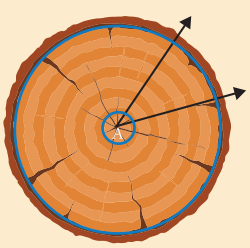
$= 13{,}095$

Jadi, panjang setiap busur baja yang menghubungkan satu mobil penumpang ke mobil penumpang berikutnya adalah 13,095 m.

7. **Ayo Berpikir Kreatif**

Gunakan diagram yang ditunjukkan untuk menjawab setiap pertanyaan.

a. Jari-jari lingkaran pohon kecil (lingkaran kecil) adalah r, dan jari-jari lingkaran pohon yang lebih besar (lingkaran besar) adalah $10r$. Bagaimana panjang busur-busur kecil pada lingkaran pohon kecil dibandingkan dengan panjang busur-busur kecil pada lingkaran pohon besar?



b. Jika panjang busur kecil pada lingkaran pohon kecil sama dengan 3 inci, berapakah panjang busur besar pada lingkaran pohon besar?

c. Jika $m\angle A = 20°$, jari-jari lingkaran pohon kecil adalah r, jari-jari lingkaran pohon besar adalah 10r, dan panjang busur kecil lingkaran pohon kecil adalah 3 inci, tentukan keliling lingkaran pohon besar.

Guru dapat mengajak siswa untuk meningkatkan kesadaran lingkungan terutama masalah hutan meliputi perubahan iklim/pemanasan global, keanekaragaman hayati, pengolaan limbah, bencana alam.

Alternatif penyelesaian:

a. $\dfrac{\text{Panjang busur kecil}}{\text{Panjang busur kecil}} = \dfrac{{}^{\alpha}/_{360°} \times 2\pi r}{{}^{\alpha}/_{360°} \times 2\pi(10r)} = \dfrac{1}{10}$

b. Panjang busur kecil = 3, maka panjang busur besarnya $3 \times 10 = 30$ inci

c. Panjang busur kecil $= \dfrac{\alpha}{360°} \times 2\pi r$

$$3 = \frac{20°}{360°} \times 2\pi r$$

$$r = \frac{27}{\pi}$$

Keliling lingkaran pohon besar $= 2\pi(10r)$

$$= 2\pi \times 10 \times \frac{27}{\pi}$$

$$= 540$$

Jadi, keliling lingkaran pohon besar adalah 540 inci.

B. Juring Lingkaran

Guru meminta siswa untuk mengingat kembali elemen-elemen lingkaran yang telah dibahas sebelumnya, dan khususnya elemen-elemen lingkaran sebagai juring lingkaran dan sudut pusatnya sebelum memulai kegiatan ini. Tujuan kegiatan ini adalah agar siswa dapat menentukan panjang busur lingkaran dan luas juringnya.

Kemudian, guru mengajak siswa untuk memahami Definisi dari luas juring lingkaran beserta syarat berlakunya.

Definisi 2.1

Luas juring lingkaran adalah suatu daerah ruang tertutup di dalam batas suatu juring. Sebuah juring selalu berasal dari pusat lingkaran. Juring lingkaran didefinisikan sebagai bagian dari lingkaran yang tertutup antara dua jari-jarinya dan busur yang menghubungkannya. Setengah lingkaran adalah juring paling umum dari sebuah lingkaran, yang mewakili setengah lingkaran.

Ajaklah siswa untuk mengamati dengan cermat contoh permasalahan sepotong piza pada Gambar 10 untuk dapat dihubungkan dengan elemen-elemen lingkaran, definisi luas juring, dan bagian-bagian dari suatu juring lingkaran. Elemen-elemen lingkaran tersebut adalah sebagai berikut.

No.	Nama Elemen	Ciri-ciri
	Juring	✓ Berbentuk suatu daerah pada lingkaran ✓ Suatu daerah yang dibatasi oleh satu busur dan dua jari-jari lingkaran ✓ Titik ujung busur lingkaran dibatasi oleh kedua jari-jari lingkaran
	Sudut pusat	✓ Kedua kaki sudutnya terbentuk dari kedua sinar garis ✓ Kedua kaki sudutnya berhimpitan dengan jari-jari lingkaran ✓ Titik sudutnya merupakan titik pusat lingkaran

Keterangan:
Bila tidak dinyatakan sebagai minor atau mayor, istilah juring atau sudut dianggap sebagai minor.

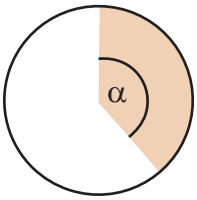
Ayo Bereksplorasi

Guru mendorong siswa untuk mempelajari representasi busur, juring, dan sudut pusat pada Gambar 1. Guru diharapkan memberikan gambar busur

lingkaran dan juringnya yang sesuai dengan sudut pusat lainnya. Tujuannya adalah untuk meningkatkan rasa ingin tahu di kalangan siswa tentang hubungan sudut pusat lingkaran dan panjang busur dan luas juringnya.

Tabel 2.2 menyajikan hubungan antara sudut pusat dan luas juring pada kegiatan eksplorasi kedua ini. Guru mendorong siswa untuk melihat gambar yang cocok dengan sudut pusat lingkaran dan sudut pusatnya yang sesuai. Ukuran sudut pusat dipilih sehingga siswa dapat dengan mudah melihatnya. Jika diperlukan, guru dapat menampilkan gambar beberapa juring lingkaran dengan sudut pusat yang berbeda.

Ayo Berdiskusi



Guru meminta siswa untuk memperdebatkan pertanyaan pada Gambar 1 dan Tabel 2.2 di Buku Siswa. Guru kemudian mempersilakan siswa untuk mengungkapkan minatnya dalam bentuk pertanyaan terhadap objek yang diamati. Pertanyaan ditujukan kepada ide-ide pembelajaran. Beberapa contoh pertanyaan adalah:

1. Apa yang dapat kalian ketahui tentang hubungan sudut pusat lingkaran dengan luas juringnya?
2. Benarkah bahwa apabila makin bertambah besar sudut pusat lingkaran, maka akan makin bertambah besar juga luas juring yang sehadap?
3. Bagaimana caranya kalian menentukan keliling juring lingkaran?
4. Bagaimana dengan luas daerah perpotongan tali busur dengan panjang busur lingkaran (tembereng)?

Tahukah Kalian

Guru meminta siswa untuk mengetahui lebih lanjut tentang ciri-ciri elemen lingkaran. Salah satu caranya adalah dengan mendorong siswa untuk membuat sketsa bentuk yang berbeda dari setiap elemen lingkaran.

Ayo Berpikir Kritis

Coba kalian pikirkan dua pernyataan berikut. Menurut kalian, manakah pernyataan berikut yang lebih luas?

a. Sebuah juring lingkaran A dengan jari-jari r dan sudut pusat α, ataukah

b. Sebuah juring lingkaran B dengan jari jari $2r$ dan sudut pusat $\frac{1}{2}\alpha$.

Petunjuk Guru untuk kegiatan Ayo Berpikir Kritis

1. Daftarlah siswa yang memilih juring lingkaran A dan juring lingkaran B dengan cara mengacungkan tangan bagi yang memilih lingkaran A dan lingkaran B. Kemudian, buatlah kelompok siswa yang heterogen berdasarkan pilihan siswa. Selanjutnya, ajaklah siswa untuk menyusun argumen atas pilihannya, mengapa memilih juring lingkaran A dan mengapa memilih juring lingkaran B.
2. Guru melakukan pemodelan dengan mendorong siswa untuk berpikir krtitis. Arahkan/pancinglah siswa untuk membuktikannya dengan cara melakukan subsitusi besar sudut dan besar jari-jarinya pada rumus luas juring lingkaran. Besar sudut dapat dimisalkan dalam bentuk angka, misalkan seperti berikut.

Jawaban A	Jawaban B
Diketahui: besar sudut = α, dan jari-jari = r Luas juring A $= \frac{a^\circ}{360^\circ} \times \pi r^2$ $= \frac{\alpha}{360^\circ} \times \pi r^2$ Jadi, luas juring A adalah $\frac{\alpha}{360^\circ} \times \pi r^2$.	Diketahui: besar sudut $= \frac{1}{2}\alpha$, dan jari-jari $= 2r$ Luas juring B $= \frac{a^\circ}{360^\circ} \times \pi r^2$ $= \frac{\frac{1}{2}\alpha}{360^\circ} \times \pi(2r)^2$ $= \frac{\alpha}{2 \times 360^\circ} \times \pi \times 4r^2$ $= 2 \times \frac{\alpha}{360^\circ} \times \pi r^2$ Jadi, luas juring B adalah $\frac{\alpha}{360^\circ} \times 2\pi r^2$.

3. Berikut alternatif mengarahkan/memancing siswa agar bisa mengerjakan seperti kedua jawaban tersebut dengan memberikan beberapa pertanyaan.
   a. Coba perhatikan besar sudut dan panjang jari-jari lingkaran A dan B.
   b. Apabila besar sudut lingkaran A adalah 60° dan panjang jari-jarinya 7 cm, sehingga besar sudut lingkaran B menjadi 30° dan panjang jari-jarinya 14 cm, coba tentukan luas juring keduanya.
   c. Coba diskusikan, apakah besar sudut dan panjang jari-jari lingkaran A memiliki hubungan terkait dengan besar sudut dan panjang jari-jarinya?
   d. Kemudian, coba diskusikan juga bagaimana kalau besar sudut dan panjang jari-jari langkaran A dengan lingkaran B tidak memiliki hubungan terkait besar sudut dan panjang jari-jarinya, sehingga besar sudut pada lingkaran B bukan setengah dari besar sudut lingkaran A, begitu juga panjang jari-jarinya.
4. Ajaklah siswa untuk berdiskusi dalam kelompoknya masing-masing dengan menyusun argumen dengan alasan yang kuat untuk mendukung pilihannya tersebut.
5. Instruksikan kepada masing-masing kelompok siswa untuk mempresentasikan hasil dikusi yang didapat oleh kelompok masing-masing, kemudian simpulkan.

Berikut Alternatif Kesimpulan yang Didapat dengan Bernilai Benar

1. **Bisa jadi Lingkaran A**, apabila besar sudut dan panjang jari-jarinya tidak memiliki hubungan di antara keduanya.
2. **Lingkaran B**, karena berdasarkan perhitungan pada tabel tersebut diperoleh bahwa luas juring lingkaran B lebih besar daripada luas juring lingkaran A.

Ayo Berpikir Kreatif

Sebuah lingkaran dengan jari-jari r dan sudut pusat $\frac{1}{2}\alpha$ terdapat luas juring yang sama besar dengan luas lingkaran yang jari-jarinya r dan sudut pusatnya α. Carilah luas lingkaran lain yang jari-jari dan sudut

pusatnya berbeda dari contoh tersebut, sehingga panjangnya sama dengan luas juring lingkaran dengan jari-jari r dan sudut pusat α. Buatlah setidaknya tiga juring lingkaran.

Petunjuk Guru untuk kegiatan Ayo Berpikir Kritis

1. Ajaklah siswa untuk mengilustrasikan dalam bentuk gambar untuk kedua lingkaran tersebut.

   (*Gambar 2 lingkaran yang luas juringnya sama dengan luas lingkaran kedua*)

2. Berikut ini beberapa alternatif jawaban yang dapat ditemukan.

Jawaban Alternatif	Jari-jari	Sudut Pusat
Alternatif 1	4r	$\frac{1}{16}\alpha$
Alternatif 2	3r	$\frac{1}{9}\alpha$
Alternatif 3	2r	$\frac{1}{4}\alpha$

   Kemudian siswa memahami Contoh 2.3 dan 2.4 serta uraian pada alternatif jawaban yang disajikan.

Tahukah Kalian

Guru meminta siswa untuk mengetahui lebih lanjut tentang ciri-ciri elemen lingkaran. Salah satu caranya dengan mendorong siswa untuk membuat sketsa bentuk yang berbeda dari setiap elemen lingkaran.

Guru memungkinkan siswa untuk membangun makna menggunakan kata-kata mereka sendiri dengan menggabungkan kualitas yang dilihat dan dipahami. Dalam situasi ini, guru tidak harus mendefinisikan frase terlalu matematis. Guru memberikan bimbingan jika dirasa siswa masih belum memahami setiap aspek.

Ayo Menggunakan Teknologi

Kemudian ajaklah siswa untuk melakukan kagiatan literasi digital dengan mengunjungi laman berikut.

Menghitung Luas Juring Lingkaran	Luas Juring Lingkaran dengan Animasi	Luas Juring Lingkaran dengan Rad
https://s.id/HitungLuasJuring	https://s.id/LuasJuringAnimasi	https://s.id/LuasJuringRad

Pembahasan Latihan 2.2

1. Salinlah tabel berikut, kemudian lengkapi.

Jari-jari (cm)	π (pi)	Sudut pusat (°)	Luas juring (cm^2)
...	3,14	25	31,4
90	3,14	...	8478
6	3,14	100	...

Alternatif penyelesaian:

$$\text{Luas Juring I} = \frac{\alpha}{360^\circ} \times \pi r^2$$

$$31{,}4 = \frac{25^\circ}{360^\circ} \times 3{,}14 \times r^2$$

$$r^2 = \frac{3{,}14}{31{,}4} \times 14{,}4$$

$$r^2 = 1{,}44$$

$$r = 1{,}2$$

$$\text{Luas Juring II} = \frac{\alpha}{360^\circ} \times \pi r^2$$

$$8478 = \frac{\alpha}{360^\circ} \times 3{,}14 \times 90^2$$

$$\alpha = \frac{8478}{3{,}14 \times 8100} \times 360^\circ$$

$$\alpha = 120^\circ$$

$$\text{Luas Juring III} = \frac{\alpha}{360^\circ} \times \pi r^2$$

$$= \frac{100}{360^\circ} \times 3{,}14 \times 6^2$$

$$= 31{,}4$$

Jari-jari (cm)	π (pi)	Sudut pusat (°)	Luas juring (cm²)
1,2	3,14	25	31,4
90	3,14	120	8478
6	3,14	100	31,4

2. Tentukan luas juring lingkaran yang berjari-jari 10 cm dan sudut pusatnya sebesar 70°.

Alternatif penyelesaian:

$$\text{Luas juring} = \frac{\alpha}{360^\circ} \times \pi r^2$$

$$= \frac{70}{360^\circ} \times 3{,}14 \times 10^2$$

$$= 61{,}06$$

Jadi, luas juring lingkarannya adalah 61,06 cm²

3. Ibu Sulastri ingin membagi kue bolu menjadi enam bagian sama besar. Berapakah posisi sudut pusat masing-masing bagian? Dan seberapa besar bagian dasar setiap potong kue?

Alternatif penyelesaian:

Posisi sudut pusat masing-masing bagian sebesar 60°, dan luas bagian dasar setiap potong kue adalah $\frac{1}{6}$ bagian kue.

4. **Ayo Berpikir Kreatif**

Apabila panjang jari-jari lingkaran A adalah 14 cm, maka bagaimana cara menghitung panjang jari-jari lingkaran lain dan besar sudut pusatnya agar luas juringnya sama dengan lingkaran A? Jelaskan.

Alternatif penyelesaian:

Salah satu caranya adalah panjang jari-jari lingkaran lain diperbesar menjadi 2 kali lipat dari panjang jari-jari lingkaran A dan besar sudut pusat juring tersebut adalah 90°.

5. **Ayo Berpikir Kreatif**

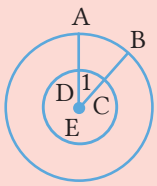
Bagaimana cara membuat lingkaran O dengan panjang jari-jari tertentu yang luasnya sama dengan luas juring pada lingkaran P dengan sudut pusat dan jari-jari tertentu juga? Jelaskan.

Alternatif penyelesaian:

Salah satu caranya adalah panjang jari-jari lingkaran P diperbesar menjadi 4 kali lipat dari panjang jari-jari lingkaran O dan besar sudut pusat juring tersebut adalah 90°.

6. **Ayo Berpikir Kritis dan Berkomunikasi**

Perhatikan gambar lingkaran di samping. Diketahui dua buah lingkaran tersebut konsentris dengan titik pusat E. Jika besar $\angle = 42°$, bagaimana caranya agar panjang busur AB dua kali busur CD?



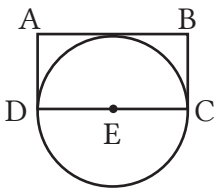
Petunjuk

Konsentris adalah dua buah bangun tertentu yang mempunyai sudut pusat yang sama.

Alternatif penyelesaian:

Kriterianya adalah panjang jari-jari lingkaran besar (busur AB) dua kali lipat dari panjang jari-jari lingkaran kecil (busur CD) dengan syarat besar sudutnya sama.

7. Perhatikan gambar di samping. Coba kalian bandingkan panjang keliling lingkaran E dengan panjang keliling persegi panjang ABCD. Tentukan manakah pernyataan berikut yang benar. Jelaskan.



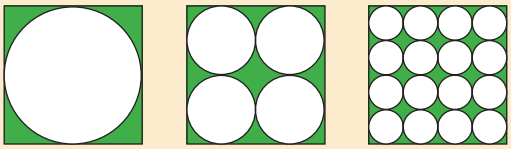
   a. Panjang keliling persegi panjang ABCD lebih besar daripada panjang keliling lingkaran E.
   b. Panjang keliling lingkaran E lebih besar dari panjang persegi panjang ABCD.
   c. Panjang keliling lingkaran E sama dengan panjang persegi panjang ABCD
   d. Informasi yang terdapat pada soal tidak cukup untuk menentukan perbandingan keliling keduanya.

Alternatif penyelesaian:

Pernyataan yang benar adalah pernyataan b, karena luas persegi panjang ABCD = 6r dan panjang keliling lingkaran E = $2\pi r$ (atau 6,286r).

8. **Ayo Berpikir Kreatif**

Perhatikan gambar di samping. Gambar di samping merupakan tiga gambar segi empat dengan ukuran sama. Di dalam segi empat tersebut terdapat lingkaran yang ukurannya sama. Tentukan daerah yang diarsir pada tiap-tiap persegi tersebut.



Alternatif penyelesaian:

Luas yang diarsir = Luas persegi – luas lingkaran

$= s^2 - \pi r^2$

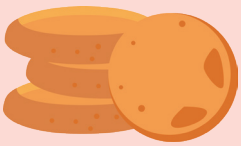
a. Luas yang diarsir untuk gambar 1 = Luas persegi – 1 kali luas lingkaran
$= 2r \times 2r - 1 \times \pi r^2$
$= 4r^2 - \pi.r.r$
$= r(4r - \pi r)$

b. Luas yang diarsir untuk gambar 2 = Luas persegi – 4 kali luas lingkaran
$= 4r \times 4r - 4 \times \pi r^2$
$= 16r^2 - 4\pi r.r$
$= 4r(4r - \pi r)$

c. Luas yang diarsir untuk gambar 3 = Luas persegi – 16 kali luas lingkaran
$= 8r \times 8r - 16\pi r^2$
$= 64r^2 - 16\pi r.r$
$= 16r(4r - \pi r)$

9.

Ayo Berpikir Kritis



Sebuah pabrik biskuit membuat biskuit sebanyak dua jenis yang berbentuk cakram dengan diameter yang berbeda, tetapi ketebalannya sama. Masing-masing kue kecil dan besar memiliki diameter 7 cm dan 10 cm. Dua paket berbeda dibungkus dalam biskuit. Sekotak kecil berisi 10 biskuit tersedia seharga Rp7.000,00, sedangkan paket besar berisi sebanyak 7 biskuit untuk dijual dengan harga Rp10.000,00. Manakah yang lebih menguntungkan, kemasan biskuit kecil ataukah kemasan biskuit besar? Jelaskan alasannya!

Alternatif penyelesaian:
Menguntungkan bagi penjual adalah kemasan biskuit kecil, sedangkan menguntungkan bagi pembeli adalah kemasan biskuit besar karena luas keseluruhannya lebih besar pada kemasan biskuit besar.

C. Hubungan Panjang Busur dan Luas Juring

Pertanyaan Pemantik
Arahkan siswa untuk memahami pertanyaan pemantik dengan sajian yang menarik agar siswa termotivasi untuk mempelajari materi tentang hubungan sudut pusat, panjang busur, dan luas juring lingkaran.

Tahukah Kalian

Guru mengarahkan siswa untuk memahami pelabelan busur dan juring lingkaran yang disajikan pada Buku Siswa tentang ilustrasi gambar juring, segitiga, garis, dan busur pada suatu lingkaran.

Ayo Bereksplorasi

Guru mengajak siswa untuk bereksplorasi agar dapat menjawab Pertanyaan Pemantik dan menambah pengetahuan pada bagian Tahukah Kalian? Guru dapat mendemonstrasikan dalam kehidupan nyata berbagai gambar instruktif terkait dengan hubungan sudut pusat lingkaran, panjang busur, dan luas juringnya. Tujuannya adalah untuk meningkatkan rasa ingin tahu siswa tentang hubungan sudut pusat lingkaran, panjang busur, dan luas juringnya.

Tabel 2.3 berfokus pada hubungan antara panjang busur dan luas juring pada kegiatan eksplorasi kedua ini. Guru meminta siswa untuk melihat gambar panjang busur dan luas juring yang cocok dengan sudut pusat. Ukuran sudut pusat dipilih sehingga siswa dapat dengan mudah melihatnya. Guru dapat menunjukkan gambar dengan sudut pusat yang berbeda dari panjang busur dan juring. Ajaklah siswa untuk menyimpulkan berdasarkan temuan mereka.

Ayo Mengerjakan Projek

Melalui Projek 2.2, guru memungkinkan siswa untuk melihat hubungan sudut pusat lingkaran, panjang busur, dan luas juringnya. Jika kegiatan ini dilakukan di dalam kelas, guru harus menginformasikan terlebih dahulu perlengkapan dan instrumen yang akan digunakan. Projek juga dapat digunakan untuk tugas siswa.

Ketika siswa mengerjakan dengan benar kegiatan Projek 2.2, perbandingan antara sudut pusat dan sudut putaran, panjang busur dan keliling lingkaran, serta luas juring lingkaran dan luas lingkaran akan didapat nilai yang sama. Dengan demikian, dapat ditulis seperti berikut:

$$\frac{\text{sudut pusat}}{\text{sudut satu putaran}} = \frac{\text{panjang busur } AB}{\text{keliling lingkaran}} = \frac{\text{luas juring } AOB}{\text{luas lingkaran}}$$

Tugas berikut mengundang siswa untuk menganalisis pertanyaan pada Contoh Soal 2.5 serta alternatif jawaban yang disajikan.

Ayo Mengingat Kembali

Ajaklah siswa untuk mengamati dengan cermat sajian pada Buku Siswa terkait dengan ciri-ciri tembereng lingkaran. Ajaklah siswa untuk memahami definisi dari tembereng lingkaran.

Ayo Bereksplorasi

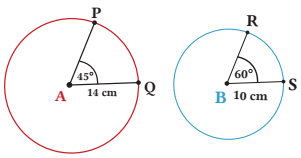
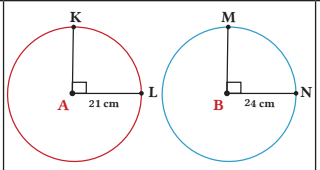
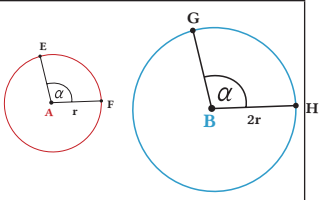
Guru mendorong siswa untuk mempelajari representasi sudut pusat lingkaran, busur, dan juring yang disajikan pada Gambar 13. Guru diharapkan memberikan gambar tembereng yang lainnya. Tujuannya adalah untuk meningkatkan rasa ingin tahu di kalangan siswa tentang menemukan rumus luas tembereng lingkaran.

Tugas berikut mengundang siswa untuk menganalisis pertanyaan pada Contoh Soal 2.6 serta alternatif penyelesaian yang disajikan.

Ayo Berpikir Kritis

Idris mengatakan bahwa apabila dua juring lingkaran mempunyai sudut pusat yang sama, maka kedua panjang busur tersebut sama panjang. Setujukah kalian dengan pernyataan Idris? Coba kalian jelaskan.

1. Berikan kepada siswa beberapa ilustrasi gambar atau tampilkan di papan tulis/layar LCD berdasarkan informasi pada Ayo Berpikir Kritis. Berikut alternatif ilustrasi gambar yang dapat mengarahkan siswa pada berpikir kritis.

Ilustrasi Gambar I	**Ilustrasi Gambar II**	**Ilustrasi Gambar II**
		
Lingkaran A dan B dengan besar sudut pusat 60° dan panjang jari-jari lingkarannya berbeda (berturut-turut adalah 14 cm dan 10 cm).	Lingkaran A dan B dengan besar sudut pusat 90° dan panjang jari-jari lingkarannya sama (21 cm).	Lingkaran A dan B dengan sudut pusat α dan panjang jari-jari berturut-turut adalah r dan $2r$ (panjang jari-jari lingkaran B dua kali panjang jari-jari lingkaran A).
Guru dapat menambahkan ilustrasi gambar yang lainnya dengan bentuk dan model yang berbeda. Kemudian carilah masing-masing luas juring dan panjang busur dari ketiga ilustrasi gambar tersebut.		

2. Berikut alternatif mengarahkan/memancing siswa agar bisa membuat seperti ketiga ilustrasi tersebut atau ilustrasi gambar lainnya.
   a. Coba perhatikan besar sudut dan panjang jari-jari dari lingkaran A dan B. Apakah luas juring dan panjang busurnya sama?
   b. Bagaimana jika panjang jari-jari dari kedua lingkaran tersebut sama atau berbeda?
   c. Berdasarkan pernyataan pada Ayo Berpikir Kritis, bisakah besar sudutnya berbeda? Bagaimana jika besar sudut dan panjang jari-jarinya berbeda?

d. Bagaimana jika panjang jari-jarinya dua kali lipat dari lingkaran lainnya?

e. Apa yang harus diperhatikan pada pernyataan tersebut?

3. Ajaklah siswa untuk berdiskusi dalam kelompoknya masing-masing dengan menyusun argumen dan data yang kuat untuk mendukung pilihan "setuju" atau "tidak setuju". Kemudian, instruksikan kepada masing-masing kelompok siswa untuk menemukan atau membuat masalah persamaan yang sejenis dengan langkah-langkah penyelesaian seperti pada Ayo Berpikir Kritis.
4. Instruksikan kepada masing-masing kelompok siswa untuk mempresentasikan hasil dikusi yang didapat oleh kelompok masing-masing, kemudian simpulkan.

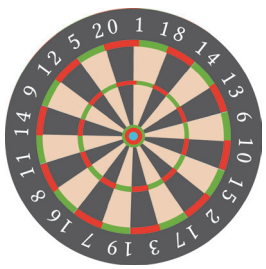
Berikut Alternatif Kesimpulan yang Didapat dengan Bernilai Benar

1. **Setuju**, dua luas juring lingkaran akan memiliki panjang busur yang sama apabila memiliki besar sudut dan panjang jari-jari yang sama.
2. **Tidak setuju**, karena panjang jari-jari dari kedua lingkaran tersebut belum tentu selamanya sama. Panjang busur dari kedua lingkaran tersebut akan berbeda dengan syarat panjang jari-jarinya berbeda juga.

Ayo Berpikir Kreatif

Langkah-langkah kegiatan Ayo Berpikir Kreatif ini diserahkan sepenuhnya kepada guru untuk menyusunnya sendiri sebagai latihan. Kemudian perkirakan sendiri juga kesimpulan yang didapat.

Papan *dart* standar ditampilkan. Setiap bagian papan dikelilingi oleh kawat dan angka skor permainan. Untuk satu lemparan, skor tertinggi dapat dicapai dengan mendaratkan anak panah di bagian paling tengah atau tepat sasaran pada papan *dart* tersebut.



Juring lingkaran adalah suatu daerah di dalam lingkaran yang dibatasi oleh satu busur lingkaran dan dua jari-jarinya. Papan *dart* dapat dibagi menjadi juring-juring yang kongruen.

a. Tentukan jumlah juring yang terdapat pada lingkaran terluar (perhatikan gambar di samping).
b. Tentukan besar sudut pusat dan besar busur potong yang dibentuk oleh masing-masing sektor.
c. Tentukan perbandingan panjang setiap busur yang dipotong dengan kelilingnya.
d. Tentukan perbandingan luas setiap bagian dengan luas lingkaran.
e. Tentukan luas masing-masing sektor lingkaran tersebut. Nyatakan jawaban kalian dalam bentuk π. Jelaskan bagaimana Anda menentukan daerah tersebut.

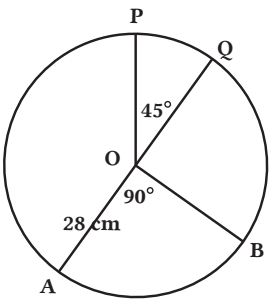
Ayo Menggunakan Teknologi

Kemudian ajaklah siswa untuk melakukan kagiatan literasi digital dengan mengunjungi laman di samping.

https://s.id/HubunganSudutBusurJuring

Pembahasan Latihan 2.3

1. Berdasarkan gambar di samping, tentukan perbandingan dari:



   a. besar $\angle$ POQ dengan $\angle$ AOB
   b. panjang $\overset{\frown}{PQ}$ dengan $\overset{\frown}{AB}$
   c. luas juring POQ dengan AOB

   Kemudian, kesimpulan apa yang didapat dari hasil a, b, dan c?

   Alternatif penyelesaian:

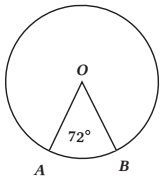
   a. $\dfrac{\angle POQ}{\angle AOB} = \dfrac{45°}{90} = \dfrac{1}{2}$

b. $\frac{\overset{\frown}{PQ}}{\overset{\frown}{AB}} = \frac{{}^{45^\circ}\!/_{360} \times 2\pi r}{{}^{90^\circ}\!/_{360} \times 2\pi r} = \frac{1}{2}$

c. $\frac{\text{Luas juring } POQ}{\text{Luas juring } AOB} = \frac{{}^{45^\circ}\!/_{360} \times 2\pi r}{{}^{90^\circ}\!/_{360} \times 2\pi r} = \frac{1}{2}$

Kesimpulannya adalah bahwa perbandingan besar sudut pusat lingkaran sebanding dengan panjang busur dan luas juringnya.

2. Apabila diketahui panjang busur AB adalah 6,28 cm, maka bagaimana cara kalian menemukan panjang jari-jari lingkaran tersebut? Jelaskan.



Alternatif penyelesaian:

Cara menemukan panjang jari-jari lingkaran tersebut dengan menginput nilai yang diketahui pada rumus luas juring, yakni sebagai berikut.

Panjang busur AOB $= \frac{72^\circ}{360^\circ} \times 2\pi r$

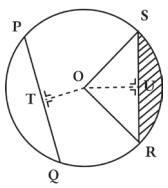
$$6{,}28 = \frac{1}{5} \times 2\pi r$$

$$r = \frac{6{,}28 \times 5}{2\pi}$$

$$r = \frac{6{,}28 \times 5}{2 \times 3{,}14}$$

$$r = 5$$

3. Pada gambar di samping diketahui panjang jari-jari lingkaran 14 cm, panjang tali busur PQ = 20 cm, panjang tali busur RS = 16 cm, dan besar sudut ROS = 90°, maka tentukan panjang dan luas terbentuk:



a. apotema TO,
b. apotema OU,
c. juring ROS,
d. segitiga ROS,
e. tembereng RS.

Alternatif penyelesaian:

a. apotema TO $= \sqrt{14^2 - 10^2}$

$= \sqrt{196 - 100}$

$= \sqrt{96}$

$= 4\sqrt{6}$

b. apotema OU $= \sqrt{14^2 - (8)^2}$

$= \sqrt{196 - 64}$

$= \sqrt{132}$

$= 2\sqrt{33}$

c. juring ROS $= \frac{90^\circ}{360^\circ} \times \pi r^2$

$= \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times 14^2$

$= \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times 196$

$= \frac{1078}{7}$

$= 154$

d. segitiga ROS $= \frac{1}{2} \times RS \times OU$

$= \frac{1}{2} \times 16 \times 2\sqrt{33}$

$= 16\sqrt{33}$

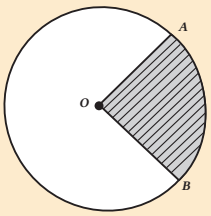
e. tembereng RS = luas juring ROS – segitiga ROS

$= 154 - 16\sqrt{33}$

4.

Ayo Berpikir Kreatif

Sebuah lingkaran dengan titik pusatnya di titik O memiliki luas daerah yang diarsir sebesar 20% dari luas lingkaran tersebut. Berapa besar ∠AOB?



Alternatif penyelesaian

Luas juring $= \frac{\alpha}{360^\circ}\pi r^2$ dan luas juring $= 20\% \times \pi r^2$

Sehingga:

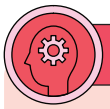
$\frac{\alpha}{360^\circ}\pi r^2 = 20\% \times \pi r^2$

$\alpha = 20\% \times 360^\circ$

$\alpha = \frac{20}{100} \times 360^\circ$

$\alpha = 72^\circ$

5.

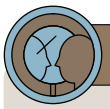


Ayo Berpikir Kritis

Menurut Ahmad, makin besar sudut pusat lingkaran, maka makin besar panjang busur dan luas juringnya. Sementara itu, Durahman menyatakan bahwa makin sempit sudut pusat lingkaran, maka makin kecil panjang busur dan ukuran luas juring lingkarannya. Apakah Anda setuju dengan pendapat Ahmad atau Durahman? Nyatakan sudut pandang kalian yang didukung dengan bukti.

Alternatif penyelesaian

Setuju dengan pendapat Ahmad dan Durahman, karena memang benar kedua pernyataan tersebut bahwa makin besar sudut pusat lingkaran, maka makin besar panjang busur dan luas juringnya; dan makin kecil panjang busur dan ukuran luas juring lingkarannya.



Ayo Berefleksi

Guru mengajak siswa melaksanakan refleksi materi busur dan juring lingkaran. Ajaklah siswa untuk menuliskan beberapa hal penting yang telah didapat oleh siswa dari belajar materi busur dan juring lingkaran. Berikut daftar pertanyaannya.

1. Bagaimana hubungan sudut pusat lingkaran dengan sudut kelilingnya yang menghadap busur yang sama?
2. Bagaimana hubungan sudut pusat lingkaran dengan panjang busurnya?
3. Bagaimana hubungan sudut pusat lingkaran dengan luas juringnya?
4. Bagaimana hubungan sudut pusat lingkaran, panjang busur, dan luas juringnya?

Uji Kompetensi 2

A. Soal Pilihan Ganda

1. Apabila panjang busur lingkaran adalah 16,5 cm, maka besar sudut pusat lingkaran tersebut dengan diameter lingkaran 42 cm adalah .... ($\pi = \frac{22}{7}$)

   A. 180^o C. 90^o

   B. 135^o D. 45^o

   Alternatif penyelesaian:

   Panjang busur lingkaran $= \frac{\alpha}{360^\circ} \times 2\pi r$

   $$16{,}5 = \frac{\alpha}{360^\circ} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 21$$

   $$16{,}5 = \frac{\alpha}{360^\circ} \times 132$$

   $$\alpha = \frac{16{,}5}{132} \times 360^\circ$$

   $$\alpha = 45^\circ$$

2. Diketahui sebuah busur lingkaran dengan panjang jari-jari 21 cm dan sudut pusat 30° memiliki panjang ... cm. ($\pi = \frac{22}{7}$)

   A. 11 C. 110

   B. 12 D. 120

   Alternatif penyelesaian:

   Panjang busur lingkaran $= \frac{\alpha}{360^\circ} \times 2\pi r$

   $$= \frac{\alpha}{360^\circ} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 21$$

   $$= \frac{1}{12} \times 132$$

   $$= 11$$

3. Luas juring lingkaran memiliki besar sudut pusat 90°. Apabila luas juring lingkaran tersebut adalah 78,5, maka jari-jari lingkarannya adalah ... cm. ($\pi = 3{,}14$)

   A. 7 C. 49

   B. 10 D. 100

Alternatif penyelesaian:

$$\text{Luas juring} = \frac{\alpha}{360^\circ} \times \pi r^2$$
$$78{,}5 = \frac{90^\circ}{360^\circ} \times 3{,}14 \times r^2$$
$$78{,}5 = \frac{1}{4} \times 3{,}14 \times r^2$$
$$r^2 = \frac{4}{3{,}14} \times 78{,}5$$
$$r^2 = 100$$
$$r = 10$$

4. Panjang busur sebuah lingkaran adalah 44 cm. Apabila sudut pusat busurnya adalah 120°, maka jari-jari lingkaran tersebut adalah ... cm. ($\pi = \frac{22}{7}$)

A. 28 C. 14

B. 21 D. 7

Alternatif penyelesaian:

$$\text{Panjang busur lingkaran} = \frac{\alpha}{360^\circ} \times 2\pi r$$
$$44 = \frac{120^\circ}{360^\circ} \times 2 \times \frac{22}{7} \times r$$
$$1 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{7} \times r$$
$$r = 21$$

5. Luas juring lingkaran diketahui 57,75 cm^2. Apabila sudut pusat yang bersesuaian dengan juring lingkaran tersebut adalah sebesar 60°, maka jari-jari lingkaran adalah ... cm. ($\pi = \frac{22}{7}$)

A. 7 C. 14

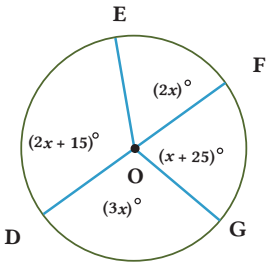
B. 10,5 D. 17,5

Alternatif penyelesaian:

$$\text{Luas juring} = \frac{\alpha}{360^\circ} \times \pi r^2$$
$$57{,}75 = \frac{60^\circ}{360^\circ} \times \frac{22}{7} \times r^2$$
$$57{,}75 = \frac{1}{6} \times \frac{22}{7} \times r^2$$
$$r^2 = \frac{6 \times 7}{22} \times 57{,}75$$
$$r^2 = 110{,}25$$
$$r = 10{,}5$$

B. Soal Uraian

6. Pada gambar berikut ini, diketahui panjang busur EF = 8 cm. Tentukan:



   a. nilai x
   b. panjang $\overset{\frown}{DE}$
   c. panjang $\overset{\frown}{FG}$
   d. panjang $\overset{\frown}{DG}$

Alternatif penyelesaian:

a. $2x + (x + 25)^\circ + 3x + (2x + 15)^\circ = 360^\circ$

$$8x + 40^\circ = 360^\circ$$
$$8x = 360^\circ - 40^\circ$$
$$x = \frac{320}{8}$$
$$x = 40^\circ$$

b. panjang $\overset{\frown}{DE}$

panjang busur EF $= \frac{\alpha}{360^\circ} \times 2\pi r$

$$8 = \frac{80^\circ}{360^\circ} \times 2 \times \frac{22}{7} \times r$$
$$8 = \frac{8}{36} \times \frac{44}{7} \times r$$
$$1 = \frac{1}{36} \times \frac{44}{7} \times r$$
$$r = \frac{7}{44} \times 36$$
$$r = 5{,}73$$

Sehingga:

panjang $\overset{\frown}{DE} = \frac{\alpha}{360^\circ} \times 2\pi r$

$$= \frac{95^\circ}{360^\circ} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 5{,}73$$
$$= \frac{19}{72} \times \frac{44}{7} \times 5{,}73$$
$$= \frac{836}{504} \times 5{,}73$$
$$= 9{,}5$$

c. panjang $\overset{\frown}{FG} = \frac{\alpha}{360^\circ} \times 2\pi r$

$$= \frac{65^\circ}{360^\circ} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 5{,}73$$

$$= \frac{13}{72} \times \frac{44}{7} \times 5{,}73$$
$$= \frac{572}{504} \times 5{,}73$$
$$= 6{,}5$$

d. panjang $\widehat{DG} = \frac{\alpha}{360^\circ} \times 2\pi r$
$$= \frac{120^\circ}{360^\circ} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 5{,}73$$
$$= \frac{1}{3} \times \frac{44}{7} \times 5{,}73$$
$$= \frac{44}{21} \times 5{,}73$$
$$= 12{,}01$$

7. **Ayo Bereksplorasi**

Sebuah pabrik memproduksi biskuit dalam bentuk lingkaran dengan diameter 5 cm. Perusahaan juga ingin memproduksi biskuit dengan ketebalan yang sama tetapi berbentuk juring dengan sudut tengah 90°. Tentukan diameter biskuit sehingga memiliki bentuk yang sama dengan bentuk biskuit lingkaran!

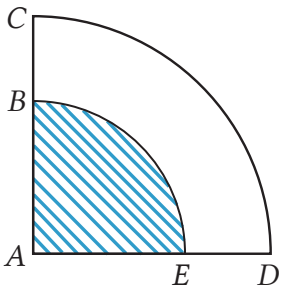
Alternatif penyelesaian:

Luas lingkaran dengan diameter 5 cm $= \frac{1}{4} \times$ juring dengan sudut 90°

$$\pi r_a^{\,2} = \frac{1}{4} \times \pi r_b^{\,2}$$
$$\pi\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \times \pi r_b^{\,2}$$
$$\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \times r_b^{\,2}$$
$$r_b^{\,2} = \left(\frac{5}{2}\right)^2 \times 4$$
$$r_b^{\,2} = \frac{25}{4} \times 4$$
$$r_b^{\,2} = 25$$
$$r_b = 5$$

Jadi, diameter biskuit sehingga memiliki bentuk yang sama dengan bentuk biskuit lingkaran adalah 10 cm.

8. Diketahui luas daerah arsiran sebesar setengah luas daerah yang tidak terarsir. Tentukan perbandingan panjang AB dengan panjang AC.



Alternatif penyelesaian:

luas daerah arsiran : luas daerah seluruhnya

$= \frac{1}{4}\ \pi AB^2 : \frac{1}{4}\ \pi AC^2$

$1 : 3 = AB^2 : AC^2$

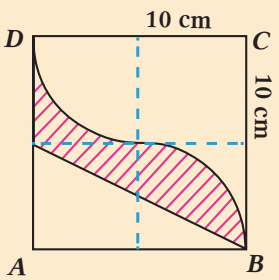
$\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{1}{3}$

$\frac{AB}{AC} = \sqrt{\frac{1}{3}}$

$\frac{AB}{AC} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$

9. **Ayo Berpikir Kreatif**

Persegi ABCD diketahui terdiri dari empat segi empat yang berukuran sama dengan panjang sisi-sisinya sepanjang 10 cm. Berapakah luas daerah yang terarsir pada gambar di samping? Jelaskan tanggapan kalian.



Alternatif penyelesaian:

Luas daerah yang diarsir merupakan luas persegi kecil, coba pindahkan luas yang diarsir dengan menyusun pada persegi kecil yang panjang sisinya 10 cm, maka luas yang diarsir sebesar $10 \times 10 = 100\ cm^2$.

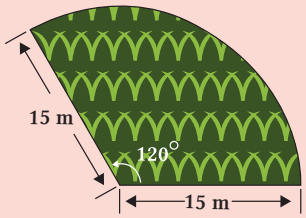
10. **Ayo Berpikir Kritis**

Gunakan pengetahuan kalian tentang ukuran derajat busur dan sudut pusat untuk menjawab pertanyaan-pertanyaan berikut yang berkaitan dengan ukuran linier dan ukuran luas pada

sistem penyiraman irigasi untuk mengairi lahan pertanian (lihat gambar di samping).

a. Berapakah luas bagian sawah yang dialiri air yang merupakan bidang lingkaran dengan jari-jari 15 meter?

b. Jika petani ingin memagari bagian lahan ini, berapa panjang pagar yang dibutuhkan?



Alternatif penyelesaian:

a. Apabila diasumsikan luas bagian sawah yang dialiri air adalah seluruh bagian sawah tersebut teraliri air, maka luas ini merupakan luas juring dengan sudut pusat 120 dengan jari-jari 15 m, sehingga luasnya sebagai berikut.

$$\text{Luas juring} = \frac{\alpha}{360^\circ} \times \pi r^2$$
$$= \frac{120^\circ}{360^\circ} \times \frac{22}{7} \times 15^2$$
$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 225$$
$$= 235{,}71 \text{ m}$$

Akan tetapi, apabila luas bagian sawah yang dialiri air dan yang tertera pada gambar hanyalah aliran air di sela-sela tanaman, maka untuk menghitung luasnya diperlukan informasi lain agar luas tersebut dapat ditentukan, sebagai contoh berapa lebar aliran air tersebut dengan batas seperti pada gambar.

b. Panjang bagian pagar ladang = 2 × 15 + panjang busur dengan sudut pusat 120°

$$= 30 + \frac{\alpha}{360^\circ} \times 2\pi r$$
$$= 30 + \frac{120^\circ}{360^\circ} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 15$$
$$= 30 + \frac{1}{3} \times \frac{660}{7}$$
$$= 30 + 31{,}43$$
$$= 61{,}43 \text{ m}$$

“Matematika adalah kunci dan pintu menuju ilmu-ilmu pengetahuan.”

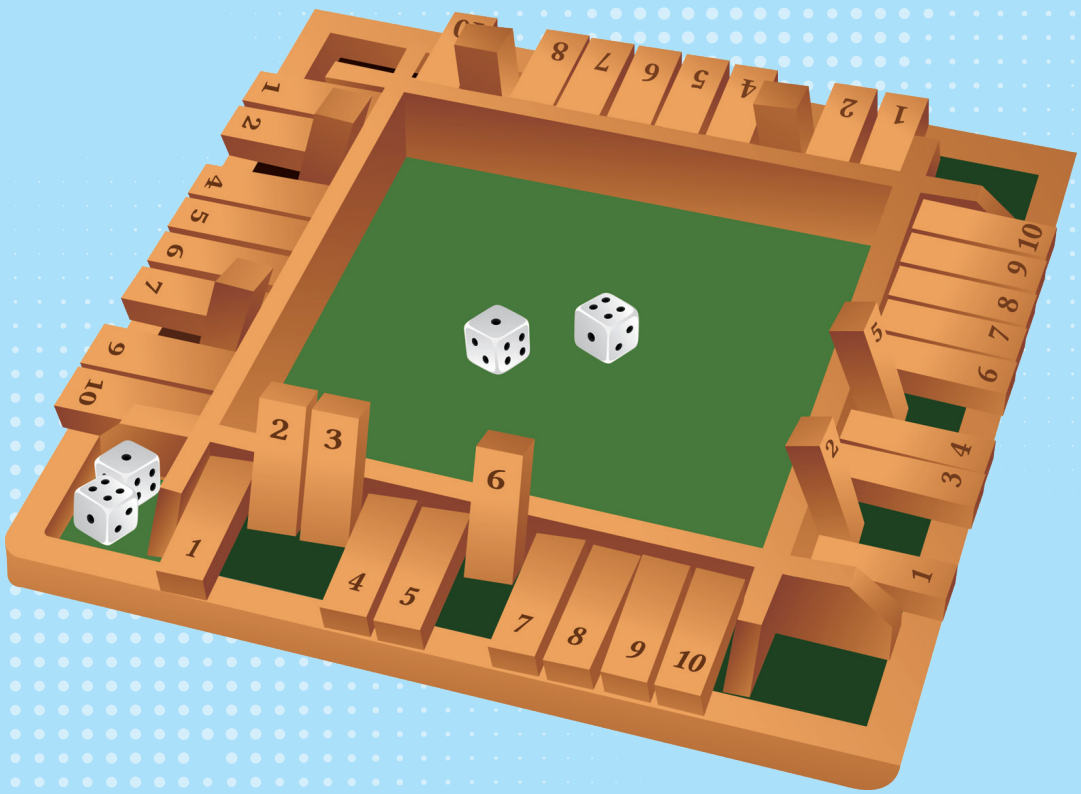
Galileo Galilei

KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET, DAN TEKNOLOGI
REPUBLIK INDONESIA, 2022
Matematika untuk SMA/SMK/MA Kelas XII
Penulis: Mohammad Tohir, dkk.
ISBN: 978-602-244-739-9

Bab 3

Panduan Khusus

Kombinatorik



Tujuan Pembelajaran

1. Mendeskripsikan aturan pengisian tempat
2. Menentukan hasil dari permutasi
3. Menentukan hasil dari kombinasi
4. Mengevaluasi proses acak yang mendasari percobaan statistik
5. Menggunakan peluang saling lepas, saling bebas, dan bersyarat untuk menafsirkan data

Gambar 3.1 Denah Perumahan Bunga Indah

Pada denah di atas dapat kita ketahui bahwa terdapat beberapa rumah yang terletak di beberapa jalan. Jika Dani akan berkunjung ke rumah Dino, maka terdapat banyak kemungkinan rute perjalanan yang dapat digunakan Dani menuju ke rumah Dino. Coba analisis banyak kemungkinan rute perjalanan yang digunakan Dani menuju rumah Dino.

Banyak kemungkinan tersebut dapat diketahui melalui konsep kombinatorik.

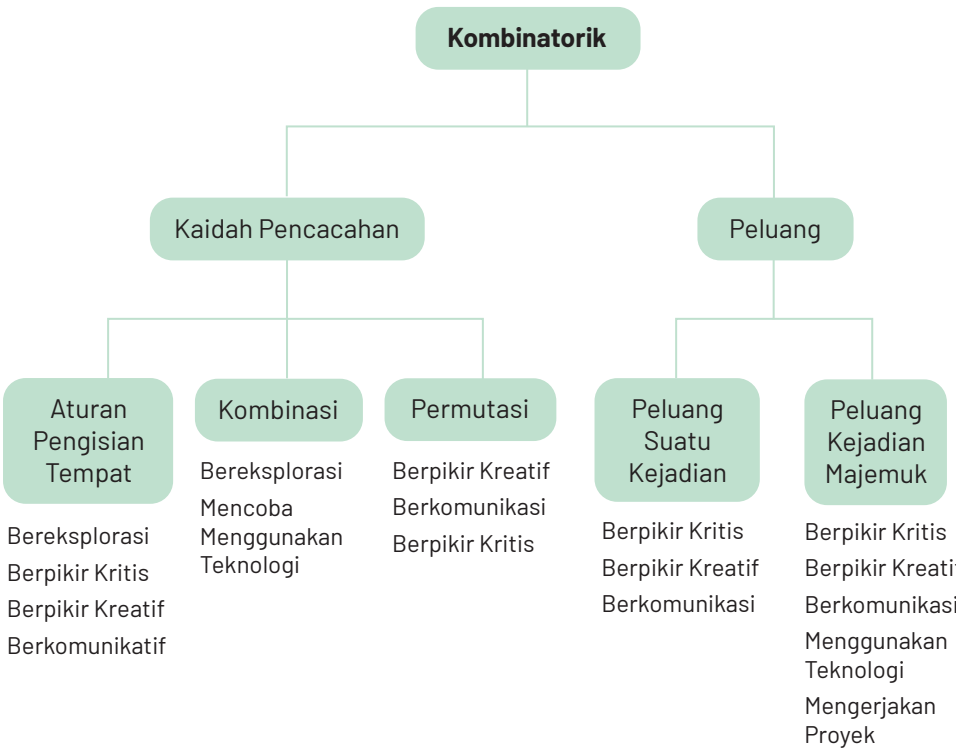
Kata Kunci

Kaidah Pencacahan, Permutasi, Kombinasi, Peluang, Peluang Kejadian Majemuk, Kejadian Majemuk Saling Bebas

Pertanyaan Pemantik

1. Apa itu kaidah pencacahan?
2. Bagaimana perbedaan permutasi dari beberapa objek yang sama dengan permutasi siklis?
3. Mengapa kombinasi lebih sering dijumpai dalam kehidupan sehari-hari dibandingkan permutasi?
4. Apa yang dimaksud peluang suatu kejadian majemuk?
5. Bagimana menentukan kejadian majemuk saling bebas?

Peta Konsep



Gambaran Umum Bab 3

Bab 3 ini menyajikan tentang konsep kombinatorik. Setiap subbabnya akan disajikan penanaman karakter Pancasila dan keterampilan abad ke-21 untuk mendukung tercapainya generasi emas tahun 2045, yaitu 1) konsep dan teori matematika, 2) pengenalan 4Cs (*Creativity, Critical Thinking, Collaboration, Communication*), 3) literasi matematika, 4) literasi budaya, dan 5) literasi digital. Sajian dalam Bab 3 ini bertujuan untuk mengeksplorasikan kemampuan siswa dalam menentukan aturan pengisian tempat, permutasi, kombinasi, peluang suatu kejadian, peluang kejadian majemuk sehingga dapat menarik kesimpulan dan mengaplikasikan pemahaman yang dimiliki melalui beberapa kegiatan pembelajaran tersebut.

Kegiatan 1.1 membahas tentang aturan pengisian tempat yang menjadi bahasan pertama yang diawali dengan kegiatan Ayo Bereksplorasi. Siswa dapat menghubungkan dan menemukan penerapan konsep translasi dalam

permasalahan yang lebih konkret. Siswa diajak melakukan beberapa kegiatan seperti: berpikir kritis, mengingat kembali, bereksplorasi, dan berkomunikasi terkait dengan konsep dan prosedur aturan pengisian tempat. Siswa diminta untuk memperdalam pengetahuannya melalui kegiatan berpikir kreatif, berpikir kritis, berkomunikasi, bekerja sama untuk memberikan penguatan karakter. Ajaklah siswa untuk aktif dalam pelaksanaan pembelajaran.

Kegiatan 1.2 membahas tentang permutasi yang diawali dengan kegiatan Ayo Bereksplorasi. Siswa dapat menghubungkan dan menemukan penerapan konsep permutasi dalam permasalahan yang lebih konkret. Siswa diajak melakukan beberapa kegiatan seperti: berpikir kritis, mengingat kembali, bereksplorasi, dan berkomunikasi terkait dengan konsep dan prosedur terkait permutasi. Siswa diminta untuk memperdalam pengetahuannya melalui beberapa kegiatan untuk memberikan penguatan karakter. Ajaklah siswa untuk aktif dalam pelaksanaan pembelajaran.

Kegiatan 1.3 membahas tentang kombinasi yang diawali dengan kegiatan Ayo Bereksplorasi. Siswa dapat menghubungkan dan menemukan penerapan konsep kombinasi dalam permasalahan yang lebih konkret. Siswa diajak melakukan beberapa kegiatan seperti: berpikir kritis, mengingat kembali, bereksplorasi, dan berkomunikasi terkait dengan konsep dan prosedur terkait kombinasi. Siswa diminta untuk memperdalam pengetahuannya melalui beberapa kegiatan untuk memberikan penguatan karakter. Ajaklah siswa untuk aktif dalam pelaksanaan pembelajaran.

Kegiatan 1.4 membahas tentang peluang suatu kejadian yang diawali dengan kegiatan Ayo Bereksplorasi. Siswa dapat menghubungkan dan menemukan penerapan konsep peluang suatu kejadian dalam permasalahan yang lebih konkret. Siswa diajak melakukan beberapa kegiatan seperti berpikir kritis, mengingat kembali, bereksplorasi, dan berkomunikasi terkait dengan konsep dan prosedur peluang suatu kejadian. Siswa diminta untuk memperdalam pengetahuannya melalui beberapa kegiatan untuk memberikan penguatan karakter. Ajaklah siswa untuk aktif dalam pelaksanaan pembelajaran.

Skema Pembelajaran

Subbab	Waktu (JP)*	Tujuan	Pokok Materi	Kosakata	Metode dan Aktivitas	Sumber Utama	Sumber Lain
A. Aturan Pengisian Tempat	6 JP	1. Menganalisis aturan pencacahan 2. Mendeskripsikan aturan pengisian tempat 3. Mengidentifikasi fakta-fakta yang berkaitan dengan kaidah perkalian	Kaidah Pencacahan	Kaidah pencacahan, aturan pengisian tempat	Bereksplorasi, berpikir kritis, berkomunikasi, berpikir kreatif, menggunakan teknologi, latihan	Buku Siswa	Harris, J.M., Hirst, J.M., & Mossinghoff, M.J. 2008. *Combinatorics and Graph Theory. Second Edition.* Springer. USA: Springer. Budayasa, K. 1995. *Matematika Diskret I.* University Press IKIP Surabaya
B. Permutasi	8 JP	1. Menganalisis aturan permutasi 2. Mengumpulkan dan mengolah informasi yang berkaitan dengan permutasi 3. Menentukan permutasi dari suatu kejadian nyata	Permutasi	Permutasi, permutasi siklis	Bereksplorasi, berpikir kritis, berkomunikasi, berpikir kreatif, menggunakan teknologi, latihan	Buku Siswa	Harris, J.M., Hirst, J.M., & Mossinghoff, M.J. 2008. *Combinatorics and Graph Theory. Second Edition.* Springer. USA: Springer. Budayasa, K. 1995. Matematika Diskret I. University Press IKIP Surabaya

Subbab	Waktu (JP)*	Tujuan	Pokok Materi	Kosakata	Metode dan Aktivitas	Sumber Utama	Sumber Lain
C. Kombinasi	8 JP	1. Menganilisis aturan kombinasi 2. Menentukan kombinasi dari suatu permasalahan 3. Mengeksplorasi dan menyajikan secara prosedural terkait kombinasi	Kombinasi	Kombinasi, kombinasi berulang	Bereksplorasi, berpikir kritis, berkomunikasi, berpikir kreatif, menggunakan teknologi, latihan	Buku Siswa	Harris, J.M., Hirst, J.M., & Mossinghoff, M.J. 2008. *Combinatorics and Graph Theory. Second Edition.* Springer. USA: Springer. Budayasa, K. 1995. Matematika Diskret I. University Press IKIP Surabaya
D. Peluang Suatu Kejadian	8 JP	1. Mengidentifikasi unsur-unsur terkait peluang suatu kejadian 2. Menentukan peluang dari suatu kejadian 3. Menyajikan secara prosedural cara menemukan peluang suatu kejadian	Peluang	Peluang suatu kejadian, ruang sampel, peluang majemuk, peluang saling lepas	Bereksplorasi, berpikir kritis, berkomunikasi, berpikir kreatif, menggunakan teknologi, latihan	Buku Siswa	Harris, J.M., Hirst, J.M., & Mossinghoff, M.J. 2008. *Combinatorics and Graph Theory. Second Edition.* Springer. USA: Springer. Budayasa, K. 1995. Matematika Diskret I. University Press IKIP Surabaya

Catatan:

* Waktu merupakan saran rentang jam pelajaran. Guru dapat menyesuaikan dengan kondisi aktual pembelajaran.

Panduan Pembelajaran

Pengalaman Belajar

Sebelum memulai materi tentang transformasi fungsi, guru diharapkan dapat menginformasikan pengalaman belajar siswa setelah mempelajari Bab 3 ini.

1. Siswa dapat mempelajari informasi yang sebelumnya pernah dipelajari terkait materi peluang suatu kejadian.
2. Siswa dapat melakukan kegiatan eksplorasi berdasarkan instruksi yang disajikan pada Buku Siswa.
3. Siswa dapat memahami teori dan konsep kombinatorik (permutasi, kombinasi, peluang suatu kejadian).
4. Siswa dapat mengembangkan kemampuannya dengan melakukan kegiatan berpikir kritis, berpikir kreatif, berkomunikasi, berdiskusi, mencoba, berefleksi, mengerjakan projek, dan menggunakan teknologi.
5. Siswa dapat mengimplementasikan pengetahuannya dalam menyelesaikan permasalahan matematika terkait kombinatorik dalam kehidupan sehari-hari.

Sarana dan Prasarana Pembelajaran

- Alat tulis-menulis
- Aplikasi pendukung seperti, Geogebra, dll.
- Lingkungan, teman, dan Lembar Kegiatan Projek

Apersepsi

Guru diharapkan dapat memancing siswa untuk mengingat kembali prosedur dalam memahami dan mempelajari terkait materi peluang. Berikut prosedur dan rangkuman yang dapat digunakan oleh guru dalam melaksanakan kegiatan Apersepsi.

A. Aturan Pengisian Tempat

Ayo Bereksplorasi

Guru mengajak siswa untuk memperhatikan materi yang ditunjukkan dalam visual gambar ataupun media lain terkait aturan pengisian tempat. Guru diharapkan kreatif dalam menyajikan gambar terkait aturan pengisian tempat. Kegiatan ini bertujuan untuk menggali dan meningkatkan rasa ingin tahu siswa dalam menentukan bentuk-bentuk aturan pengisian tempat.

Aturan pengisian tempat terdiri atas tiga cara, yaitu:

1. Aturan Tabel

Contoh Soal 3.1

Seorang anak memiliki 5 kaus kaki dan 3 sepatu. Dengan aturan tabel, banyaknya pasangan kaus kaki dan sepatu yang bisa dipakai anak tersebut sebagai berikut.

		KAUS KAKI (K)				
		K1	K2	K3	K4	K5
SEPATU (S)	S1	S1K1	S1K2	S1K3	S1K4	S1K5
	S2	S2K1	S2K2	S2K3	S2K4	S2K5
	S3	S3K1	S3K2	S3K3	S3K4	S3K5

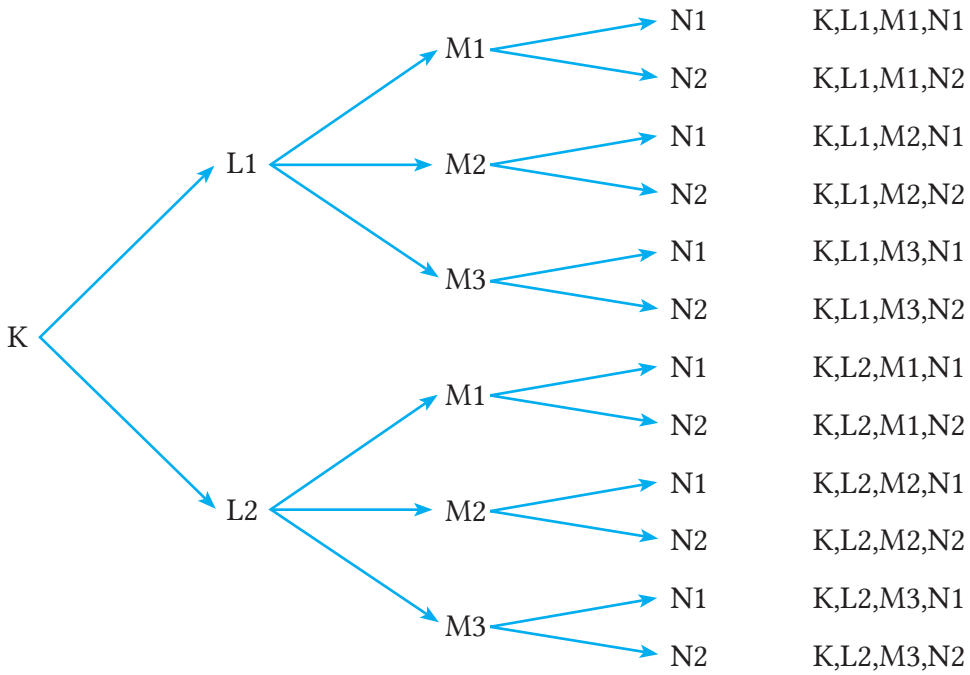
Berdasarkan aturan tabel di atas didapat 15 cara memakai kaus kaki dan sepatu.

2. Aturan Diagram Cabang

Contoh Soal 3.2

Untuk mencapai kota Bandung (N), Ahmad berangkat dari kota Surabaya (K), melalui kota Semarang (L), kemudian kota Bekasi (M). Jika jalan dari kota Surabaya ke kota Semarang ada 2 jalan, dari kota Semarang ke Bekasi ada 3 jalan, dan dari Bekasi ke Bandung ada 2 jalan, maka banyak rute yang bisa dilalui sebagai berikut.

Permasalahan di atas dapat diketahui dengan mendaftar kemungkinan rute perjalanan yang dapat dilalui oleh Ahmad ketika melakukan perjalanan dari kota Surabaya ke kota Bandung.



Berdasarkan aturan diagram panah di atas didapat 12 rute perjalanan yang bisa dilewati dari kota Surabaya (K) ke kota Bandung (L) melalui kota Semarang (M) dan Bekasi (N).

3. Aturan Perkalian Terurut

Contoh Soal 3.3

Terdapat 5 buah angka yaitu 2, 3, 4, 5, dan 6. Banyak bilangan 3 angka yang bisa dibuat dari 5 angka tersebut sebagai berikut.

Jika angka boleh berulang

5	5	5

$5 \times 5 \times 5 = 125$ bilangan

Jika angka tidak boleh berulang

5	4	3

$5 \times 4 \times 3 = 60$ bilangan

Ayo Berkomunikasi

Pada suatu pemilihan OSIS terdapat empat calon kandidat yang akan mengisi jabatan ketua dan wakil ketua. Berapa banyak kemungkinan susunan pengurus OSIS?

Petunjuk guru

1. Kunjungi tautan https://tinyurl.com/kaidahperkalian sebagai bahan untuk memfasilitasi siswa terkait permasalahan tersebut.
2. Berikan waktu kepada siswa untuk memahami permasalahan dengan membentuk kelompok.
3. Minta siswa untuk menuliskan hasil diskusinya.
4. Berikan kesempatan kepada siswa dalam kelompok untuk mempresentasikan hasilnya.

Pembahasan Latihan 3.1

1. Seorang siswa memiliki dua pasang sepatu dan lima pasang kaus kaki. Tentukan berapa banyak orang yang memakai sepatu dan kaus kaki sesuai dengan aturan tabel.

   Alternatif penyelesaian:

   Banyak cara

		KAUS KAKI (K)				
		K1	**K2**	**K3**	**K4**	**K5**
SEPATU (C)	C1	C1K1	C1K2	C1K3	C1K4	C1K5
	C2	C2K1	C2K2	C2K3	C2K4	C2K5

   Jadi, banyaknya cara ada 10 cara.

2. Achmad dan Budi merupakan calon ketua OSIS di SMA Semangat 45. Sementara Citra, Danita, dan Eko adalah calon wakil ketua. Kemudian terdapat Fitri dan Gina pesaing untuk sekretaris. Tentukan jumlah pasangan potensial pengurus inti OSIS di SMA tersebut dengan menggunakan diagram cabang.

Alternatif penyelesaian:

Banyak kemungkinan pengurus inti

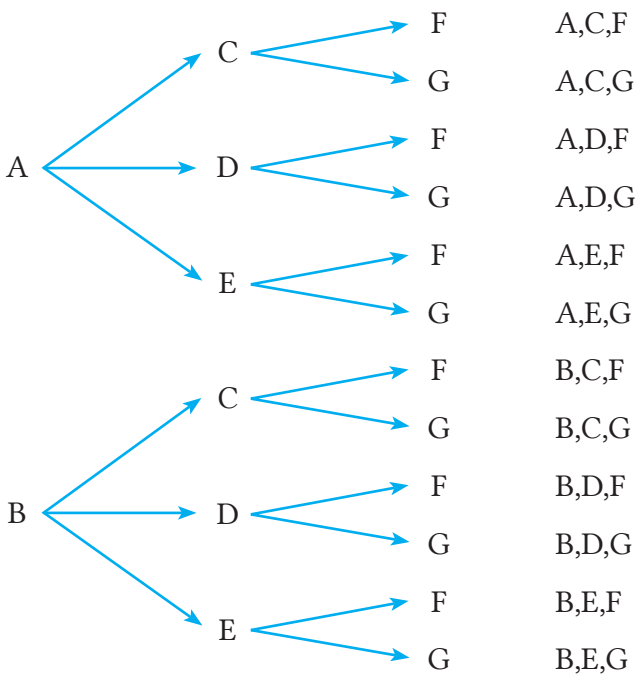
Misal:

Ahmad = A Eko = E

Budi = B Fitri = F

Citra = C Gina = G

Danita = D



Jadi, banyak kemungkinan susunan pengurus inti adalah $2 \times 3 \times 2 = 12$.

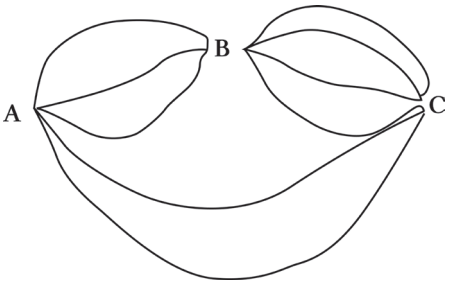
3. Pada peringatan HUT RI ke-76 yang diselenggarakan oleh RT 04 Desa Makmur terdapat perlombaan lari cepat 100 m. Ahmad, Rendi, Doni, dan Dendi menjadi peserta terakhir dalam putaran final yang akan memperebutkan juara I dan II. Tentukanlah banyaknya susunan pemenang yang akan muncul sebagai juara lomba lari.

Alternatif penyelesaian:

Menggunakan aturan perkalian, maka banyaknya susunan pemenang adalah $4 \times 3 = 12$.

4. **Ayo Berpikir Kreatif**

Gambar di samping mengilustrasikan perjalanan dari kota A ke kota C. Tentukan banyaknya rute kota A ke kota C.



Alternatif penyelesaian:

Penjelasan dan alternatif jawaban siswa dalam kegiatan Ayo Berpikir Kreatif sepenuhnya diserahkan kepada guru dalam memberikan ide kreatif kepada siswanya.

5. Tentukan banyaknya bilangan tiga angka yang dapat dibentuk dari angka-angka 3, 4, 5, 6, dan 7 jika dan hanya jika memenuhi syarat-syarat berikut:
   a. Angka tidak boleh berulang
   b. Angka bisa berulang

Alternatif penyelesaian:

Diketahui:

Angka 3, 4, 5, 6, 7

a. Jika angka tidak boleh muncul berulang

5	4	3

$5 \times 4 \times 3 = 60$ bilangan

b. Jika angka boleh muncul berulang

5	5	5

$5 \times 5 \times 5 = 125$ bilangan

B. Permutasi

Petunjuk

Suatu perkalian bilangan asli berturut-turut dari 1 sampai n ataupun sebaliknya dari n sampai dengan 1 disebut sebagai n faktorial, yang selanjutnya dinotasikan menjadi $n!$. Secara matematis ditunjukkan sebagai berikut.

$n! = n(n-1)(n-2)(n-3) \ldots (1)$

$= (1)(2) \ldots (n-2)(n-1)n$

Contoh:

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

Ayo Bereksplorasi

Guru mengajak siswa untuk memperhatikan visualisasi gambar struktur pengurus kelas. Guru memberikan stimulus dan mengajak siswa berpikir dalam menentukan banyak kemungkinan siswa yang dapat mengisi posisi sebagai pengurus kelas. Kegiatan ini bertujuan untuk menggali dan meningkatkan rasa ingin tahu siswa dalam menentukan permutasi.

Definisi 3.1

Secara umum, permutasi r objek dari n objek adalah banyaknya susunan yang mungkin dari r objek yang dipilih dari n objek, dengan $r \leq n$, pada setiap kemungkinan susunan r objek tidak ada susunan objek yang sama, secara matematis ditunjukkan: Permutasi r unsur-unsur dari n unsur yang berbeda adalah:

$${}_nP_r = P(n,r) = P_r^n = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$$

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-1)!}$$

Keterangan:

${}_nP_r$ dibaca Permutasi r objek dari n objek.

$n!$ dibaca n faktorial

$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$

Tahukah Kalian

$1! = 1$

$0! = 1$

Ayo Berpikir Kritis

SMA Budi Mulya memiliki klub Olimpiade Matematika yang akan mempersiapkan siswanya mengikuti olimpiade tingkat nasional. Anggota klub terdiri atas 2 siswa laki-laki dan 3 siswa perempuan. Sebagai persiapan, mereka diberikan *try out* kemudian diperingkat berdasarkan nilai ujian.

Jika diasumsikan tidak ada dua siswa memperoleh nilai ujian yang sama, setujukah kalian bahwa banyak susunan peringkat berbeda yang mungkin dihasilkan akan sama dengan banyak susunan ketika siswa laki-laki dan perempuan diperingkat sendiri?

Petunjuk Guru untuk kegiatan Ayo Berpikir Kritis

1. Guru menginformasikan kepada siswa terkait permasalahan. Berdasarkan pernyataan setuju dan tidak setuju, daftarlah siswa yang menjawab setuju dan tidak setuju. Selanjutnya kelompokkan siswa berdasarkan kesamaan pilihan jawaban, ajaklah siswa untuk membuat penjelasan dari pilihan jawaban yang sudah dibuat.
2. Guru dapat memberikan stimulus melalui visualisasi gambar terkait permasalahan yang sesuai kemudian meminta siswa untuk menganalisis dan menjelaskan temuannya. Berikan informasi tambahan terkait langkah prosedural dalam menyelesaikan permasalahan dengan mengajak siswa mengingat kembali konsep yang sebelumnya sudah dipelajari.
3. Ajaklah siswa untuk berpikir melalui beberapa pertanyaan pancingan
   a. Berapakah kemungkinan susunan peringkat yang terjadi?
   b. Bagaimana bentuk susunan jika siswa laki-laki dan perempuan diperingkat sendiri?

Petunjuk

Rumus umum di atas bisa dimodifikasi berdasarkan konteks yang lebih khusus. Berikut beberapa permutasi khusus.

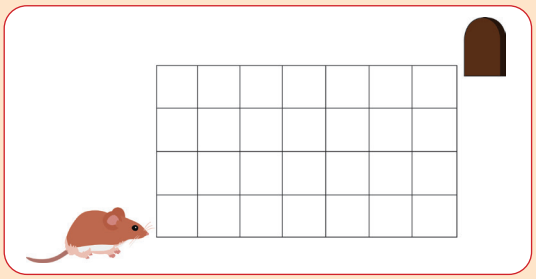
a. Permutasi *n* objek dari *n* objek

Permutasi n objek dari n objek yang disediakan dapat ditulis menjadi

$$
\begin{aligned}
{}_nP_n &= \frac{n!}{(n-n)!} \\
&= \frac{n!}{0!} \\
&= \frac{n!}{1} \\
&= n!
\end{aligned}
$$

Ayo Berkomunikasi

Perhatikan gambar berikut!



Seekor tikus akan menuju ke lubang untuk bersembunyi dari kejaran kucing. Diskusikan dengan temanmu, berapa banyak kemungkinan tikus lari dari kejaran kucing menuju lubang persembunyiannya! Presentasikan hasil temuanmu.

Petunjuk Guru untuk kegiatan Ayo Berkomunikasi

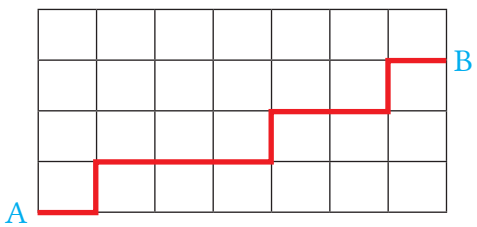
1. Instruksikan kepada siswa untuk membuat kelompok dengan anggota masing-masing kelompok sesuai dengan kebutuhan.
2. Berikan informasi kepada setiap kelompok terkait permasalahan dalam kegiatan Ayo Berkomunikasi.
3. Biarkan kelompok berdiskusi dan fasilitasi jika terdapat kelompok yang mengalami kesulitan.
4. Berikan kesempatan kepada kelompok untuk menjelaskan hasil diskusinya kepada kelompok lain.
5. Berikan kesempatan kepada kelompok lain untuk menyampaikan hasil temuan yang berbeda.
6. Buat kesimpulan bersama dengan kelompok.

Selama proses kegiatan Ayo Berkomunikasi, guru dapat menunjukkan ilustrasi yang berbeda terkait translasi. Berikut ilustrasi yang dapat digunakan sebagai acuan.

Pembahasan

Cara terpendek yang dapat dipilih tikus untuk pergi adalah dengan menuruni atau menyusuri rute ke kanan.

Misalnya, jika ruas kanan diberi tanda 1 dan atas diberi tanda 2. Oleh karena itu, jika 12111211212 individu berjalan lurus, maka ke kanan tiga kali dan ke kanan dua kali.



Maka persoalan di atas adalah mencari banyaknya susunan 12111211212 yang merupakan permutasi berulang 11 angka dengan terdapat 7 angka 1 yang sama dan 4 angka 2 yang sama.

Banyaknya susunan adalah $\frac{11!}{7!.4!} = 330$.

Jadi, banyaknya cara jalan terpendek yang dapat dipilih tikus adalah 330 cara.

b. Permutasi dengan objek yang sama

Jika di antara objek yang disusun ada objek-objek yang sama, maka banyaknya formasi susunan dapat ditentukan dengan aturan:

$$ {}_nP_{r_1,r_2,\ldots,r_k} = \frac{n!}{r1!\times r_2!\times \ldots \times r_k!} $$

Keterangan:

r_k = banyak objek ke-k

c. Permutasi siklis

Jika 3 orang Abdul (a), Bayu (b), Charli (c) duduk berjajar, maka posisi duduk adalah *abc, acb, bca, bac, cab, cba.* Tetapi jika orang tersebut duduk mengelilingi meja bundar, maka posisi *abc, bca, cab* adalah sama. Juga posisi *acb, cba, bac* sama. Dengan demikian, tiga orang *a, b, c* yang duduk melingkar hanya ada 2 posisi duduk, yaitu *abc* dan *acb.* Masalah seperti ini disebut *Permutasi Siklis.*

Berdasarkan gambar tiga orang yang duduk di meja bundar, dapat ditunjukkan bahwa

- Banyak permutasi dari 3 objek yang berbeda adalah 3!
- Ada tiga jenis permutasi siklis yang sama
- Sehingga banyak susunan 3 objek berbeda dalam permutasi siklis adalah

$$\frac{3!}{3} = \frac{3\times 2\times 1}{3} = 2! = (3-1)!$$

Secara umum, dapat ditentukan bahwa

- Banyak permutasi dari n objek yang berbeda adalah $n!$
- Ada n jenis permutasi siklis yang sama
- Sehingga banyak susunan n objek berbeda dalam permutasi siklis adalah

$$\frac{n!}{n} = \frac{1\times 2\times 3\times \ldots \times (n-1)\times n}{n} = (n-1)!$$

Maka terdapat n objek disusun secara melingkar (siklis), maka banyak susunan objek dapat ditentukan dengan aturan:

$$P_n = (n-1)!$$

Ayo Berpikir Kritis

Secara matematis, jika terdapat permutasi siklis n objek dari r objek yang berbeda, apa yang dapat kalian temukan dengan menggunakan pemahaman yang sama? Jelaskan pendapatmu.

Petunjuk Guru untuk kegiatan Ayo Berpikir Kritis

1. Berikan kesempatan dan waktu kepada siswa untuk mengamati kegiatan Ayo Berpikir Kritis. Sarankan siswa untuk membentuk kelompok supaya lebih meningkatkan pemahaman satu sama lain.
2. Guru dapat memberikan ilustrasi terkait kegiatan Ayo Berpikir Kritis sebagai bentuk visualisasinya, kemudian ajaklah setiap kelompok dari setiap siswa untuk menyusun argumen dan penjelasannya.
3. Sebagai petunjuk, guru dapat menggunakan permutasi dalam memberikan bimbingan kepada siswa.

Pembahasan Latihan 3.2

1. Sebuah restoran memiliki 8 juru masak. Dari 8 orang tersebut, 3 orang telah dialokasikan untuk membuat gulai, rendang, dan rawon secara acak. Tentukan berapa banyak cara juru masak dipilih.

   Alternatif penyelesaian:

   Diketahui:

   8 orang juru masak

   Dipilih 3 orang untuk memasak gulai, rendang, dan rawon.

   Ditanya:

   Banyak cara memilih juru masak = ...?

   Banyak cara memilih juru masak menggunakan permutasi 3 objek dari 8 objek, maka

   $$P_3^8 \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8\times7\times6\times5!}{5!} = 8\times7\times6 = 336$$

   Sehingga, cara memilih juru masak adalah 336 cara.

2. Ada tujuh orang siswa akan membentuk garis lurus. Tentukan banyaknya susunan barisan yang mungkin terjadi.

   Alternatif penyelesaian:

   Diketahui:

   7 orang siswa

Karena akan berbaris maka menggunakan permutasi siklis, sehingga banyak susunan barisan adalah

$7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$ susunan.

3. **Ayo Berpikir Kreatif**

Panitia percepatan vaksinasi di Desa Sukatani berencana mencetak nomor antrean peserta vaksin yang terdiri atas 1 huruf dan 3 angka. Jika nomor antrean tersebut tidak memuat angka dan huruf yang sama, tentukan banyak kemungkinan dan berikan penjelasanmu dengan beberapa syarat berikut.

a. Jika angka yang digunakan adalah bilangan prima kurang dari 10 dan huruf yang digunakan adalah huruf vokal.

b. Jika memuat bilangan genap dan huruf dari kata CORONA.

Penjelasan dan alternatif penyelesaian siswa dalam kegiatan Ayo Berpikir Kreatif sepenuhnya diserahkan kepada guru dalam memberikan ide kreatif kepada siswanya.

4. **Ayo Berpikir Kreatif**

Suyoko adalah seorang budayawan yang akan mengadakan pameran karya-karya yang sudah pernah dibuat seperti lukisan, patung, dan lain sebagainya. Terdapat 10 lukisan prioritas yang akan diletakkan di beranda utama galeri pamerannya. *Event Organizer* (EO) sebagai penanggung jawab kegiatan pameran menyarankan kepada Suyoko dengan syarat berikut.

a. Urutan lukisan tidak diperhitungkan

b. Terdapat 4 lukisan favorit yang selalu berdampingan

Berdasarkan pernyataan tersebut, tentukan banyak kemungkinan susunan pemasangan lukisan prioritas tersebut.

Penjelasan dan alternatif penyelesaian siswa dalam kegiatan Ayo Berpikir Kreatif sepenuhnya diserahkan kepada guru dalam memberikan ide kreatif kepada siswanya.

5. Slogan Bhinneka Tunggal Ika ada pada Garuda Pancasila yang menjadi lambang negara Indonesia. Simbolnya adalah burung dengan kepala Garuda. Tentukan susunan 6 huruf dari huruf "GARUDA".

C. Kombinasi

Ayo Bereksplorasi

Guru mengajak siswa untuk memperhatikan visualisasi gambar struktur pengurus kelas. Guru memberikan stimulus dan mengajak siswa berpikir dalam menentukan banyak kemungkinan siswa yang dapat mengisi posisi sebagai pemain futsal. Kegiatan ini bertujuan untuk menggali dan meningkatkan rasa ingin tahu siswa dalam menentukan kombinasi.

Definisi 3.2

Kombinasi adalah susunan dari suatu objek-objek yang *tidak memperhatikan urutan.*

Misalnya kombinasi kata KAMU akan sama dengan kombinasi kata AMUK karena memiliki huruf-huruf penyusun yang sama yaitu K, A, M, U

Secara formal dituliskan bahwa **kombinasi *k* objek dari *n* objek yang diketahui** merupakan susunan k objek dari n objek yang diketahui (dengan $k \leq n$).

Perhatikan ilustrasi kemungkinan susunan 2 pemain flank pada pemain futsal dari 5 orang pemain yang ada. Mengingat konsep permutasi sebelumnya, permutasi 2 objek dari 5 objek yang diketahui dituliskan P(5,2). Banyaknya susunan yang sama dari setiap pasangan 2 objek adalah 2! (pada kasus di atas, misalkan susunan pasangan Agus – Agung sebenarnya orangnya sama dengan pasangan Agung – Agus). Sehingga, banyaknya kombinasi 2 objek dari 5 objek yang dinotasikan C(5,2) adalah sebagai berikut.

$$C(5,2) = \frac{\text{Banyaknya permutasi 2 objek dari 5 objek}}{\text{Banyaknya susunan yang sama}}$$
$$= \frac{P(5,2)}{2!}$$
$$= \frac{5!}{(5-2)!2!}$$

Secara umum, pengambilan k objek dari n objek yang berbeda menghasilkan permutasi k objek dari n objek dituliskan $P(n,k)$. Banyaknya susunan yang sama dari pengambilan k objek adalah $k!$. Dengan demikian, banyaknya kombinasi dari k objek dari n objek yang berbeda dinotasikan dengan $C(n,k)$ adalah sebagai berikut.

$$C(n,k) = \frac{\text{Banyaknya permutasi } k \text{ objek dari } n \text{ objek}}{\text{Banyaknya susunan yang sama}}$$
$$= \frac{P(n,k)}{k!}$$
$$= \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

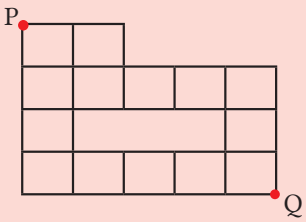
Misalkan r adalah elemen bilangan bulat non-negatif. Banyaknya himpunan bagian dari B yang menjadi anggota r sebagai objek dimaksudkan sebagai kombinasi r dari himpunan B yang terdiri dari n objek berbeda. Kombinasi juga diartikan sebagai cara mengatur (memilih) beberapa objek r dari n objek yang ada.

Petunjuk

Perhatikan bahwa jika $k > n$, didefinisikan $C_{(n,\,k)} = 0$. Jika $n = 0$ dan k bilangan bulat positif, maka $C(0,\,k) = 0$. Hal tersebut akan berakibat bahwa $C(0,0) = 1$. Fakta berikutnya adalah untuk bilangan bulat non-negatif n berlaku $C(n,\,0) = 1$, $C(n,\,1) = n$, dan $C(n,\,n) = 1$.

Ayo Berpikir Kritis

Rino melakukan perhitungan terkait banyaknya jalan terpendek dari P ke Q adalah 126 cara sesuai dengan gambar berikut.

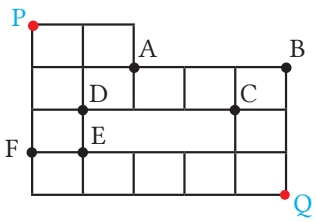


Banyaknya cara tersebut didapatkan dengan menggunakan rumus berikut $C_r^n = \frac{n!}{(n-r)!.r!}$. Setujukan kalian dengan pendapat Rino?

Petunjuk Guru untuk kegiatan Ayo Berpikir Kritis

1. Guru menginformasikan kepada siswa terkait permasalahan. Berdasarkan pertanyaan setuju dan tidak setuju, daftarlah siswa yang menjawab setuju dan tidak setuju. Selanjutnya kelompokkan siswa berdasarkan kesamaan pilihan jawaban, ajaklah siswa untuk membuat penjelasan dari pilihan jawaban yang sudah dibuat terkait kesimpulan dari Rino.
2. Guru memberikan stimulus melalui visualisasi gambar yang sesuai kemudian meminta siswa untuk menganalisis dan menjelaskan temuannya. Berikan informasi tambahan terkait bentuk atau maksud dari gambar dengan mengajak siswa mengingat kembali materi aturan menentukan rute perjalanan yang sebelumnya sudah dipelajari.
3. Ajaklah siswa untuk berpikir melalui beberapa pertanyaan pancingan
   a. Apakah rute dari P ke Q dapat digambarkan secara terperinci?
   b. Bagaimana cara menentukan banyaknya rute tersebut? Berikan alasanmu. Apakah berlaku definisi yang sudah dipelajari sebelumnya? Jika tidak berlaku, siswa diminta menunjukkan alternatifnya.
4. Sebagai petunjuk guru, berikut ditunjukkan alternatifnya.

   Untuk memudahkan perhitungan (agar tidak melakukan perhitungan ganda) tandai titik-titik sudut pada gambar seperti berikut:



Rute jalan dari P ke A melalui B dan menuju Q ditulis: $P - A - B - Q$.

Kemudian dihitung banyaknya jalan dari gambar di atas.

$P - A - B - Q = {}_3C_1 \times 1 \times 1 = 3 \times 1 \times 1 = 3$

$P - A - C - Q = {}_3C_1 \times {}_3C_1 \times {}_3C_1 = 3 \times 3 \times 3 = 27$

$P - D - C - Q = {}_3C_2 \times 1 \times {}_3C_2 = 3 \times 1 \times 3 = 9$

$P - D - E - Q = {}_3C_2 \times 1 \times {}_5C_1 = 3 \times 1 \times 5 = 15$

$P - F - Q = 1 \times {}_6C_1 = 1 \times 6 = 6$

Jadi, banyaknya jalan terpendek dari P ke Q adalah $3 + 27 + 9 + 15 + 6 = 60$ cara.

5. Guru memberikan penguatan terkait kegiatan Ayo Berpikir Kritis dengan menunjukkan perhitungan yang sesuai. Berikut ditunjukkan catatan yang dapat digunakan oleh Guru.

Ayo Menggunakan Teknologi

Kunjungi tautan berikut untuk memahami dan belajar terkait permutasi dan kombinasi.

Tautan 1: https://tiny.one/permutasikombinasi	Tautan 2: https://tinyurl.com/permutasikombinasi1

Petunjuk

Guru dapat menggunakan petunjuk berikut dalam memberikan bimbingan kepada siswa

Pada tautan 1

1. Gunakan tautan 1: https://tiny.one/permutasikombinasi untuk belajar dan memahami lebih lanjut terkait materi permutasi dan kombinasi.
2. Baca dan pahami dengan baik.

Pada tautan 2

1. Gunakan tautan 2: https://tinyurl.com/permutasikombinasi1 untuk mengetahui hasil dari permutasi dan kombinasi.
2. Pada bagian permutasi di tautan tersebut, kalian dapat menentukan hasil dari permutasi dengan menggerakkan titik (*sleder*) atau mengetikkan nilai n dan nilai r pada kolom yang disediakan.
3. Pada bagian kombinasi di tautan tersebut, kalian dapat menentukan hasil dari kombinasi dengan menggerakkan titik (*sleder*) atau mengetikkan nilai n dan nilai r pada kolom yang disediakan.

Ayo Bereksplorasi

Guru mengajak siswa untuk memperhatikan ilustrasi gambar terkait permasalahan kombinasi pengulangan. Guru memberikan stimulus dan mengajak siswa berpikir dalam menentukan banyak kemungkinan susunan bola yang dapat ditempatkan dalam tempat bola berbentuk silinder. Kegiatan ini bertujuan untuk menggali dan meningkatkan rasa ingin tahu siswa dalam menentukan kombinasi.

Definisi 3.3

Misalkan r buah bola berwarna sama dan n buah kotak

i. Maksimal satu bola dapat dimasukkan dalam setiap kotak. Banyak cara untuk mendapatkan bola: $C(n,r)$.

ii. Jika lebih dari satu bola yang mungkin ada di setiap kotak (tidak ada batasan jumlah bola), maka jumlah cara mendapatkan bola: $C(n + r - 1, r)$.

$$C(n + r - 1, r) = C(n + r - 1, n - 1).$$

Tahukah Kalian?

Kombinasi berulang juga dapat mengatasi masalah dalam perhitungan jumlah jawaban persamaan linier. Kita dapat menyatakan bahwa $x1 + x2 + \cdots + xr = n$ adalah persamaan. Jika xi adalah bilangan bulat non-negatif, berapa banyak cara penyelesaian yang mungkin? Permasalahan ini sesuai dengan pembagian menjadi r lokasi dari n item identik. Banyaknya solusi adalah ${}_{n+r-1}C_n$.

Ayo Berpikir Kritis

Aysha dibelikan koper oleh ayahnya yang dilengkapi dengan kunci pengaman (*password*) dari 3 angka.

1. Setujukah kalian bahwa kode 012 sama dengan 021?
2. Ada berapa banyak kode yang dapat dibuat?
3. Mengapa kode kunci pengaman dengan 3 angka lebih aman dibanding dengan 2 angka?

Petunjuk Guru untuk kegiatan Ayo Berpikir Kritis

1. Berikan kesempatan dan waktu kepada siswa untuk mengamati kegiatan Ayo Berpikir Kritis. Sarankan siswa untuk membentuk kelompok supaya lebih meningkatkan pemahaman satu sama lain.
2. Guru dapat memberikan ilustrasi terkait kegiatan Ayo Berpikir Kritis sebagai bentuk visualisasinya, kemudian ajaklah setiap kelompok dari setiap siswa untuk menyusun argumen dan penjelasannya.
3. Sebagai petunjuk, guru dapat menggunakan permutasi dalam memberikan bimbingan kepada siswa.

Pembahasan Latihan 3.3

1. Sebuah kelas terdiri atas 15 putra dan 10 putri.
   a. Tentukan banyaknya kemungkinan pengiriman wakil kelas yang terdiri atas 5 orang.
   b. Tentukan banyaknya kemungkinan pengiriman wakil kelas yang terdiri atas 3 putra dan 2 putri.

   Alternatif penyelesaian:

   Masalah ini adalah masalah kombinasi karena tidak perlu memperhatikan urutan.

   a. Kombinasi 5 orang dari 25 orang adalah

   $$C_5^{25} = \frac{25!}{(25-5)!.5!}$$

$= 5 \times 23 \times 22 \times 21$

$= 53.130$

Jadi, banyaknya pengiriman wakil kelas yang terdiri atas 5 orang ada 53.130 cara.

b. Dari 15 putra dipilih 3 orang, berarti C_3^{15} dan dari 10 putri dipilih 2 orang, berarti C_2^{10}. Sehingga kombinasinya adalah

$$C_3^{15} \times C_2^{10} = \frac{15!}{(15-3)!3!} \times \frac{10!}{(10-2)!.2!}$$

$= 15 \times 7 \times 3 \times 5 \times 3$

$= 20.475$

Jadi, banyaknya kemungkinan pengiriman wakil kelas yang terdiri atas 3 putra dan 2 putri ada 20.475 cara.

2. Dari 52 kartu diambil 5 sembarang. Hitung banyaknya kemungkinan bila semuanya sejenis dan hitung juga bila harus ada tepat tiga As.

Alternatif penyelesaian:

Diketahui:

Bila semuanya sejenis : $4 \times {}_{13}C_5 = 4 \times 13 \times 11 \times 2 \times 9 = 10.296$

Bila tepat 3 As : ${}_4C_3 \times {}_{48}C_2 = 4 \times 24 \times 47 = 4.512$

Jadi, banyaknya kemungkinan bila semuanya sejenis adalah 10.296, dan banyaknya kemungkinan apabila harus ada tepat tiga As adalah 4.512.

3. **Ayo Berpikir Kreatif**

Ada 8 dari 10 pertanyaan tes yang harus dijawab oleh siswa dengan 5 jawaban pertama. Berapa banyak pilihan yang ada bagi siswa untuk memilih pertanyaan untuk dikerjakan?

Alternatif penyelesaian:

Penjelasan dan alternatif jawaban siswa dalam kegiatan Ayo Berpikir Kreatif sepenuhnya diserahkan kepada guru dalam memberikan ide kreatif kepada siswanya.

4. Diketahui 7 titik A, B, C, D, E, . . . , G dan tidak ada titik yang segaris. Tentukan:
   a. Banyaknya segitiga yang dapat dibuat
   b. Banyaknya segitiga yang mempunyai titik A sebagai titik sudut

   Alternatif penyelesaian:

   Diketahui:

   7 titik A, B, C, ..., G

   Tidak ada titik yang segaris

   a. Banyak segitiga yang dapat dibuat

$$C_3^7 = \frac{7!}{3!(7-3)!}$$

$$= \frac{7!}{3!4!}$$

$$= \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{3 \times 2 \times 1 \,.\, 4!} = 35$$

   b. Banyaknya segitiga yang mempunyai titik A sebagai titik sudut

      A selalu ikut (Ada 6 pilihan B, C, D, ..., F) dipilih 2 titik lagi

$$C_2^6 = \frac{6!}{2!(6-2)!}$$

$$= \frac{6!}{2!4!}$$

$$= \frac{6 \times 5 \times 4!}{2 \times 1 \,.\, 4!} = 15$$

5. Yanti adalah desainer pakaian yang akan memadukan pernak-pernik dengan gaya kekinian. Terdapat 5 jenis pernak-pernik berwarna merah, kuning, biru, hijau, dan putih. Jika Yanti hanya memadukan tiga warna pernak-pernik dengan desainnya yang sekarang, berapa banyak jenis pernak-pernik yang bisa dihasilkan?

Alternatif penyelesaian:

$$C_3^5 = \frac{5!}{3!(5-3)!}$$
$$= \frac{5!}{3!2!}$$
$$= \frac{5 \times 4 \times 3!}{2 \times 1 \,.\, 3!} = 10$$

D. Peluang Suatu Kejadian

Ayo Bereksplorasi

Guru mengajak siswa bereksplorasi terkait peluang suatu kejadian. Guru memberikan stimulus dan mengajak siswa berpikir dalam menentukan peluang. Kegiatan ini bertujuan untuk menggali dan meningkatkan rasa ingin tahu siswa dalam menentukan kombinasi.

Peluang

Apabila A adalah himpunan bagian dari ruang Sampel (S). A disebut kejadian yang diinginkan atau hasil yang diinginkan. Peluang 1 dalam ruang sampel sama dengan total semua bobot. Untuk menentukan peluang kejadian A, semua bobot titik sampel di A digabung. Angka ini disebut peluang A, ditulis $P(A)$. Rentang probabilitas untuk A atau $P(A)$ dimulai dari 0 hingga 1 atau

$$0 \leq P(A) \leq 1 \text{ dan } P(A) + P(Ac) = 1$$

Jika n adalah banyaknya titik pada daerah sampel S dari percobaan, dan A adalah kejadian dengan banyaknya x dalam percobaan, maka peluang kejadian A dapat dituliskan. Jika hasil percobaan terjadi n kali dan x kejadian A (hasil yang diinginkan) dari hasil potensial, maka

$$P(A) = \frac{x}{n}$$

Selanjutnya, konsep peluang dapat digambarkan sebagai berikut.

Misalkan S adalah ruang sampel untuk sebuah eksperimen di mana setiap anggota S memiliki peluang yang sama untuk terlibat. Jika A adalah kejadian di mana A adalah himpunan bagian dari S, peluang terjadinya A sama dengan:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$n(A)$ adalah jumlah elemen dalam himpunan A.

$n(S)$ adalah jumlah elemen dalam himpunan ruang sampel S.

Ayo Berpikir Kritis

Seorang pembudi daya ikan baru saja menambahkan 60 ekor ikan ke dalam kolamnya. Akibat hujan deras dua hari sebelumnya, kolam ikan kebanjiran; pembudi daya ikan berusaha memperkirakan jumlah ikan di kolam saat ini dengan cara menangkap dan menghitungnya. Awalnya, ia menangkap hingga 30 ekor ikan dan memberi tanda pada masing-masing ikan sebelum melepaskannya kembali ke kolam. Keesokan harinya, ia menangkap 40 ikan, termasuk dua ikan bertanda. Pembudi daya ikan yakin hasil tangkapannya tidak akan berkurang. Apakah Anda setuju dengan pendapat pembudi daya ikan tersebut?

Petunjuk Guru untuk kegiatan Ayo Berpikir Kritis

1. Berikan kesempatan dan waktu kepada siswa untuk mengamati kegiatan Ayo Berpikir Kritis. Sarankan siswa untuk membentuk kelompok supaya lebih meningkatkan pemahaman satu sama lain.
2. Guru dapat memberikan ilustrasi terkait kegiatan Ayo Berpikir Kritis sebagai bentuk visualisasinya, kemudian ajaklah setiap kelompok dari setiap siswa untuk menyusun argumen dan penjelasannya.
3. Sebagai petunjuk, guru dapat menggunakan konsep peluang dalam memberikan bimbingan kepada siswa.

Penguatan Karakter

Seorang siswa SMA kelas XII rajin berpuasa. Dia melaksanakan puasa Daud (sehari puasa dan sehari tidak, demikian seterusnya) dan puasa Senin-Kamis. Sehingga kadang ada 3 hari berturut-turut dia berpuasa, misalkan hari Minggu, Senin, dan Selasa. Hari Minggu dan Selasa puasa Daud dan Seninnya puasa Senin-Kamis. Kejadian ini bisa menggunakan materi peluang untuk mengetahui ada berapa banyak kemungkinan dia berpuasa 3 hari berturut-turut dalam satu tahun.

Pembahasan Latihan 3.4

a. Terdapat satu keluarga, yaitu ayah, ibu, dan tiga anak. Pada bulan April, ibu lahir. Seberapa besar kemungkinan anggota keluarga lainnya juga lahir di bulan April?

Alternatif penyelesaian:

Peluang semua orang terlahir di bulan April adalah sama yaitu $\frac{1}{12}$.

Ada 2 Kemungkinan kejadian yang terjadi, misalkan

A : Kejadian lahirnya Ibu dan Ayah di bulan April, atau

B : Kejadian lahirnya Ibu dan seorang anaknya di bulan April

Kejadian A yaitu lahirnya Ibu dan Ayah adalah kejadian yang saling bebas artinya terjadinya atau tidak terjadinya salah satu dari kejadian tersebut tidak memengaruhi kemungkinan terjadinya kejadian yang lain. Sehingga kejadian A,

$P(A) = \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{144}$.

Begitu pula kejadian B, maka $P(B) = \frac{1}{12} \times \frac{3}{12} = \frac{1}{144}$.

Sedangkan kejadian A dan B adalah dua kejadian yang saling lepas artinya dua kejadian tersebut tidak mungkin terjadi secara bersamaan, sehingga peluang ada tepat satu orang anggota lain yang lahir di bulan April adalah $P(A) + P(B) = \frac{1}{144} + \frac{3}{144} = \frac{4}{144} = \frac{1}{36}$

Jadi, peluang yang dimaksud adalah $\frac{1}{36}$.

b.

Ayo Berpikir Kreatif

Rombongan Indonesia pada tahun 2022 akan mengirim delegasi untuk tingkat SMA di International Mathematical Olympiad (IMO). Ada tiga siswa sekolah menengah, enam siswa bidang Aljabar dan empat siswa bidang Komputasi, yang harus dipilih secara acak dari 10 kandidat. Berapa kemungkinan peluang terpilihnya delegasi IMO yang terdiri dari 2 siswa Aljabar dan 1 siswa Komputasi?

Alternatif penyelesaian:

Menurut informasi dari soal, maka soal ini termasuk kombinasi.

Semua kombinasi 3 siswa dari 10 siswa, yang mungkin adalah sebanyak

$${}_{10}C_3 = \frac{10!}{(10-3)!3!} = \frac{10!}{7!3!} = \frac{10.9.8}{3.2.1} = 10 \times 3 \times 4 = 120$$

Sedangkan banyaknya kombinasi 2 siswa dari bidang aljabar dan 1 siswa dari bidang komputasi adalah sebanyak

$${}_6C_2 \times {}_4C_1 = \frac{6!}{(6-2)!2!} \times \frac{4!}{(4-1)!.2!} = \frac{6!}{4!.2!} \times \frac{4!}{3!.1!} = 3 \times 5 \times 4 = 60$$

Dengan demikian, peluang terpilihnya delegasi IMO yang terdiri dari 2 bidang aljabar dan 1 dari bidang komputasi adalah $\frac{{}_6C_2 - {}_4C_1}{{}_{10}C_3} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$.

Jadi, peluang terpilihnya yang dimaksud adalah $\frac{1}{2}$.

c. Pada suatu daerah terdapat 400 lansia. Peluang seorang lansia terserang Covid-19 di suatu daerah tersebut adalah 0,3. Berapa banyaknya lansia yang diperkirakan terserang Covid-19?

d. Nomor baru di setiap sisi dialokasikan ke dua dadu bersisi enam. Jumlah dadu pertama adalah 1 1, 2, 3, 3, 3. Jumlah dadu kedua adalah −1, −1, −1, −2, −2, −3. Berapa peluang munculnya jumlah angka positif pada kedua sisi dadu ketika dilempar secara bersamaan.

Alternatif penyelesaian:

Menurut informasi dari soal bahwa dua dadu bersisi 6 dilempar bersamaan, maka kemungkinan variasi pasangan angka yang muncul adalah $n(S) = 6 \times 6 = 36$.

Kemudian karena dadu pertama diberi nomor 1, 1, 2, 3, 3, 3 dan dadu kedua diberi nomor −1, −1, −1, −2, −2, −3, maka kemungkinan pasangan yang terjadi dengan syarat penjumlahan angkanya positif adalah seperti tersaji dalam tabel berikut.

Kemungkinan ke-	Dadu 1	Dadu 2	Banyak Variasi
1	2	−1	$1 \times 3 = 3$
2	3	−1 atau −2	$3 \times 5 = 15$
Jumlah Variasi			

Dengan demikian $n(A) = 18$ dan $n(S) = 36 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \Rightarrow \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.

Jadi, peluang terjadinya jumlah bilangan pada kedua sisi atas dadu bernilai positif adalah $\frac{1}{2}$.

e. Sebuah kotak berisi tiga kelereng merah, empat kelereng hijau, dan lima kelereng biru. Berapa peluang terambilnya 3 kelereng dari kotak tersebut?

a. Semua kelereng merah

b. Semua kelereng biru

c. Dua kelereng merah dan satu kelereng hijau

d. Satu kelereng merah, satu kelereng hijau, dan satu kelereng biru

Alternatif penyelesaian:

Jumlah seluruh kelereng ada 12.

Banyaknya cara memilih 3 dari 12 kelereng adalah ${}_{12}C_3 = 220$.

a. Banyaknya cara memilih 3 kelereng merah dari 3 kelereng merah adalah ${}_3C_3 = 1$

Peluang 3 kelereng yang terambil semuanya merah = $\frac{1}{220}$.

b. Banyaknya cara memilih 3 kelereng biru dari 5 kelereng biru adalah ${}_5C_3 = 10$

Peluang 3 kelereng yang terambil semuanya biru = $\frac{10}{220} = \frac{1}{22}$.

c. Banyaknya cara memilih 2 kelereng merah dari 3 kelereng merah adalah ${}_3C_2 = 3$.

Banyaknya cara memilih 1 kelereng hijau dari 4 kelereng hijau adalah ${}_4C_1 = 4$.

Maka sesuai kaidah perkalian, banyaknya cara memilih 2 buah berwarna merah dan 1 berwarna hijau = $3 \times 4 = 12$. Peluang 3 kelereng yang terambil 2 buah berwarna merah dan 1 berwarna hijau = $\frac{12}{220}$.

d. Banyaknya cara memilih 1 kelereng merah dari 3 kelereng merah adalah ${}_3C_1 = 3$.

Banyaknya cara memilih 1 kelereng hijau dari 4 kelereng hijau adalah ${}_4C_1 = 4$. Banyaknya cara memilih 1 kelereng biru dari 5 kelereng biru adalah ${}_5C_1 = 5$.

Maka banyaknya cara memilih 1 buah kelereng merah, 1 hijau dan 1 biru = $3 \times 4 \times 5 = 60$.

Jadi, Peluang 3 kelereng yang terambil 1 berwarna merah, 1 hijau dan 1 biru = $\frac{60}{220}$.

E. Peluang Kejadian Majemuk

Guru meminta siswa untuk menyebutkan peristiwa pada kehidupan sehari-hari yang di dalamnya terdapat kegiatan pelemparan koin atau pelantunan dadu.

Ayo Bereksplorasi

Guru meminta siswa untuk mengamati Gambar 3.4 yang merupakan gambar munculnya sisi gambar pada koin dan mata 5 pada dadu.

Istilah-istilah matematika dari hasil pengamatan adalah kejadian dan kejadian majemuk.

Ayo Berpikir Kritis

Guru meminta siswa untuk mendiskusikan pertanyaan-pertanyaan yang telah disediakan atau pertanyaan lain yang diajukan oleh siswa terkait dengan Gambar 3.4 dan gambar lain yang disajikan, kemudian mintalah kepada siswa untuk membuat kesimpulan yang terkait dengan hasil pengamatan dan hasil diskusinya.

Guru membantu siswa untuk bersikap teliti dan kritis terhadap hasil pengamatan dan hasil diskusi, kemudian mintalah siswa untuk melakukan percobaan pelemparan sebuah koin dan pelantunan sebuah dadu untuk lebih memahami tentang materi kejadian majemuk yang akan dibahas.

Selanjutnya, guru mengajak siswa untuk memahami definisi dari kejadian majemuk beserta syarat berlakunya.

Definisi 3.4

Kejadian majemuk adalah gabungan dari dua atau lebih suatu kejadian yang berbeda. Kejadian majemuk juga bisa dikatakan merupakan suatu kejadian yang menggabungkan dua atau lebih kejadian sederhana. Akan ditentukan kemungkinan kejadian majemuk menggunakan prosedur antar-set. Irisan himpunan ini adalah hubungan dua himpunan dengan dua himpunan.

Guru meminta siswa untuk mempelajari contoh 3.16, 3.17, dan 3.18 beserta alternatif penyelesaiannya agar pemahaman siswa lebih luas lagi tentang materi kejadian majemuk. Kemudian, bimbinglah siswa dalam memahami ketiga contoh soal tersebut apabila menghadapi kesulitan.

Ayo Berpikir Kreatif

Ajaklah siswa untuk mengaitkan semua informasi yang diperoleh pada bagian Ayo Bereksplorasi dan Ayo Berpikir Kritis untuk mendiskusikan permasalahan Ayo Berpikir Kreatif.

Alternatif kesimpulan yang diharapkan

Kejadian majemuk adalah dua atau lebih kejadian yang terjadi secara bersamaan.

a. Notasi gabungan dua kejadian ditulis: $(A \cup B)$
b. Notasi gabungan tiga kejadian ditulis: $(A \cup B \cup C)$
c. Notasi irisan dua kejadian ditulis: $(A \cap B)$
d. Notasi irisan tiga kejadian ditulis: $(A \cap B \cap C)$

Ayo Berkomunikasi

Mintalah siswa untuk mengomunikasikan hasil kesimpulan dari kegiatan Ayo Berpikir Kreatif dengan kegiatan presentasi kelas, diskusi kelas, dan mintalah siswa yang lainnya untuk mempertanyakan atau mengomentari terhadap hasil kesimpulan yang didapat.

Kemudian, guru mengajak siswa untuk memahami definisi dari rumus kejadian majemuk beserta syarat berlakunya.

Definisi 3.5

Peluang kejadian majemuk adalah peluang suatu kejadian dengan dua atau lebih kejadian yang terjadi. Kejadian majemuk dinotasikan dengan "dan" dengan lambang $\cap$ dan "atau" dengan lambang $\cup$. Apabila ada dua kejadian A dan kejadian B, maka rumus umumnya adalah sebagai berikut:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Ayo Menggunakan Teknologi

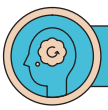
Coba tambahkan pengetahuan kalian terkait dengan Peluang Kejadian Majemuk dengan mengunjungi tautan berikut, karena ada sesuatu yang menarik.

https://s.id/PeluangKejadianMajemuk

Coba tulislah hasil penelusuranmu.

1. Pada bagian pendahuluan, apa yang kalian ketahui tentang Peluang Kejadian Majemuk?
2. Apakah yang dimaksud dengan suatu kejadian pasti dan tidak pasti terjadi, serta berapakah peluangnya?
3. Pada bagian Peluang Kejadian Gabungan, apa yang kalian ketahui tentang Peluang Kejadian Gabungan?
4. Sebutkan ada berapa jenis kejadian majemuk dan sebutkan simbolnya!

1. Peluang Kejadian Majemuk Saling Lepas



Ayo Mengingat Kembali

Mintalah kepada siswa untuk menyebutkan kejadian apa saja yang mungkin muncul pada pelantunan dua dadu sebanyak satu kali secara bersamaan.

Kemudian, guru meminta siswa untuk memperhatikan dengan cermat pada Tabel 3.1 tentang pelantunan dua dadu sebanyak satu kali secara bersamaan dan mencocokkan dengan hasil yang telah didapatkan.

Tabel 3.1 Pelantunan Dua Dadu

Dadu 1 / Dadu 1	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Ayo Bereksplorasi

Guru menyebutkan salah satu kejadian saling lepas yang mungkin muncul pada pelantunan dua dadu sebanyak satu kali secara bersamaan.

Istilah-istilah matematika dari hasil pengamatan adalah kejadian saling lepas dan peluang saling lepas.

Mintalah kepada siswa untuk mendiskusikan pertanyaan-pertanyaan yang disediakan atau pertanyaan yang diajukan oleh siswa terkait dengan Tabel 3.1 yang disajikan, kemudian ajaklah siswa untuk membuat kesimpulan berdasarkan hasil diskusinya.

Kemudian, guru mengajak siswa untuk memahami definisi dari rumus kejadian majemuk saling lepas beserta syarat berlakunya.

Definisi 3.6

Dua kejadian A dan B disebut kejadian saling lepas satu sama lainnya apabila keduanya tidak dapat terjadi pada waktu yang bersamaan atau tidak saling berhubungan antara keduanya, dengan kata lain dua kejadian yang tidak memiliki irisan. Sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$P(A \cap B) = 0$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Ayo Berpikir Kritis

Jalal mengatakan bahwa apabila ada sebuah keranjang yang berisi 4 buah apel berwarna merah dan 4 buah apel berwarna hijau, maka peluang yang mungkin terjadi adalah nol (0) untuk terpilihnya 2 apel berwarna merah dan 2 apel berwarna hijau, apabila di dalam keranjang tersebut diambil tiga buah apel secara acak. Setujukah kalian dengan pernyataan Jalal? Jelaskan.

Kemudian, guru meminta siswa untuk memahami contoh soal yang disajikan beserta alternatif penyelesaiannya untuk mendapatkan informasi tentang materi peluang saling lepas serta membimbing siswa dalam melengkapi kegiatan-kegiatan apabila menghadapi kesulitan.

Ayo Berpikir Kreatif

Guru meminta siswa untuk mengaitkan semua informasi yang diperoleh pada kegiatan Ayo Bereksplorasi dan uraian pada contoh soal untuk menjawab pertanyaan dan mengklasifikasi kesimpulan yang disajikan atau yang diajukan oleh siswa. Guru meminta siswa untuk menuliskan jawaban yang didapat pada diskusi kelas.

Alternatif kesimpulan yang diharapkan:

Peluang kejadian majemuk saling lepas adalah peluang dua atau lebih dari suatu kejadian yang mungkin terjadi bersama-sama.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Ayo Berkomunikasi

Mintalah siswa untuk mengomunikasikan hasil kesimpulan dari kegiatan Ayo Berpikit Kreatif dengan kegiatan presentasi kelas, diskusi kelas, dan mintalah siswa yang lainnya untuk mempertanyakan atau mengomentari hasil kesimpulan yang didapat.

Ayo Mencoba

Jumlah siswa Sekolah Menengah Atas kelas XII adalah 34, ada 23 siswa di antaranya suka pelajaran Matematika, ada 19 siswa suka pelajaran Biologi, dan ada 12 siswa suka kedua pelajaran tersebut. Ketika seorang siswa dipilih secara acak, maka tentukan kemungkinan seorang siswa yang menyukai pelajaran Matematika atau Biologi.

2. Peluang Kejadian Saling Bebas

Ayo Bereksplorasi

Guru meminta siswa untuk menyebutkan kejadian apa saja yang mungkin terjadi pada pelantunan dua dadu secara bersamaan sebanyak satu kali.

Guru menyebutkan salah satu kejadian majemuk saling bebas berdasarkan Gambar 3.5 yang diamati oleh siswa.

Apabila kalian melempar dua dadu berwarna merah dan putih secara bersama-sama, tentukan peluang munculnya mata dadu 2 pada dadu warna merah dan mata dadu 5 pada dadu warna putih.

Istilah-istilah matematika yang diharapkan berdasarkan hasil pengamatannya adalah kejadian saling lepas dan peluang kejadian saling lepas.

Kemudian guru meminta siswa untuk mendiskusikan pertanyaan yang disediakan atau pertanyaan siswa yang diajukan terkait dengan Gambar 3.5 tentang kejadian saling lepas, kemudian ajaklah siswa untuk membuat kesimpulan dari hasil diskusi yang didapat.

Guru membantu siswa untuk bersikap teliti dan kritis terhadap kegiatan Ayo Bereksplorasi. Selanjutnya guru bisa mengajak siswa untuk melakukan percobaan pengambilan barang tertentu seperti penghapus sebanyak dua kali untuk lebih memahami tentang materi peluang saling bebas yang dipelajari.

Kemudian, guru mengajak siswa untuk memahami definisi dari rumus kejadian majemuk saling bebas beserta syarat berlakunya.

Definisi 3.6

Dua kejadian A dan B dinyatakan saling bebas apabila muncul atau tidak munculnya kejadian A tidak memengaruhi muncul atau tidak munculnya kejadian B, begitu juga sebaliknya. Dengan kata lain kejadian A dan B memiliki keterkaitan, tetapi tidak saling memengaruhi. Jika dirumuskan secara matematis, maka kejadian A dan B dikatakan saling bebas, yakni sebagai berikut:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Kemudian, guru meminta siswa memahami sajian contoh soal beserta alternatif penyelesaiannya untuk mendapatkan informasi tentang materi peluang saling bebas serta membimbing siswa dalam melengkapi kegiatan-kegiatan apabila menghadapi kesulitan.

Ayo Berpikir Kreatif

Guru meminta siswa untuk mengaitkan semua informasi yang diperoleh pada kegiatan Ayo Bereksplorasi dan sajian pada contoh soal untuk menjawab pertanyaan pada Ayo Berpikir Kreatif. Kemudian mintalah siswa untuk berdiskusi dan menuliskan jawabannya.

Alternatif kesimpulan yang diharapkan

Peluang majemuk saling bebas adalah peluang dua atau lebih kejadian yang tidak saling memengaruhi antara kejadian yang satu dengan kejadian yang lainnya.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Ayo Berkomunikasi

Mintalah siswa untuk mengomunikasikan hasil kesimpulan dari kegiatan Ayo Berpikit Kreatif dengan kegiatan presentasi kelas, diskusi kelas, dan mintalah siswa yang lainnya untuk mempertanyakan atau mengomentari hasil kesimpulan yang didapat.

Pembahasan Latihan 3.5

1.

Ayo Berpikir Kreatif

Sekelompok ilmuwan ingin melakukan penelitian serangga berbahaya di Sulawesi Tenggara. Misalkan A mewakili kemungkinan cuaca buruk, B mewakili kemungkinan masalah

dengan instansi pemerintah daerah, dan C mewakili kemungkinan masalah dengan peralatan fotografi mereka. Tentukan minimal setidaknya tiga kejadian majemuk yang mungkin terjadi.

Alternatif penyelesaian:

Kejadian I

Mereka akan menghadapi cuaca buruk atau masalah dengan lembaga pemerintah.

Notasi: $(A \cup B)$

Kejadian II

Mereka akan menghadapi masalah dengan lembaga pemerintah atau kesulitan dengan alat-alat fotografi.

Notasi: $(B \cup C)$

Kejadian III

Mereka akan menghadapi cuaca buruk atau kesulitan dengan alat-alat fotografi.

Notasi: $(A \cup C)$

Kejadian IV

Mereka akan menghadapi masalah dengan cuaca buruk atau masalah dengan lembaga pemerintah atau kesulitan dengan alat-alat fotografi.

Notasi: $(A \cup B \cup C)$

Kejadian V

Mereka akan menghadapi cuaca buruk dan masalah dengan lembaga pemerintah.

Notasi: $(A \cap B)$

Kejadian VI

Mereka akan menghadapi cuaca buruk dan kesulitan dengan alat-alat fotografi.

Notasi: $(A \cap C)$

Kejadian VII

Mereka akan menghadapi masalah dengan lembaga pemerintah dan kesulitan dengan alat-alat fotografi.

Notasi: $(B \cap C)$

Kejadian VIII

Mereka akan menghadapi cuaca buruk dan masalah dengan lembaga pemerintah dan kesulitan dengan alat-alat fotografi.

Notasi: $(A \cap B \cap C)$

2. Sebuah dadu dilantunkan sekali. Jika A adalah kejadian munculnya mata dadu yang habis dibagi 6 dan B adalah kejadian munculnya mata dadu habis dibagi 5 maka tentukanlah peluang $P(A \cap B)$ dan $P(A \cap B)$.

Alternatif penyelesaian:

Misalkan: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, n(S) = 6

$A = \{6\}$, n(A) = 1

$B = \{5\}$, n(B) = 1

a) $P(A \cap B) = 0$

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{3}$$

3. Sebuah dadu merah dan sebuah dadu putih dilantunkan serentak satu kali. Tentukanlah peluang munculnya angka 2 pada dadu merah atau angka 4 pada dadu putih.

Alternatif penyelesaian:

$n(S) = 6 \times 6 = 36$

$A = \{21, 22, 23, 24, 25, 26\}$, $n(A) = 6$

$B = \{14, 24, 34, 44, 45, 46\}$, $n(B) = 6$

$A \cap B = \{24\}$, $n(A \cap B) = 1$

Dikarenakan A dan B tidak saling lepas, maka didapat

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= \frac{1}{36} + \frac{6}{36} - \frac{1}{36}$$
$$= \frac{11}{36}$$

4. Dalam sebuah keranjang terdapat 4 buah apel merah dan 4 buah apel hijau. Jika diambil tiga buah apel secara acak dari dalam keranjang tersebut, tentukanlah peluang terpilihnya 2 apel merah dan 2 apel hijau.

Alternatif penyelesaian:

Misalkan A adalah kejadian terambilnya 2 apel merah

B adalah kejadian terambilnya 2 apel hijau

maka A dan B saling lepas, sehingga $P(A \cap B) = 0$

5. Sebuah kantong berisi 5 bola merah dan 2 bola biru. Kantong lain berisi 3 bola merah dan 1 bola biru. Jika sebuah bola diambil secara acak dari salah satu kantong, maka tentukan pelauang terambilnya bola biru.

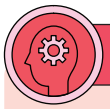
Alternatif penyelesaian:

$P(1 \text{ biru}) = P(1 \text{ biru pada kantong pertama atau } 1 \text{ biru pada kantong kedua})$

$P(1 \text{ biru}) = P(1 \text{ biru pada kantong pertama}) + P(1 \text{ biru pada kantong kedua})$

$$P(1 \text{ biru}) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{7}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)$$
$$= \frac{15}{56}$$

6.



Ayo Berpikir Kritis

Di atas meja terdapat dua set kartu. Setiap set kartu terdiri atas 52 lembar dengan empat warna berbeda (merah, kuning, hijau, dan biru). Masing-masing warna terdiri atas 13 kartu bernomor 1 sampai dengan 13. Satu kartu akan diambil secara acak dari dua set kartu tersebut. Tentukan peluang terambil kartu berwarna merah atau bernomor 13.

Alternatif penyelesaian:

Menurut informasi pada soal bahwa setiap set kartu terdiri atas 52 lembar dengan empat warna berbeda (merah, kuning, hijau, dan biru). Masing-masing warna terdiri atas 13 kartu bernomor 1 sampai dengan 13, maka banyak masing-masing kartu ada 26 dan total semua kartu sebanyak 104.

Banyak kartu berwarna merah ada 26,

maka peluang terambil kartu berwarna merah $= \frac{26}{104}$

Banyak kartu bernomor 13 ada $8 - 2 = 6$,

maka peluang terambil kartu bernomor 13 $= \frac{6}{104}$

Dengan demikian,

$$\begin{aligned}\text{peluang terambil kartu berwarna merah atau bernomor 13} &= \frac{26}{104} + \frac{6}{104} \\ &= \frac{32}{104} \\ &= \frac{8}{26}\end{aligned}$$

Jadi, peluang terambil kartu berwarna merah atau bernomor 13 adalah $\frac{8}{26}$.

Ayo Menggunakan Teknologi

Coba tambahkan pengetahuan kalian terkait dengan Peluang Kejadian Saling Bebas dengan mengunjungi tautan berikut karena ada sesuatu yang menarik.
https://s.id/PeluangKejadianSalingBebas

Coba tulislah hasil penelusuranmu.

1. Apa yang kalian ketahui tentang peluang kejadian majemuk saling bebas?
2. Temukan, ada berapa banyak bentuk diagram venn untuk kejadian majemuk saling bebas?
3. Bagaimana cara menemukan rumus peluang kejadian majemuk saling bebas?
4. Sebutkan ada berapa jenis kejadian majemuk saling bebas dan sebutkan simbolnya!

Ayo Berefleksi

Tuliskan apa yang Anda pelajari melalui mempelajari konten untuk kejadian majemuk saling lepas dan saling bebas.

1. Apa yang dimaksud dengan kejadian majemuk, kejadian majemuk saling lepas, kejadian majemuk saling bebas?
2. Bagaimana cara menentukan peluang kejadian majemuk?
3. Bagaimana cara menentukan peluang kejadian majemuk saling lepas?
4. Bagaimana cara menentukan peluang kejadian majemuk saling bebas?
5. Apakah ada hubungannya antara kejadian majemuk saling lepas dengan kejadian majemuk saling bebas?

F. Peluang Kejadian Majemuk Saling Bebas Bersyarat

Ayo Bereksplorasi

Guru meminta siswa untuk menyebutkan kejadian apa saja yang mungkin muncul pada pengambilan dua kartu secara satu per satu dengan diberikan syarat tertentu.

Istilah-istilah matematika yang diharapkan berdasarkan hasil pengamatannya adalah kejadian saling bebas bersyarat dan peluang kejadian saling bebas.

Kemudian, guru mengajak siswa untuk memahami definisi dari rumus kejadian majemuk saling bebas bersyarat beserta syarat berlakunya.

Definisi 3.7

Dua kejadian A dan B dikatakan kejadian majemuk saling bebas bersyarat apabila memenuhi syarat saling bebas dan terjadinya secara berturut-turut.

Jika dirumuskan secara matematis, maka kejadian A dan B dikatakan kejadian majemuk saling bebas bersyarat, yakni sebagai berikut:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B \mid A)$$

Di mana: $P(B \mid A)$ dibaca Peluang kejadian B setelah A

Dari rumus ini dapat pula diturunkan rumus:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(A)}{n(S)}} = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$$

Jadi, $P(B|A) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(A)}$

Kemudian, guru meminta siswa memahami sajian contoh soal beserta alternatif penyelesaiannya untuk mendapatkan informasi tentang materi peluang saling bebas bersyarat serta membimbing siswa dalam melengkapi kegiatan-kegiatan apabila menghadapi kesulitan.

Ayo Berpikir Kreatif

Guru meminta siswa untuk mengaitkan semua informasi yang diperoleh pada kegiatan Ayo Bereksplorasi dan sajian pada contoh soal untuk menjawab pertanyaan pada Ayo Berpikir Kreatif. Kemudian mintalah siswa untuk berdiskusi dan menuliskan jawabannya.

Alternatif kesimpulan yang diharapkan:

Peluang bersyarat adalah peluang dua kejadian yang saling bergantung antara kejadian yang satu dengan kejadian yang lain apabila terjadi atau tidak terjadinya untuk kejadian A akan memengaruhi terjadinya atau tidak terjadinya kejadian B.

$$P(B \mid A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$$

Ayo Berkomunikasi

Mintalah siswa untuk mengomunikasikan hasil kesimpulan dari kegiatan *Ayo Berpikit Kreatif* dengan kegiatan presentasi kelas, diskusi kelas, dan mintalah siswa yang lainnya untuk mempertanyakan atau mengomentari hasil kesimpulan yang didapat.

Pembahasan Latihan 3.6

1. Dua buah dadu dilantunkan serentak satu kali. Jika A adalah kejadian munculnya dua mata dadu yang hasil kalinya 12, dan B adalah kejadian munculnya dua mata dadu yang jumlahnya 8, tentukanlah $P(A \mid B)$ dan $P(B \mid A)$.

   Alternatif penyelesaian:

   $n(S) = 6 \times 6 = 36$

   $A = \{34, 43, 62, 26\}$, $n(A) = 4$

   $B = \{26, 62, 35, 53, 44\}$, $n(B) = 5$

   $A \cap B = \{26, 62\}$, $n(A \cap B) = 2$

Sehingga $P(A) \times P(B) = \frac{5}{36} \times \frac{4}{36}$

$= \frac{5}{324}$

$P(A \cap B) = \frac{2}{36}$

$= \frac{1}{18}$

Dikarenakan $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$, maka A dan B **tidak saling bebas**.

2. Dari sebuah tumpukan kartu bridge, diambil dua kartu satu per satu tanpa pengembalian. Berapakah peluang kartu pertama yang terambil adalah kartu As dan kartu kedua adalah kartu King ?

   Alternatif penyelesaian:

   Misalkan A adalah kejadian terambilnya kartu pertama adalah kartu As

   B adalah kejadian terambilnya kartu kedua adalah kartu King

   Kartu pertama yang terambil adalah kartu As maka peluangnya adalah $= P(A) = \frac{4}{52}$.

   Karena kartu tidak dikembalikan maka jumlah kartu tinggal 51 dengan kartu King tetap 4 buah jika kartu pertama yang terambil adalah kartu As.

   Maka peluang pengambilan kartu kedua adalah kartu King setelah pengambilan kartu pertama adalah kartu As adalah $= P(B \mid A) = \frac{4}{51}$.

   Jadi, peluang pengambilan pertama adalah kartu As dan pengambilan kedua adalah kartu King adalah $\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B \mid A) = \frac{4}{52} \times \frac{4}{51}$

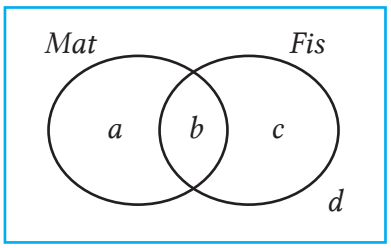
   $= \frac{4}{663}$.

3. Di dalam kelas yang terdiri atas 40 siswa, 34 di antaranya menyukai pelajaran Matematika dan 22 siswa menyukai Fisika serta 2 siswa tidak menyukai keduanya. Jika seorang siswa dipilih secara acak, maka temukan minimal sebanyak tiga cara berbeda untuk menentukan berapa banyak peluang siswa tersebut menyukai Matematika setelah mengetahui dia menyukai Fisika.

Alternatif penyelesaian:

Berikut salah satu caranya.

Perhatikan ilustrasi diagram venn berikut.



$a + b + c + d = 40$ ..... (1)

$a + b = 34$ ..... (2)

$b + c = 22$ ..... (3)

$d = 2$ ..... (4)

Dari persamaan (1), (2) dan (4) diperoleh

$34 + c + 2 = 40$ maka $c = 4$

$b + c = 22$, maka $b = 18$

Sehingga $P(M \mid F) = \dfrac{n(M \cap F)}{n(F)}$

$= \dfrac{18}{22}$

$= \dfrac{9}{11}$

4. Dalam sebuah kotak terdapat 4 bola hijau dan 6 bola kuning. Jika diambil empat bola satu per satu dari dalam kotak tersebut, tentukanlah peluang bahwa pada pengambilan pertama dan kedua terambil bola hijau serta pada pengambilan ketiga dan keempat terambil bola kuning. Di mana pengambilan itu disyaratkan bahwa:

   a. Tanpa pengembalian

   b. Dengan pengembalian

Alternatif penyelesaian:

a. $P(H \cap H \cap K \cap K) = P(H) \times P(H) \times P(K) \times P(K)$

$= \dfrac{4}{10} \times \dfrac{3}{9} \times \dfrac{6}{8} \times \dfrac{5}{7}$

$= \dfrac{1}{14}$

b. $P(H \cap H \cap K \cap K) = P(H) \times P(H) \times P(K) \times P(K)$

$$= \frac{6}{10} \times \frac{6}{10} \times \frac{6}{10} \times \frac{6}{10}$$

$$= \frac{36}{625}$$

5. Dalam sebuah kantong terdapat 5 bola hitam dan 5 bola kuning. Jika dari dalam kantong itu diambil dua bola tiga kali berturut-turut, maka tentukanlah peluang bahwa pada pengambilan pertama, kedua, dan ketiga berturut-turut terambil dua bola hitam, dua bola hitam, dan dua bola kuning. Di mana pengambilan itu disyaratkan bahwa:
   a. Tanpa pengembalian
   b. Dengan pengembalian

Alternatif penyelesaian:

a. $P(H \cap H \cap K) = P(H) \times P(H) \times P(K)$

$$= \frac{{}_5C_2}{{}_{10}C_2} \times \frac{{}_3C_2}{{}_8C_2} \times \frac{{}_5C_2}{{}_6C_2}$$

$$= \frac{10}{45} \times \frac{3}{28} \times \frac{10}{15}$$

$$= \frac{1}{63}$$

b. $P(H \cap H \cap K) = P(H) \times P(H) \times P(K)$

$$= \frac{{}_5C_2}{{}_{10}C_2} \times \frac{{}_5C_2}{{}_{10}C_2} \times \frac{{}_5C_2}{{}_{10}C_2}$$

$$= \frac{10}{45} \times \frac{10}{45} \times \frac{10}{45}$$

$$= \frac{8}{729}$$

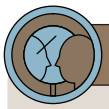
Ayo Menggunakan Teknologi

Coba tambahkan pengetahuan kalian terkait Peluang Kejadian Bersyarat dengan mengunjungi tautan berikut karena ada sesuatu yang menarik.

https://s.id/PeluangKejadianBersyarat

Coba tulislah hasil penelusuranmu.

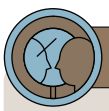
1. Apa yang kalian ketahui tentang peluang kejadian majemuk saling bebas bersyarat?
2. Temukan, adakah bentuk diagram venn untuk kejadian majemuk saling bebas bersyarat?
3. Bagaimana cara menemukan rumus peluang kejadian majemuk saling bebas bersyarat?
4. Sebutkan ada berapa jenis kejadian majemuk saling bebas bersyarat dan sebutkan simbolnya.



Ayo Berefleksi

Tuliskan apa yang telah kalian pelajari melalui materi tentang kejadian majemuk saling lepas dan saling bebas.

1. Apa saja syarat suatu kejadian termasuk dalam kategori kejadian majemuk saling bebas bersyarat?
2. Apa yang dimaksud dengan kejadian majemuk saling bebas bersyarat?
3. Bagaimana cara menentukan peluang kejadian majemuk saling bebas bersyarat?
4. Apakah ada hubungannya antara kejadian majemuk saling lepas, kejadian majemuk saling bebas dengan kejadian majemuk saling bebas bersyarat?



Ayo Berefleksi Bab 3

1. Bagaimana menentukan kaidah suatu kejadian?
2. Apa yang dapat kalian ketahui tentang permutasi?
3. Bagaimana cara menemukan rumus permutasi?
4. Apa yang dapat kalian ketahui tentang kombinasi?

5. Bagaimana cara menemukan rumus kombinasi?
6. Bagaimana menentukan peluang suatu kejadian majemuk?
7. Bagaimana menentukan kejadian majemuk saling lepas?
8. Bagaimana menentukan kejadian majemuk saling bebas?
9. Bagaimana menentukan kejadian majemuk saling bebas bersyarat?
10. Bagaimana membedakan antara kejadian majemuk saling lepas dengan saling bebas?

Uji Kompetensi 3

A. Soal Pilihan Ganda

1. Seseorang mempunyai 5 model baju dan 3 model celana. Banyaknya cara (pasangan baju-celana) yang dapat dikenakan orang tersebut dalam berpakaian adalah ... cara.

   a. 8
   b. 10
   c. 12
   d. 14
   e. 15

   Alternatif penyelesaian:

   Banyaknya cara (pasangan baju-celana) adalah $5 \times 3 = 15$ cara.

2. Andi, Budi, dan Citra adalah calon ketua. Mona dan Lisa adalah calon sekretaris. Sedangkan Fitri dan Fina adalah calon bendahara. Banyaknya cara menyusun pengurus Karang Taruna (ketua, sekretaris, dan bendahara) yang mungkin dibentuk adalah ....

   a. 12 cara
   b. 18 cara
   c. 20 cara
   d. 24 cara
   e. 30 cara

Alternatif penyelesaian:

Diketahui:

Ketua = 3 orang

Sekretaris = 2 orang

Bendahara = 2 orang

Jadi, banyak cara menyusun pengurus Karang Taruna adalah $3 \times 2 \times 2 = 12$ cara.

3. Banyaknya susunan huruf yang terdiri atas tiga huruf berbeda yang dapat disusun dari huruf-huruf K, E, C, I, L jika huruf pertama harus konsonan adalah ... .

   a. 60 susunan
   b. 36 susunan
   c. 38 susunan
   d. 42 susunan
   e. 44 susunan

Alternatif penyelesaian:

Tiga huruf berbeda, jika huruf pertama konsonan

Huruf konsonan ada 3,

3	4	3

Jadi, banyak susunan huruf adalah $3 \times 4 \times 3 = 36$ susunan.

4. Banyaknya bilangan asli yang terdiri atas empat angka berbeda yang dapat disusun dari angka-angka 0, 1, 2, 3, 4 dan 5 jika bilangan tersebut nilainya lebih dari 3.000 adalah ....

   a. 96 bilangan
   b. 122 bilangan
   c. 164 bilangan
   d. 180 bilangan
   e. 196 bilangan

Alternatif penyelesaian:

Diketahui:

0, 1, 2, 3, 4, 5

Banyaknya bilangan asli yang terdiri atas empat angka lebih dari 3.000

Ribuan : 3 angka (3, 4, 5)

Ratusan : 5 angka

Puluhan : 4 angka

Satuan : 3 angka

Menggunakan permutasi

$P_1^3 \times P_1^5 \times P_1^4 \times P_1^3 = 3 \times 5 \times 4 \times 3 = 180$ bilangan.

5. Dua dadu dan sekeping mata uang dilempar sekaligus, kemudian dicatat sisi yang muncul. Jika diasumsikan munculnya setiap mata dadu seimbang dan munculnya setiap mata uang seimbang, maka peluang akan didapatkan sisi angka pada mata uang dan kedua mata dadu berjumlah 5 adalah ….

a. $\frac{1}{16}$
b. $\frac{1}{18}$
c. $\frac{1}{36}$
d. $\frac{1}{72}$
e. $\frac{1}{144}$

Alternatif penyelesaian:

Diketahui dua dadu dan sekeping mata uang dilempar sekaligus, kemudian dicatat sisi yang muncul. Diasumsikan munculnya setiap mata dadu seimbang dan munculnya setiap mata uang seimbang. Sehingga peluang akan didapatkan sisi angka pada mata uang dan kedua mata dadu berjumlah 5 adalah sebagai berikut:

1) Mata uang memiliki dua sisi, yakni sisi angka dan sisi gambar, sehingga peluang sisi angka pada mata uang = $\frac{1}{2}$.
2) Dua mata dadu yang berjumlah 5 ada sebanyak 4, yakni 1 dan 4, 2 dan 3, 4 dan 1, 3 dan 2 sebanyak dua kali, sehingga peluang kedua mata dadu berjumlah 5 = $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

Dikarenakan kejadian 1) dan 2) adalah saling berkaitan, maka peluang akan didapatkan sisi angka pada mata uang dan kedua mata dadu berjumlah 5 adalah $\frac{1}{2} \times \frac{1}{9} = \frac{4}{18}$.

Jadi, peluang akan didapatkan sisi angka pada mata uang dan kedua mata dadu berjumlah 5 adalah $\frac{4}{18}$.

B. Soal Uraian

6. Dalam sebuah pertemuan kecil yang dihadiri oleh 3 orang pria dan 3 orang wanita, mereka duduk mengelilingi meja bundar.
   a. Berapa banyak cara mereka duduk?
   b. Berapa banyak cara mereka duduk apabila semua wanita duduk berdekatan?
   c. Berapa banyak cara mereka duduk jika tidak ada dua wanita yang berdekatan?

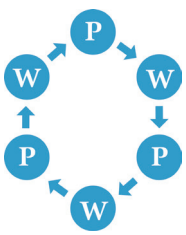
   Alternatif penyelesaian:

   i. Berapa banyak cara mereka duduk $= (3 + 3 - 1)!$
   $= 5!$
   $= 120$ cara

   ii. Karena semua wanita duduk berdekatan, maka pertama dianggap semua wanita adalah satu, sehingga banyak cara duduknya adalah $(1 + 3 - 1)! = 36$ cara. Akan tetapi, untuk 3 wanita itu terdapat $3! = 6$ cara duduknya.

   Sehingga, banyak cara mereka duduk apabila semua wanita duduk berdekatan $= 6 \times 6 = 36$.

   iii. Karena tidak ada dua wanita yang duduk berdekatan, maka cara duduk mereka hanya ada satu model duduk, yaitu



   Sehingga, banyak cara pria maupun wanita duduk masing-masing sebanyak 3!. Jadi, banyak cara mereka duduk jika tidak ada wanita yang berdekatan adalah $3! \times 3! = 36$.

7. Sebuah dompet berisi 4 keping uang logam seribu rupiah dan 3 keping uang logam lima ratus rupiah. Dompet yang kedua berisi 3 keping uang logam seribu rupiah dan 5 keping uang logam lima ratus rupiah. Sekeping uang logam diambil dari dompet pertama dan dimasukkan ke dompet kedua. Jika kemudian diambil sekeping uang logam dari dompet kedua, berapakah peluang bahwa uang logam yang diambil dari dompet kedua tersebut adalah logam lima ratus rupiah?

Alternatif penyelesaian:

Misalkan A_1 adalah kejadian terambilnya uang logam seribu rupiah dari dompet pertama.

B_1 adalah kejadian terambilnya uang logam lima ratus rupiah dari dompet pertama.

A_2 adalah kejadian terambilnya uang logam seribu rupiah dari dompet kedua.

B_2 adalah kejadian terambilnya uang logam loma ratus rupiah dari dompet kedua.

Peluang bahwa uang logam yang diambil dari dompet kedua merupakan uang logam lima ratus rupiah didapat dengan cara sebagai berikut.

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap B_1) \cup P(A_2 \cap B_2) &= P(A_1 \cap B_1) + P(A_2 \cap B_2) \\ &= P(A_1)\, P(B_2 \mid A_1) + P(B_1)\, P(B_2 \mid B_1) \\ &= \left(\frac{4}{7}\right)\left(\frac{5}{9}\right) + \left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{6}{9}\right) \\ &= \frac{20}{63} + \frac{18}{63} \\ &= \frac{38}{63} \end{aligned}$$

Jadi, peluang bahwa uang logam yang diambil dari dompet kedua merupakan uang logam lima ratus rupiah adalah $\frac{38}{63}$.

8. Masing-masing satu huruf diambil dari kata "MUDAH" dan "SANGAT". Berapakah peluang bahwa kedua huruf tersebut terdiri dari satu vokal dan satu konsonan?

Alternatif penyelesaian:

Kemungkinannya adalah satu vokal dari kata "MUDAH" dan satu konsonan dari kata "SANGAT" atau satu konsonan dari kata "MUDAH" dan satu vokal dari kata "SANGAT"

Peluang kasus pertama $= \frac{2}{5} \times \frac{4}{6} = \frac{4}{15}$

Peluang kasus kedua $= \frac{3}{5} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{5}$

Jadi, peluang kejadian tersebut adalah $\frac{4}{15} + \frac{1}{5} = \frac{7}{15}$.

9. Jika dalam kantong terdapat 6 bola merah dan 4 bola biru akan diambil 2 bola secara berturut-turut, maka berapakah peluang mendapatkan 2 bola biru?
   a. Jika dengan pengembalian
   b. Jika tanpa pengembalian

   Alternatif penyelesaian:

   a. Jika dengan pengembalian maka misalkan A adalah kejadian, pengambilan pertama biru dan B kejadian pengambilan kedua juga biru adalah

   $$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{4}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{4}{25}$$

   Jadi, peluang mendapatkan 2 bola biru jika dengan pengembalian adalah $\frac{4}{25}$.

   b. Jika tanpa pengembalian maka peluangnya adalah

   $$P(A \cap B) = P(A) \times P(B \mid A) = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{2}{15}$$

   Jadi, peluang mendapatkan 2 bola biru jika tanpa pengembalian adalah $\frac{2}{15}$.

10. **Ayo Berpikir Kreatif**

    Empat orang siswa makan siang di sebuah kantin. Di kantin tersebut masih tersedia 3 porsi nasi goreng, 20 porsi nasi pecel, dan 25 porsi nasi rawon, serta 19 gelas jus alpukat, 17 gelas jeruk panas, dan 15 gelas jus sirsak. Mereka ingin memesan 4 porsi makanan dan 3 gelas minuman. Tentukan banyak pilihan komposisi makanan dan minuman yang mungkin mereka pesan.

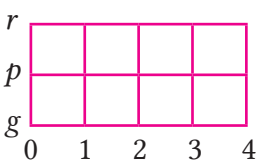
    Alternatif penyelesaian:

    Misalkan porsi makanan nasi goreng adalah g
    porsi makanan nasi pecel adalah p
    porsi makanan nasi rawon adalah r
    minuman jus alpukat adalah a
    minuman jeruk panas adalah j
    minuman jus sirsak adalah k

Mencari pola untuk mengetahui komposisi makanan dan minuman

a. Mencari komposisi untuk makanan:

$g + p + r = 4$



Banyaknya solusi bilangan bulat tak negatif dari persamaan $g + p + r = 4$ sama dengan banyaknya cara terpendek untuk mencapai ujung kanan atas grid dari ujung kiri bawah grid yaitu sebanyak 6 langkah dari tabel 2 baris.

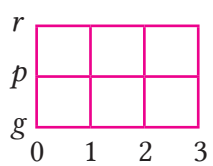
$${}_6C_2 = \frac{6!}{(6-2)!2!} = 3 \times 5 = 15$$

Akan tetapi, perlu diketahui bahwa banyak porsi nasi goreng maksimal 3, sehingga harus dikurangi pada saat $g = 4$, di mana banyak pasangan $p + r = 0$ sehingga (p, r) ada 1 cara.

Oleh karena itu, banyak kombinasi untuk makanan sebanyak $(q, p, r) = 15 - 1 = 14$.

b. Mencari komposisi untuk minuman:

$a + j + k = 3$



Banyaknya solusi bilangan bulat tak negatif dari persamaan $a + j + k = 3$ sama dengan banyaknya cara terpendek untuk mencapai ujung kanan atas grid dari ujung kiri bawah grid yaitu sebanyak 5 langkah dari tabel 2 baris.

$${}_5C_2 = \frac{5!}{(5-2)!2!} = 5 \times 2 = 15$$

Sehingga banyak kombinasi untuk minuman sebanyak $(a, j, k) = {}_5C_2 = 10$.

Dengan demikian, komposisi makanan dan minuman yang mungkin adalah $14 \times 10 = 140$ cara.

Jadi, banyak pilihan komposisi makanan dan minuman yang mungkin mereka pesan ada sebanyak 140 cara.

G. Sistem Penilaian Hasil Belajar

Untuk mengukur ketercapaian tujuan pembelajaran, perlu adanya sistem penilaian yang dilakukan secara terus-menerus selama proses pembelajaran dan pada akhir proses pembelajaran. Siswa juga dilibatkan di dalam proses menilai diri. Bentuk dari penilaian hasil belajar ini antara lain penilaian formatif dan memberikan umpan balik kepada siswa melalui aktivitas Ayo Mencoba dan Latihan. Penilaian sumatif dapat dilakukan melalui Uji Kompetensi pada akhir bab. Siswa memiliki banyak kesempatan untuk melakukan penilaian diri melalui aktivitas.

H. Kegiatan Tindak Lanjut

Kegiatan ini dilakukan setelah mendapat gambaran tingkat ketercapaian tujuan pembelajaran. Siswa dibagi menjadi dua kelompok, yaitu kelompok yang tuntas dan kelompok yang belum tuntas. Kelompok yang sudah tuntas diberikan tambahan materi pengayaan untuk mengasah dan memperdalam pengetahuan siswa, sementara siswa yang belum tuntas diberikan kegiatan pembelajaran remedial sesuai dengan kebutuhan siswa agar dapat menuntaskan materi yang ada. Bentuk kegiatannya dapat berupa penugasan, tutorial sebaya, ataupun pengerjaan ulang soal-soal latihan dan uji kompetensi yang telah tersedia di Buku Siswa.

I. Interaksi Guru dengan Orang Tua/Wali

Keberhasilan pencapaian siswa dalam pembelajaran tidak hanya bergantung pada guru, namun juga melibatkan peran orang tua atau wali siswa. Guru sebaiknya dapat menjalin kerja sama yang baik dengan orang tua atau wali siswa sebagai rekan (*partner*) dengan cara mengomunikasikan pentingnya matematika dan bahwa semua siswa memiliki kemampuan untuk belajar matematika kepada orang tua sehingga sikap dan persepsi positif terhadap matematika berkesinambungan baik di sekolah maupun di rumah. Guru perlu membuka diri bagi masukan dari orang tua atau wali, khususnya terhadap minat dan kesulitan yang dihadapi siswa sehingga dapat melakukan diferensiasi pembelajaran sesuai dengan kebutuhan siswa. Guru dapat memberikan ide-ide kepada orang tua atau wali dalam mendukung pembelajaran putra/putrinya, misalnya bagaimana orang tua dapat menyiapkan lingkungan belajar yang kondusif, memberikan

dorongan semangat kepada putra/putrinya ketika mereka belum berhasil dalam pembelajaran, maupun memuji keberhasilan sekecil apa pun yang ditunjukkan oleh putra/putrinya. Selain itu, guru sebaiknya juga mengomunikasikan sistem atau metode pembelajaran matematika yang digunakan di sekolah kepada orang tua, khususnya jika pendekatan tersebut baru bagi orang tua, misalnya pendekatan *Flipped Classroom*. Hal ini perlu dilakukan untuk menghindari mispersepsi dari orang tua bahwa guru "tidak mengajarkan apa-apa", padahal metode tersebut menuntut siswa untuk belajar secara mandiri di rumah. Penyamaan persepsi penting sehingga proses pembelajaran boleh didukung juga dari pihak orang tua.

Glosarium

anggota himpunan: suatu objek dalam suatu himpunan.

apotema: ruas garis yang tegak lurus terhadap tali busur dari titik pusat lingkaran.

busur: garis yang terletak pada lingkaran dan menghubungkan dua titik sebarang di lingkungan tersebut.

data: ukuran dari suatu nilai. Data biasanya dalam bentuk bilangan, dikumpulkan dalam bentuk tabel, diolah dalam bentuk diagram.

data kontinu: data yang dihubungkan oleh garis pada grafik. Misalnya, grafik hubungan tinggi badan dengan usia.

datum: satu ukuran dari suatu nilai.

data berkelompok: data yang sudah dikelompokkan dalam kelas-kelas.

data tunggal: data mentah yang belum diolah atau dikelompokkan.

d**esil**: nilai yang membagi data menjadi 10 kelompok sama banyak.

deviasi standar: akar dari jumlah kuadrat deviasi dibagi banyaknya data.

diameter: garis lurus yang menghubungkan dua titik pada lengkungan dua titik sebarang di lengkungan tersebut.

diagram: suatu representasi simbolis dari suatu informasi dalam bentuk geometri dua dimensi.

diagram Venn: suatu representasi grafis dari suatu himpunan atau himpunan-himpunan.

diagram batang: gambar yang menggunakan batang secara horizontal atau vertikal untuk menunjukkan suatu data.

dilatasi: transformasi yang mengubah jarak dari titik-titik dengan faktor pengali tertentu terhadap suatu titik tertentu.

dilatasi vertikal: transformasi dilatasi yang sejajar sumbu x.

dilatasi horizontal: transformasi dilatasi yang sejajar sumbu y.

fungsi linear: sebuah fungsi yang mana variabelnya berpangkat satu atau suatu fungsi yang grafiknya adalah garis lurus.

fungsi kuadrat: sebuah fungsi polinom yang memiliki peubah/variabel dengan pangkat tertingginya adalah 2 (dua).

fungsi eksponen: pemetaan bilangan real x ke ax dengan $a > 0$ dan $a \neq 1$. Jika $a >$ dan $a \neq 1$, $x \in R$ maka $f:(x) = ax$.

grafik: suatu kerangka atau gambar yang digunakan untuk membuat objek visualisasi dari data-data pada tabel.

himpunan: unit yang terdiri beberapa anggota.

himpunan berhingga: suatu himpunan dengan n elemen di mana n adalah suatu bilangan bulat tak negatif.

himpunan tak berhingga: suatu himpunan yang anggotanya tak berhingga.

himpunan semesta: himpunan yang memuat semua objek di bawah pertimbangan.

jari-jari: ruas garis yang ditarik dari pusat lingkaran ke sebarang titik pada lingkaran; sama dengan setengah diameter.

juring: luas daerah dalam lingkaran yang dibatasi oleh dua buah jari-jari lingkaran dan sebuah busur yang diapit oleh kedua jari-jari lingkaran tersebut.

keliling lingkaran: panjang kurva lengkung tertutup yang berhimpit pada suatu lingkaran.

kejadian: himpunan bagian dari ruang sampel.

kejadian majemuk: dua atau lebih kejadian yang terjadi secara bersamaan.

kelas: kelompok data berdasarkan kategori kuantitatif atau kualitatif.

kombinasi: susunan yang mungkin dari unsur-unsur yang berbeda dengan tidak memperhatikan urutannya.

kombinasi berulang: pengambilan objek dengan urutan tidak diperhitungkan (pengulangan/pengembalian diperbolehkan).

linear: posisi yang terletak pada suatu garis lurus.

lingkaran: tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama terhadap sebuah titik tertentu.

notasi: lambang/simbol.

peluang: kemungkinan munculnya suatu kejadian.

peluang saling bebas: peluang dua atau lebih kejadian yang tidak saling memengaruhi.

peluang saling bersyarat: peluang dua kejadian yang saling bergantung apabila terjadi atau tidak terjadinya kejadian A akan memengaruhi terjadi atau tidak terjadinya kejadian B.

peluang saling lepas: peluang dua atau lebih kejadian yang tidak mungkin terjadi bersama-sama.

permutasi: jumlah kemungkinan urutan objek-objek yang dipilih dengan memperhatikan urutan objek.

permutasi siklis: permutasi yang susunannya melingkar (urutan melingkar).

persentil: membagi data yang telah diurutkan menjadi 100 bagian yang sama.

pi (π): perbandingan keliling lingkaran dengan diameternya; nilainya mendekati 3,141592654...

persamaan: dua ekspresi aljabar yang dihubungkan dengan sama dengan.

persamaan linear: persamaan disebut persamaan linear apabila grafik semua penyelesaiannya terletak pada sebuah garis. Contoh: $y = x + 3$ adalah linear karena grafik semua penyelesaiannya terletak pada satu garis.

persegi: suatu persegi panjang dengan empat sisi kongruen (sama panjang).

persegi panjang: suatu jajargenjang dengan dua sisi yang sejajar sama panjang dan besar keempat titik sudutnya 90^o.

proporsi: suatu persamaan dalam bentuk = yang menyatakan bahwa dua rasio adalah ekuivalen.

refleksi: transformasi yang memindahkan tiap titik dengan menggunakan sifat bayangan oleh suatu cermin (pencerminan).

refleksi vertikal: transformasi refleksi terhadap sumbu x.

refleksi horizontal: transformasi refleksi terhadap sumbu y.

rotasi: transformasi yang memindahkan titik-titik pada suatu daerah dengan cara memutar titik-titik tersebut sejauh α terhadap suatu titik tertentu.

ruang sampel: himpunan semua hasil yang mungkin dalam suatu eksperimen (dalam materi peluang). Misalnya, ruang sampel dua koin yang ditos adalah (A, A), (A, G), (G, A), (G, G).

statistik: hasil analisis atau pengolahan data.

statistika: (1) cabang dari matematika terapan yang mempunyai cara-cara mengumpulkan dan menyusun data, mengolah dan menganalisis data serta menyajikan data dalam bentuk kurva atau diagram, menarik kesimpulan, menafsirkan parameter dan menguji hipotesis yang didasarkan pada hasil pengolahan data. (2) ukuran atau karakteristik yang didapatkan menggunakan data dari sampel.

sifat kesamaan pengurangan: apabila suatu bilangan dikurangkan dengan bilangan yang sama pada masing-masing ruas persamaan, maka kedua ruas tetap sama. Untuk setiap bilangan a, b, dan c, jika $a = b$, maka $a - c = b - c$. Contoh: jika $x = 3$, maka $x - 2 = 3 - 2$.

sifat kesamaan penjumlahan: apabila suatu bilangan ditambahkan dengan bilangan yang sama pada masing-masing ruas persamaan, maka kedua ruas tetap sama. Untuk setiap bilangan a, b, dan c, jika $a = b$, maka $a + c = b + c$.

sifat kesamaan perkalian: apabila kita menambahkan bilangan yang sama pada masing-masing ruas persamaan, kedua ruas tetap sama. Untuk setiap bilangan a, b, dan c, jika $a = b$, maka $a \times c = b \times c$.

sudut: gabungan dua sinar berbeda yang tidak terletak pada satu garis dengan satu titik pangkal.

sudut keliling: sudut yang titik sudutnya terletak pada lingkaran.

sudut pusat: sudut yang titik sudutnya berupa titik pusat lingkaran dan kaki-kakinya adalah jari-jari lingkaran itu.

tali busur: garis lurus dalam lingkaran yang menghubungkan dua titik pada lengkungan dan tidak melalui titik pusat lingkaran.

tembereng: luas daerah dalam lingkaran yang dibatasi oleh busur dan tali busur.

teorema: kesimpulan umum yang dikemukakan untuk dibuktikan berdasarkan hipotesis tertentu yang diberikan.

translasi: transformasi yang memindahkan titik-titik dengan arah dan jarak tertentu atau biasa disebut pergeseran.

translasi vertikal: transformasi yang memindahkan titik-titik dengan arah dan jarak ke arah atas dan bawah.

translasi horizontal: transformasi yang memindahkan titik-titik dengan arah dan jarak ke arah kanan dan kiri.

titik sampel: setiap hasil yang mungkin terjadi pada suatu percobaan.

variabel: huruf atau simbol lain yang digunakan untuk mewakili bilangan atau nilai yang tidak ditentukan.

Daftar Pustaka

As'ari, A. R., Tohir, M., Valentino, E., Imron, Z., & Taufiq, I. 2017. *Buku Guru Matematika Revisi.* Jakarta: Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Balitbang, Kemendikbud.

As'ari, A. R., Tohir, M., Valentino, E., Imron, Z., Taufiq, I., Hariarti, N. S., & Lukmana, D. A. 2017. *Matematika SMP/MTs Kelas VIII Semester 2. Edisi Revisi.* Jakarta: Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Balitbang, Kemendikbud.

As'ari, A.R., Chandra, T.D., Yuwono, I., Anwar, L., Nasution, S. H., Hasanah, D., Muksar, M., Sari, V. K., & Atikah, N. 2018. *Buku Siswa Matematika SMA/MA Kelas XII.* Jakarta: Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Balitbang, Kemendikbud.

As'ari, A.R., Chandra, T.D., Yuwono, I., Anwar, L., Nasution, S. H., Hasanah, D., Muksar, M., Sari, V. K., & Atikah, N. 2018. *Buku Guru Matematika SMA/MA Kelas XII.* Jakarta: Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Balitbang, Kemendikbud.

Beswick, K., Chapman, O., Jaworski, B., & Wood, T. 2008. *The Handbook of Mathematics Teacher Education: Volume 4: The Mathematics Teacher Educator as a Developing Professional.* BRILL.

Bishop, A., Clements, M. K., Keitel-Kreidt, C., Kilpatrick, J., & Leung, F. K. S. (Eds.). 2012. *Second International Handbook of Mathematics Education (Vol. 10).* Springer Science & Business Media.

Defantri, D. 2017. *Modul Matematika SMA Kurikulum 2013.* in Lintongnihuta, IDN.

Fernandes, A., Koehler, J., & Reiter, H. 2011. Mathematics teachers circle around problem solving. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 17(2), 108-115.

James, M. 2018. *Cambridge International AS & A Level Mathematics: Pure Mathematics 1 Worked Solutions Manual.* UK: Cambridge University Press.

Jeffery, R. 2019. *Chapter x. Rolle's theorem, mean value theorem, parametric equations, arc length, surface of revolution, curvature, second order differential equations, l'hospital's rule*. In Calculus (Third Edition) (pp. 157-188). University of Toronto Press.

Linsky, J., & Nicholson J., & Western B. 2018. *Complete Pure Mathematics 1 for Cambridge International AS & A Level (second edition)*. UK: Oxford University Press.

Mahmudi, A. 2019. *Kombinatorika*. Yogyakarta: Yogyakarta: Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY.

Pemberton, S. 2018. *Cambridge International AS & A Level Mathematics: Pure Mathematics 1 Coursebook*. UK: Cambridge University Press.

Pemberton, S. 2018. *Cambridge International AS & A Level Mathematics: Pure Mathematics 1 Practice book*. UK: Cambridge University Press.

Rosen, K. H., & Krithivasan, K. 2012. *Discrete Mathematics and Its Applications: with Combinatorics and Graph Theory*. NY: Tata McGraw-Hill Education.

Schoen, H. L., & Hirsch, C. R. 2020. The Core-Plus mathematics project: Perspectives and student achievement. *In Standards-Based School Mathematics Curricula (pp. 311-344)*. UK: Routledge.

Tohir, M. 2018. *Pembinaan Olimpiade Matematika SMP/MTs*. Jember: Matematohir Scientific Publishing.

Indeks

A

apotema 67, 85, 105, 106, 177

aturan pengisian tempat 117, 119, 122

B

bayangan 24, 26, 30, 31, 32, 41, 45, 55, 62, 63, 64, 179

busur 67, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 107, 108, 109, 110, 112, 113, 177, 178, 180

busur minor 77, 79, 80

D

data 22, 23, 87, 103, 115, 177, 178, 179, 180

diagram 22, 23, 81, 87, 88, 123, 124, 159, 163, 165, 177, 179

diagram venn 81, 159, 163, 165

E

eksponen 21, 25, 27, 28, 29, 37, 38, 39, 55, 178

eksponen 24, 38

elemen 77, 90

F

fungsi 21, 24, 33, 35, 38, 40, 51, 57, 58, 65

fungsi eksponen 21, 25, 29, 37, 38, 39, 55, 178

fungsi linear 21, 24, 25, 29, 32, 33, 177

G

garis 30, 77, 183

grafik 23, 26, 29, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 41, 42, 43, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 55, 57, 59, 60, 62, 64, 66, 177, 178, 179

H

himpunan 81, 135, 142, 143, 148, 177, 178, 179

horizontal 24, 34, 39, 46, 52, 57

J

jari-jari 84, 88, 94, 95, 96

juring 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 113, 178

K

kejadian 116, 117, 118, 119, 120, 121, 142, 143, 144, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 156, 157, 159, 160, 161, 162, 165, 166, 168, 170, 171, 178, 179

keliling 69, 72, 77, 78, 82, 86, 89, 91, 98, 101, 178, 179, 180

kombinasi 24, 28, 57, 116, 117, 120, 134, 135, 138, 139

kombinasi berulang 138

koordinat 31, 47, 51, 52, 55, 59, 62

kuadrat 24

L

linear 21, 24, 25, 27, 28, 29, 32, 33, 78, 177, 178, 179

linear 24
luas juring 74, 95, 96, 99

M

majemuk 116, 147, 149, 150, 160

O

objek 30, 91, 116, 127, 128, 130, 131, 132, 134, 135, 177, 178, 179

P

panjang busur 67, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 79, 80, 81, 86, 88, 89, 91, 97, 99, 100, 101, 102, 103, 105, 107, 108, 110, 113
parabola 65, 66
peluang 116, 117, 120, 142, 144, 145, 146, 147, 149, 150, 152, 153, 154, 159, 160, 161, 164, 168, 170
peluang saling bebas
pergeseran 23, 32, 34, 39
persamaan 31, 48, 50, 53, 138, 163, 172

R

refleksi 21, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 31, 45, 46, 47, 57, 59, 60, 63, 65, 66
refleksi 24
rotasi 21, 24, 25, 28, 29, 31, 55, 56
rotasi 24
ruang sampel 120, 142, 143

S

sejajar 30, 51, 52, 53, 54, 55, 59, 60, 62, 63
sudut pusat 67, 69, 70, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 85, 86, 87, 90, 91, 92, 93, 94, 96, 97, 99, 100, 101, 102, 104, 105, 107, 108, 109, 112, 113

T

tali busur 67, 71, 72, 74, 91, 101, 105, 106
tembereng 67, 71, 72, 74, 91, 101, 105, 106
titik 67, 71, 72, 74, 91, 101, 105, 106
titik asal 67, 71, 72, 74, 91, 101, 105, 106
titik maksimal 67, 71, 72, 74, 91, 101, 105, 106
titik minimal 67, 71, 72, 74, 91, 101, 105, 106
titik puncak 65, 66
titik pusat 31, 67, 71, 72, 74, 77, 91, 101, 105, 106
transformasi 8, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 41, 42, 47, 48, 50, 53, 54, 55, 57, 58, 59, 60, 64, 65
translasi 21, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 32, 34, 37, 39, 40, 41, 42, 43, 52, 59, 60, 63, 65, 66

V

vertikal 24, 32, 45, 50, 57

Biodata Pelaku Perbukuan

Biodata Penulis

Nama Lengkap : Mohammad Tohir, S.Pd., M.Pd.
E-mail : matematohir@ibrahimy.ac.id
Alamat Kantor : Universitas Ibrahimy, Situbondo,
Jl. KHR. Syamsul Arifin No.1-3,
Sukorejo, Situbondo, Jawa Timur 68374
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika

Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. 2019–sekarang: Dosen Tadris Matematika Universitas Ibrahimy, Situbondo
2. 2015–sekarang: Guru Matematika di MTs Raudlatul Hasanah, Pamekasan
3. 2016 2019: Guru Matematika di SMPN 2 Jember
4. 2005–2015: Guru Matematika di SMP Islam Sabilillah Malang

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S2: Program Studi Pascasarjana Pendidikan Matematika, Universitas Jember (UNEJ) (2016–2017)
2. S1: Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Islam Malang (UNISMA) (2000–2004)

Judul Buku dan Tahun Terbit (dalam 10 Tahun Terakhir):

1. Model Buku Teks Mata Pelajaran Matematika SMP/MTs Kelas VII (2019)
2. Model Buku Panduan Guru Matematika SMP/MTs Kelas VII (2019)
3. Pembinaan Olimpiade Matematika SMP/MTs (2018)
4. Buku Siswa Matematika SMP/MTs Kelas VIII Semester 1 dan 2 (2017)
5. Buku Guru Matematika SMP/MTs Kelas VIII (2017)
6. Buku Pembinaan Olimpiade Matematika SMP/MTs (2017)
7. Penguatan Konsep Garis dan Sudut Mata Pelajaran Matematika SMP/MTs (2017)
8. Buku Pengayaan UN Matematika SMP/MTs Kelas IX (2016)
9. Pembinaan Olimpiade Guru Matematika SMP/MTs (2016)

10. Buku Siswa Matematika SMP/MTs Kelas VII Semester 1 dan 2 (2016)
11. Buku Guru Matematika SMP/MTs Kelas VII (2016)
12. Buku Siswa Matematika SMP/MTs Kelas VII Semester 1 dan 2 (2014)
13. Buku Guru Matematika SMP/MTs Kelas VII (2014)
14. Buku Siswa Matematika SMP/MTs Kelas VIII Semester 1 dan 2 (2014)
15. Buku Guru Matematika SMP/MTs Kelas VIII (2014)
16. Teknologi Informasi dan Komunikasi untuk SMP Kelas VII (2011)
17. Teknologi Informasi dan Komunikasi untuk SMP Kelas IX (2011)
18. Teknologi Informasi dan Komunikasi untuk SMP Kelas VIII (2011)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (dalam 10 Tahun Terakhir):

1. Building a caring community in problem based learning to improve students' mathematical connection capabilities (2021)
2. Prospective teacher's expectation of students' critical thinking process in solving mathematical problems based on Facione stages (2021)
3. Students' creative thinking skills in solving mathematics higher order thinking skills (HOTS) problems based on online trading arithmetic (2021)
4. Analysis of reflective student analogy reasoning in solving geometry problems (2021)
5. Prospective Teachers' Expectations of Students' Mathematical Thinking Processes in Solving Problems (2020)

Selengkapnya, kunjungi Akun Profil Penulis:

1. **Scopus ID**: 57204202856
   https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=57204202856
2. **ORCID iD**: 0000-0001-8342-0972
   https://orcid.org/0000-0001-8342-0972
3. **WoS ResearcherID**: AAE-8527-2019
   https://publons.com/researcher/3226066/mohammad-tohir/
4. **Sinta ID**: 6734675
   https://sinta.ristekbrin.go.id/authors/detail?id=6734675&view=overview
5. **Google Scholar ID:** c0s6OxUAAAAJ
   https://scholar.google.co.id/citations?user=c0s6OxUAAAAJ&hl=id

Nama Lengkap : Ahmad Choirul Anam, M.Pd.
E-mail : choirulanam@ibrahimy.ac.id
Alamat Kantor : Universitas Ibrahimy, Situbondo,
Jl. KHR. Syamsul Arifin No.1-3,
Sukorejo, Situbondo, Jawa Timur 68374
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika

Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

- 2020–sekarang : Dosen Tadris Matematika Universitas Ibrahimy, Situbondo
- 2021-sekarang : Guru SMAN 1 Purwoharjo, Banyuwangi

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S2: Program Studi Pascasarjana Pendidikan Matematika, Universitas Negeri Surabaya (2017–2019)
2. S1: Program Studi Pendidikan Matematika, UIN Sunan Ampel Surabaya (2012–2016)

Judul Buku dan Tahun Terbit (dalam 10 Tahun Terakhir):

-

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (dalam 10 Tahun Terakhir):

1. Abstraksi Reflektif Siswa Sekolah Menengah Pertama Pada Materi Segiempat dan Segitiga (2021)
2. Students' Mental Construction in Cube and Cuboid Concept Based on Mathematical Ability Differences (2020)
3. Understanding the quadrilateral concept of junior high school students based on APOS theory in terms of differences in cognitive styles (2019)
4. Integration of Ethnomathematics with probing-prompting learning Models to train students' mathematical communication (2019)
5. Pengembangan perangkat pembelajaran model probing-prompting berbasis etnomatematika untuk melatihkan kemampuan komunikasi matematika (2016)

Nama Lengkap : Ibnu Taufiq, S.Pd., M.Pd.
E-mail : taufiqibnu13@gmail.com
Alamat Kantor : SMA Bahrul Maghfiroh Malang,
Jl. Joyo Agung Atas No. 2 Kota Malang
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika

Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. 2009–Sekarang: Dosen PGSD Universitas Terbuka UPBJJ Malang
2. 2013–Sekarang: Guru Matematika di SMA Bahrul Maghfiroh Malang
3. 2014–Sekarang: Guru Matematika di SMP Bahrul Maghfiroh Malang
4. 2003–2014: Guru Matematika di SMP Islam Sabilillah Malang
5. 1997–2003: Guru Kelas di SD Islam Sabilillah Malang

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S2: Program Studi Pascasarjana Pendidikan Matematika, Universitas Negeri Malang (2003–2006)
2. S1: Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Negeri Malang (1991–1995)

Judul Buku dan Tahun Terbit (dalam 10 Tahun Terakhir):

1. Model Buku Teks Mata Pelajaran Matematika SMP/MTs Kelas VII (2019)
2. Model Buku Panduan Guru Matematika SMP/MTs Kelas VII (2019)
3. Buku Pengayaan UN Matematika SMP/MTs Kelas IX (2018)
4. Buku Siswa Matematika SMP/MTs Kelas VIII Semester 1 dan 2 (2017)
5. Buku Guru Matematika SMP/MTs Kelas VIII (2017)
6. Buku Pembinaan Olimpiade Matematika SMP/MTs (2017)
7. Buku Siswa Matematika SMP/MTs Kelas VII Semester 1 dan 2 (2016)
8. Buku Guru Matematika SMP/MTs Kelas VII (2016)
9. Buku Siswa Matematika SMP/MTs Kelas VII Semester 1 dan 2 (2014)
10. Buku Guru Matematika SMP/MTs Kelas VII (2014)
11. Buku Siswa Matematika SMP/MTs Kelas VIII Semester 1 dan 2 (2014)
12. Buku Guru Matematika SMP/MTs Kelas VIII (2014)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (dalam 10 Tahun Terakhir):

-

Biodata Penelaah

Nama Lengkap : Prof. Dr. Widowati, S.Si., M.Si.
E-mail : widowati.math@gmail.com
Alamat Kantor : FSM, Universitas Diponegoro, Jl. Prof. H. Soedharto, SH, Tembalang, Semarang
Bidang Keahlian : Matematika

Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. 1994–sekarang: Dosen Tetap Jurusan Matematika, Universitas Diponegoro, Semarang.
2. 2008–2011: Ketua Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Diponegoro Semarang
3. 2011–2015: Pembantu Dekan II Fakultas Sains dan Matematika (FSM), Universitas Diponegoro Semarang
4. 2015–sekarang: Dekan Fakultas Sains dan Matematika (FSM), Universitas Diponegoro Semarang

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S3: Program Studi Pascasarjana Pendidikan Matematika, Institut Teknologi Bandung (2005
2. S2: Program Studi Pascasarjana Pendidikan Matematika, Institut Teknologi Bandung (2000)
3. S1: Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Diponegoro, Semarang (1993)

Judul Buku dan Tahun Terbit (dalam 10 Tahun Terakhir):

1. Sistem Kendali Optimal: Teori dan Aplikasinya Dibidang Inventory (2020)
2. Penerapan Teknologi dan Proses Produksi Kjabb-Imta (2019)
3. Modul Teknik Budidaya Sistem Integrated Multi-Thropic Aquaculture (Imta) (2019)
4. Metode Kendali Diskret: Teori dan Simulasinya (2017)
5. Pemodelan Matematika: Analisis dan Aplikasinya (2013)

6. Kalkulus (2012)
7. Pemodelan Matematika Berbasis Maple (2011)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (dalam 10 Tahun Terakhir):

1. Implementation of an optimal control for reducing individuals infected by hepatitis B virus (2021)
2. Mathematical modeling and analysis of COVID-19 transmission dynamics in Central Java Province, Indonesia (2021)
3. Investigating the features of Indonesia stock price during covid-19 pandemic: An application of merton jump diffusion model (2021)
4. 1d-2d numerical model for wave attenuation by mangroves as a porous structure (2021)
5. Piecewise objective optimisation model for inventory control integrated with supplier selection considering discount (2021)

Selengkapnya, kunjungi Akun Profil Penulis:

1. **Scopus ID**: 8255360300
   https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=8255360300
2. **ORCID iD**: 0000-0002-4372-6501
   https://orcid.org/0000-0002-4372-6501
3. **Sinta ID**: 6007839
   https://sinta.ristekbrin.go.id/authors/detail?id=6007839&view=overview
4. **Google Scholar ID**: CczqHJ4AAAAJ https://scholar.google.co.id/citations?user=CczqHJ4AAAAJ&hl=id

Nama Lengkap : Dr. Ali Mahmudi, M.Pd.
E-mail : alimahmudi@uny.ac.id
Alamat Kantor : Kampus FMIPA UNY Jl. Colombo 1. Karangmalang Yogyakarta
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika

Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

- Dosen FMIPA UNY Yogyakarta sejak 1999

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

- S3 Pendidikan Matematika UPI Bandung (2007–2010)

Judul Buku dan Tahun Terbit (dalam 10 Tahun Terakhir):

1. Matematika untuk SMK Kelas X Tahun 2016
2. Buku Teks Mata Pelajaran Matematika SMP Kurikulum 2013

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (dalam 10 Tahun Terakhir):

1. Enhancing students' self-efficacy through metacognitive strategies in learning mathematics (2020)
2. Reflective pedagogical paradigm approach in mathematics learning (2020)
3. Pre-service teacher's pedagogical content knowledge: What teachers know about students' errors? (2020)

Selengkapnya, kunjungi Akun Profil Penulis:

1. **Scopus ID**: 57204364666
   https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=57204364666
2. **ORCID iD**: 0000-0001-7787-7036
   https://orcid.org/0000-0001-7787-7036
3. **Sinta ID**: 5993352
   https://sinta.ristekbrin.go.id/authors/detail?id=5993352&view=overview
4. **Google Scholar ID**: DF_u5VYAAAAJ
   https://scholar.google.com/citations?user=DF_u5VYAAAAJ&hl=id

Biodata Ilustrator

Nama Lengkap : Ahmad Saad Ibrahim, S.Ds
E-mail : baimsaadkv10@gmail.com
Bidang Keahlian : Desain Grafis & Ilustrasi

Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. Creative Director, Kakatu (2014-2018)
2. Motion Grapher (Internship), Sindo TV (2013)
3. Motion grapher video sosialisasi bahaya pornografi pada anak, Kemensos (2015-2016)
4. Trainer - Parenting Era Digital bersama Kementerian Pemberdayaan Perempuan & Perlindungan Anak (KPPPA) untuk Orangtua dan Anak di kota Banda Aceh, Manado, Denpasar, Padang & Tanjung Pinang
5. Pembicara - Internet Baik, mengasuh anak di era digital dalam program CSR Telkomsel : Internet Baik di 17 Kota selama 2016 & 2017
6. Ilustrator buku 'Aku lihat layar secukupnya' (2017)
7. Kordinator, Gerakan Selamatkan Generasi Emas Anak Indonesia 2045 (Semai 2045) 2015 - 2017
8. Senior Graphic Designer, Alami Inter Media (2018 - 2020)
9. Desainer & Ilustrator Modul Pembelajaran Jarak Jauh Kemdikbud (2020 - 2021)
10. Freelance desain grafis & Konsultan branding (2014 - Sekarang)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

- S1: Desain Komunikasi Visual, Institut Teknologi Bandung (2010 - 2015)

Biodata Editor

Nama Lengkap : Cicilia Erni Setyowati, S.S.
E-mail : ernisetyowati2009@gmail.com
Alamat Kantor : -
Bidang Keahlian : Linguistik, Editing Naskah, Proof Read

Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. Editor buku Anak
2. Editor buku Pelajaran SD-SMP, PT, dan buku umum
3. Kepala Bagian Redaksi Buku Kependidikan dan Umum
4. Kepala Bagian Redaksi Kanisius Exclusive Publishing (KEP)
5. Kepala Bagian Kanisius Exclusive Publishing (KEP) dan Buku Digital

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

- Universitas Gadjah Mada, Fakultas Sastra/Ilmu Budaya, Jurusan Sastra Indonesia, spesialisasi di bidang Linguistik 1992-1998

Judul Buku dan Tahun Terbit (dalam 10 Tahun Terakhir):

1. Buku Doa Anak diterbitkan oleh Penerbit Kanisius
2. Buku Seri Orang Kudus diterbitkan oleh Penerbit Kanisius
3. Editor buku pelajaran Tematik (tingkat SD), bahasa Jawa (tingkat SD dan SMP), bahasa Inggris (tingkat SD), Pendidikan Agama Katolik (tingkat SD)
4. Editor buku Perguruan Tinggi
5. Editor dan penerjemah buku anak serial Franklin yang diterbitkan Penerbit Kanisius
6. Editor banyak buku anak, buku Perguruan Tinggi, buku humaniora, dan umum lainnya

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (dalam 10 Tahun Terakhir):

-

Biodata Desainer

Nama Lengkap : Imee Amiatun
E-mail : imeealma@gmail.com
Bidang Keahlian : Layout/Settting

Riwayat Pekerjaan/Profesi (10 Tahun Terakhir):

1. Freelance layout s/d sekarang
2. Layouter PT Sarana Panca Karya Nusa (2004 - 2009)
3. Layouter PT Grafindo Media Pratama (2015, 2017)

Riwayat Pendidikan dan Tahun Belajar

1. Manajemen Informatika - D3 "STMIK AMIKBANDUNG"

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir)

1. Buku Teks Sosiologi Kelas X, As-Syifa Learning Center
2. Buku Teks IPS Kelas VII & IX, As-Syifa Learning Center
3. Buku Teks IPS Kelas VII, PT Grafindo Media Pratama
4. Buku Teks Bahasa Arab Kelas I-IV SD, PT Grafindo Media Pratama
5. Mengenal Manfaat Sukun, Manggis, dan Sirsak, PT Bhuana Ilmu Populer
6. Bromelia, Tanaman Hias Tak Manja, PT Bhuana Ilmu Populer
7. Kumpulan Soal dan Pembahasan UN IPA SMP/MTs, PT Bhuana Ilmu Populer
8. Serba Serbi Bahasa Indonesia, CV Manggu Makmur Tanjung Lestari