



KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET, DAN TEKNOLOGI
BADAN STANDAR, KURIKULUM, DAN ASESMEN PENDIDIKAN
PUSAT PERBUKUAN

Matematika

Mohammad Tohir, dkk.
2022

SMA/SMK/MA KELAS XII

**Hak Cipta pada Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi Republik Indonesia
Dilindungi Undang-Undang**

Disclaimer: Buku ini disiapkan oleh Pemerintah dalam rangka pemenuhan kebutuhan buku pendidikan yang bermutu, murah, dan merata sesuai dengan amanat dalam UU No. 3 Tahun 2017. Buku ini disusun dan ditelaah oleh berbagai pihak di bawah koordinasi Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi serta Kementerian Agama. Buku ini merupakan dokumen hidup yang senantiasa diperbaiki, diperbarui, dan dimutakhirkan sesuai dengan dinamika kebutuhan dan perubahan zaman. Masukan dari berbagai kalangan yang dialamatkan kepada penulis atau melalui alamat surel buku@kemdikbud.go.id diharapkan dapat meningkatkan kualitas buku ini.

Matematika untuk SMA/SMK/MA Kelas XII

Penulis

Mohammad Tohir
Ahmad Choirul Anam
Ibnu Taufiq

Penelaah

Widowati
Ali Mahmudi

Penyelia/Penyelaras

Supriyatno
E. Oos M. Anwas
NPM Yuliarti Dewi

Ilustrator

Ahmad Saad Ibrahim

Editor

Cicilia Erni Setyowati

Desainer

Erwin

Penerbit

Pusat Perbukuan
Badan Standar, Kurikulum, dan Asesmen Pendidikan
Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi
Kompleks Kemdikbudristek Jalan RS. Fatmawati, Cipete, Jakarta Selatan
<https://buku.kemdikbud.go.id>

Cetakan Pertama, 2022
ISBN 978-602-244-525-8 (no.jil.lengkap)
ISBN 978-602-244-738-2 (jil.3)

Isi buku ini menggunakan huruf Linux Libertine12/16pt., Philipp Poll
xiv, 170 hlm.: 17,6 × 25 cm.

Kata Pengantar

Pusat Perbukuan; Badan Standar, Kurikulum, dan Asesmen Pendidikan; Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi memiliki tugas dan fungsi mengembangkan buku pendidikan pada satuan Pendidikan Anak Usia Dini, Pendidikan Dasar, dan Pendidikan Menengah. Buku yang dikembangkan saat ini mengacu pada Kurikulum Merdeka, dimana kurikulum ini memberikan keleluasaan bagi satuan/program pendidikan dalam mengembangkan potensi dan karakteristik yang dimiliki oleh peserta didik. Pemerintah dalam hal ini Pusat Perbukuan mendukung implementasi Kurikulum Merdeka di satuan pendidikan Pendidikan Anak Usia Dini, Pendidikan Dasar, dan Pendidikan Menengah dengan mengembangkan Buku Teks Utama.

Buku teks utama merupakan salah satu sumber belajar utama untuk digunakan pada satuan pendidikan. Adapun acuan penyusunan buku teks utama adalah Capaian Pembelajaran PAUD, SD, SMP, SMA, SDLB, SMPLB, dan SMALB pada Program Sekolah Penggerak yang ditetapkan melalui Keputusan Kepala Badan Penelitian dan Pengembangan dan Perbukuan Nomor 028/H/KU/2021 Tanggal 9 Juli 2021. Sajian buku dirancang dalam bentuk berbagai aktivitas pembelajaran untuk mencapai kompetensi dalam Capaian Pembelajaran tersebut. Buku ini digunakan pada satuan pendidikan pelaksana implementasi Kurikulum Merdeka.

Sebagai dokumen hidup, buku ini tentu dapat diperbaiki dan disesuaikan dengan kebutuhan serta perkembangan keilmuan dan teknologi. Oleh karena itu, saran dan masukan dari para guru, peserta didik, orang tua, dan masyarakat sangat dibutuhkan untuk pengembangan buku ini di masa yang akan datang. Pada kesempatan ini, Pusat Perbukuan menyampaikan terima kasih kepada semua pihak yang telah terlibat dalam penyusunan buku ini, mulai dari penulis, penelaah, editor, ilustrator, desainer, dan kontributor terkait lainnya. Semoga buku ini dapat bermanfaat khususnya bagi peserta didik dan guru dalam meningkatkan mutu pembelajaran.

Jakarta, Juni 2022
Kepala Pusat,

Supriyatno
NIP 19680405 198812 1 001

Prakata

Puji syukur dipanjatkan ke hadirat Allah SWT karena hidayah dan inayah-Nya penulisan buku siswa ini dapat diselesaikan sesuai dengan waktu yang telah ditetapkan. Buku Siswa ini disusun sesuai Capaian Pembelajaran Fase F untuk SMA/MA Kelas XII sesuai dengan Keputusan Menteri Pendidikan dan Kebudayaan Republik Indonesia Nomor 028/H/KU/2021 Tanggal 9 Juli 2021 tentang Capaian Pembelajaran pada PAUD, SD, SMP, SMA, SDLB, SMPLB, dan SMALB.

Buku siswa ini disusun untuk memenuhi Kompetensi Keterampilan 4Cs (*Creativity, Critical Thinking, Collaboration, Communication*) dalam pembelajaran abad ke-21 yang meliputi: kehidupan dan karier, pembelajaran dan inovasi, serta informasi, media, dan teknologi. Oleh karena itu, dalam uraian setiap bab akan mengembangkan kompetensi/keterampilan/sikap siswa antara lain: (i) berpikir tingkat tinggi (*HOTS*), (ii) berpikir kritis dan *problem solving*, kreatif dan inovatif, komunikasi, dan kolaborasi, dan (iii) literasi informasi, media, dan teknologi. Untuk mempelajari materi dalam buku ini siswa lebih banyak diberi kesempatan secara aktif terlibat untuk mencari tahu, sedangkan guru akan membantu siswa yang mendapat hambatan belajar. Untuk mengembangkan keterampilan hidup dan karier, dalam buku ini disediakan proyek yang harus dilakukan siswa secara kolaborasi atau mandiri dan hasilnya untuk dikomunikasikan.

Secara garis besar sajian setiap bab memuat: pengantar bab, tujuan pembelajaran, kata kunci, pertanyaan pemantik, peta konsep, konteks atau situasi masalah untuk membangun konsep/prinsip matematika, Ayo Mengingat Kembali, Ayo Bereksplorasi, Ayo Berpikir Kreatif, Ayo Berpikir Kritis, Ayo Mencoba, Ayo Berkomunikasi, Ayo Bekerja Sama, Penguatan Karakter sesuai dengan Profil Pelajar Pancasila, Petunjuk, Tahukah Kalian?, Ayo Mengerjakan Proyek, Ayo Berefleksi, Ayo Menggunakan Teknologi Latihan Soal, dan Uji Kompetensi.

Buku ini dibagi menjadi tiga bab. Bab 1 tentang Transformasi Fungsi, memuat: Translasi Fungsi, Refleksi Fungsi, Dilatasi Fungsi, Rotasi Fungsi, Kombinasi Transformasi Fungsi. Bab 2 tentang Busur dan Juring Lingkaran,

memuat: Busur Lingkaran, Pengertian Busur Lingkaran, Juring Lingkaran, Hubungan Panjang Busur dan Luas Juring Lingkaran, serta Tembereng. Bab 3 tentang Kombinatorik, memuat: Aturan Pengisian Tempat, Permutasi, Kombinasi, Peluang Suatu Kejadian, Peluang Kejadian Majemuk Saling Lepas, Peluang Kejadian Majemuk Saling Bebas, Peluang Kejadian Majemuk Saling Bebas Bersyarat.

Terima kasih disampaikan kepada Kepala Pusat Kurikulum dan Perbukuan Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan Republik Indonesia yang telah memfasilitasi tim penulis sehingga penyusunan buku ini berjalan lancar. Para penulis juga menghaturkan ucapan terima kasih kepada berbagai pihak yang telah membantu mewujudkan buku ini, khususnya para penelaah, yaitu Prof. Dr. Widowati, S.Si., M.Si. (Universitas Diponegoro, Semarang) dan Dr. Ali Mahmudi, M.Pd. (Universitas Negeri Yogyakarta) atas segala masukan dan bimbingan yang sangat berharga dari draf awal, proses penulisan buku hingga buku ini diterbitkan.

Kami menyadari kekurangan buku ini. Oleh karena itu, saran dan kritik untuk memperbaiki buku ini sangat diharapkan dari semua pihak. Semoga buku ini bermanfaat bagi pembelajaran secara umum dan khusus pada pembelajaran matematika di SMA/SMK/MA.

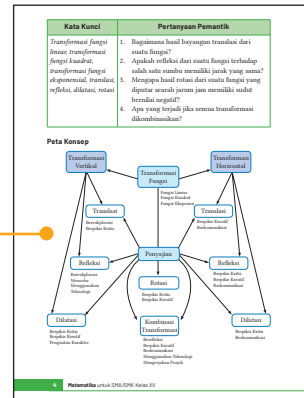
Jakarta, Oktober 2021
Penulis

Mohammad Tohir, dkk.

Petunjuk Penggunaan Buku

1. Peta Konsep

Peta Konsep memberikan gambaran bab secara umum, yang merupakan diagram yang menggambarkan hubungan yang bermakna antarkonsep yang ada dalam bab tersebut. Dengan adanya peta konsep ini diharapkan guru memiliki gambaran utuh tentang hubungan konsep yang ada sehingga membantu guru dalam memilih strategi pembelajaran yang tepat dan bermakna.



2. Ayo Bereksplorasi

Dalam kegiatan Ayo Bereksplorasi ini siswa diharapkan aktif dalam mencari informasi suatu pengetahuan atau konsep, teknik baru, metode dan rumus baru, atau menyelidiki pola hubungan antarunsur konsep antarbab, sambil berusaha memahaminya. Inti kegiatan eksplorasi adalah pelibatan siswa dalam menelaah sesuatu hal baru yang ada di Buku Siswa dengan bimbingan guru. Pengetahuan tersebut bisa jadi berhubungan dengan materi pelajaran sebelumnya maupun yang benar-benar baru bagi siswa.

a. Jika arah rotasi diputar sesuai jarum jam maka besar sudut rotasinya negatif (- α).
 b. Jika arah rotasi diputar berlawanan arah jarum jam maka besar sudut rotasinya positif (α).

Jenis rotasi

a. Jika koefisien titik semesta $A(x, y)$ akan ditransformasi dengan besar sudut α terhadap pusat (h, k) akan menghasilkan bayangan

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - h \\ y - k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

b. Jika koefisien titik semesta $A(x, y)$ akan ditransformasi dengan besar sudut α terhadap pusat (a, b) akan menghasilkan bayangan

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

A. Translasi

Ayo Bereksplorasi

Pada masa pandemi Covid-19 masyarakat membutuhkan masker sebagai penutup mulut dan hidung agar terhindar dari virus, juga memerlukan hand sanitizer yang dapat dileraui saat bekerja. Transmision akan lebih mudah tercapai mengakibatkan harga naik sehingga beberapa pengusaha konvensional ataupun pelaku UMKM beralih menjadi produsen masker dan distributor hand sanitizer untuk mendapatkan keuntungan serta membantu pemerataan dan mengisi permintaan barang. Secara ekonomis, hal tersebut diartikan sebagai fungsi penawaran yang dimodelkan menggunakan fungsi linear $y = ax + b$. Perhatikan Gambar 1.3 terkait grafik fungsi linear sebagai pemodelan fungsi penawaran.

3. Ayo Berpikir Kritis

Dalam kegiatan Ayo Berpikir Kritis siswa diajak mencari tahu untuk memahami konsep atau pengetahuan baru melalui penemuan terbimbing sehingga mereka yakin betul bahwa apa yang mereka dapatkan adalah benar-benar pengetahuan. Salah satu ciri dari siswa yang mampu berpikir

Fungsi kuadrat $y = x^2 + 1$ yang ditunjukkan pada Gambar 1.6 merupakan fungsi kuadrat awal yang kemudian mengalami pergeseran (translasi) menjadi $y = x^2 - 2$. Jika diperlihatkan fungsi kuadrat awal maka pergeseran yang terjadi adalah 3 satuan ke bawah. Secara matematis kita peroleh:

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 2 \\ y + 3 &= x^2 - 2 + 3 \\ y + 3 &= x^2 + 1 - 3 \\ y + 3 &= x^2 - 3 \\ y &= x^2 - 3 - 3 \\ y &= x^2 - 6 \end{aligned}$$

Ketika fungsi kuadrat memiliki titik $(1, -3)$ dalam, tetapi memiliki koefisien y berbeda ($a = 1$), sehingga fungsi $y = x^2 - 2$ adalah hasil translasi dari $y = x^2 + 1$ oleh $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Berdasarkan keterangan Gambar 1.5 dan Gambar 1.6, secara umum dapat dituliskan:

Definisi 1.1

Grafik $y = f(x) + b$ adalah hasil translasi dari $y = f(x)$ oleh $\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$.

Pada translasi $y = f(x) + b$, berlaku: untuk $b > 0$, maka grafik bergeser ke atas; untuk $b < 0$, maka grafik bergeser ke bawah; sehingga translasi $y = f(x) + b$ disebut sebagai bentuk Translasi Vertikal.

Ayo Berpikir Kritis

Andi melakukan percobaan mengenai bakteri selama beberapa minggu, yang hasil perubahannya ditunjukkan dalam grafik $y = 2^x$. Setelah mengalami perlakuan, hasil baktreri yang diamati berubah dan membentuk model grafik $y = 2^{x-2}$. Berdasarkan gambar kedua grafik tersebut, apakah grafik mengalami pergeseran ke atas atau ke bawah dari grafik fungsi $y = 2^x$?

kritis adalah mereka tidak mudah percaya terhadap informasi yang diterimanya sebelum melakukan proses berpikir yang mendalam. Kegiatan ini perlu dilatih terus-menerus agar siswa memiliki kemampuan berpikir kritis yang terlatih untuk membangun pengetahuannya.

4. Ayo Berpikir Kreatif

Dalam kegiatan Ayo Berpikir Kreatif siswa diminta untuk mencari, membuat ide, atau alternatif jawaban atau solusi dari permasalahan yang ada sebanyak-banyaknya. Guru diharapkan memberikan ruang yang terbuka dengan memberi kesempatan siswa untuk berpikir dengan berbagai macam ide yang muncul dari siswa.

Gambar grafik

Ayo Berpikir Kreatif

Translasi dari fungsi $f(x) = (x + 3)(x - 3)$ oleh $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ menjadi $a = -3$ adalah ke kiri, sedangkan oleh $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ menjadi $b = 2$ adalah ke atas. Tentukan nilai a dan b yang lain jika $f(x) = (x + 3)(x - 3)$ ditranslasi masing-masing ke bawah, ke kanan, ke atas, dan ke kiri.

Ayo Berpikir Kritis

Pak Ahmad merencanakan hasil translasi dari fungsi ekspresi $y = 2^x$ ke kanan sejauh 2 satuan menjadi $y = 2^{x-2}$. Sehingga Pak Ahmad menyimpulkan bahwa definiti 1.2 pasti berlaku pada setiap fungsi ekspresi seperti $y = 2^x$. Setujukah kalian dengan kesimpulan Pak Ahmad?

Bab 3 Transformasi Fungsi 47

5. Ayo Mencoba

Dalam kegiatan Ayo Mencoba siswa diminta untuk mengerjakan soal latihan, baik secara individu maupun kelompok. Hal ini penting sekali bagi siswa untuk menguji kemampuan siswa dalam mengaplikasikan pengetahuan yang diperoleh dalam menyelesaikan permasalahan.

Ayo Mencoba

$f(x) = (x + 3)(x - 2)$ gambarkan grafik berdasarkan fungsi berikut

a. $-f(x)$ b. $-f(x + 3)$

Petunjuk

- Buka tautan <https://myout.com/AyoMencoba> untuk memperoleh kegiatan Ayo Mencoba.
- Lakukan fungsi yang sesuai berdasarkan soal.
- Perhatikan gambar yang terbentuk.
- Gambar dan letakkan hasil gambar pada Buku Tugasmu.

Ayo Menggunakan Teknologi

Kunjungi

<https://myout.com/TransformasiFungsi> dan atau <https://myout.com/TransformasiFungsi> untuk lebih memantulkannya dalam pemahaman terkait gambar fungsi dan transformasi tersebut.

2. Refleksi Horizontal

Sekarang perhatikan fungsi kuadrat $y = x^2 + 4x + 4$ yang direfleksikan terhadap sumbu y dan selesaikan fungsi $y = (-x)^2 - 4(-x) + 4$. Berikan ditunjukkan gambar grafiknya.

6. Penguatan Karakter

Dalam kegiatan Penguatan Karakter, diharapkan kegiatan pembelajaran dapat dikaitkan dengan profil pelajar Pancasila. Guru harus mencari ide-ide yang dapat mengaitkan semua aspek pembelajaran dalam menanamkan nilai-nilai karakter dalam kehidupan sehari-hari.

Contoh Soal 130

Tentukan transformasi tunggal dari grafik $y = x^2 - 6x - 5$ menjadi grafik $y = 4x^2 - 6x - 5$.

Alternatif penyelesaian:

Diketahui:

$$y = x^2 - 6x - 5$$

$$f(x) = x^2 - 6x - 5$$

$$4x^2 - 6x - 5 = (2x)^2 - 6(2x) - 5$$

$$4x^2 - 6x - 5 = f(2x)$$

Jadi, transformasi yang digunakan adalah dilatasi yang sejajar sumbu x dengan skala $\frac{1}{2}$.

Penguatan Karakter

Begitulah kerangka grafik fungsi kuadrat dalam bentuk umum $f(x) = ax^2 + bx + c$ jika nilai $a > 0$ positif, maka gambar grafik akan selalu membuka ke atas. Hal tersebut dapat kita aplikasikan dalam prinsip kehidupan kita. Grafik yang selalu membuka ke atas dimisalkan suatu tempat atau wadah yang berisi hal-hal yang bersifat positif dan negatif (sumbu x dan sumbu y). Berkelanjutan dengan transformasi, ketika grafik tersebut mengalami translasi, refleksi, ataupun dilatasi akan membuka ke atas dengan nilai $a > 0$ positif. Jadi hargailah kemampuan kita, jika selalu berperilaku dan berkeaktifan positif, maka kehidupan kita akan selalu positif juga dengan tetap berpedoman pada sumbu y (diibaratkan dengan Tuhan).

sejajar vertikal. Akan berbeda jika mengalami refleksi dengan acuan adalah sumbu x (diibaratkan dengan manusia), maka grafik tersebut akan terbalik (arah berlawanan). Hal ini dimisalkan bahwa dalam hidup di dunia ini hendaknya kita selalu menajagi dan menajagi teguh lidahmu dengan Tuhan dan berpedoman hanya kepada Tuhan dengan kuat, sekuat

32 Matematika untuk SMA/MA Kelas XI

7. Ayo Berkomunikasi

Dalam kegiatan Ayo Berkomunikasi, diharapkan guru dapat memilih berbagai model diskusi yang sesuai agar siswa terlatih untuk bertukar pikiran, gagasan, ide, yang bermanfaat dalam membangun dan memperdalam pengetahuan siswa dalam rangka menyelesaikan permasalahan atau menjawab pertanyaan.

Tempelkan gambar hasil akhir dari transformasi tersebut beserta prosedur yang telah kalian lakukan.

137 Ayo Berkomunikasi

Hasil akhir dari transformasi yang telah ditentukan pada kegiatan Ayo Mengaplikasikan Proyek sebelumnya dibandingkan dengan transformasi terkecil hasil transformasi, kemudian presentasikan temuan kalian kepada teman yang lain.

Cantokan Soal 1.12

Diberikan fungsi kuadrat $y = x^2$. Tentukan hasil akhir transformasi setelah diterapkan kombinasi transformasi berikut:

- dilatasi yang sejajar sumbu y dengan skala 3, absejksikan transformasi oleh $\left(\frac{1}{2}\right)$
- translasi oleh $\left(\frac{1}{2}\right)$ kemudian refleksi terhadap sumbu y .

Alternatif penyelesaian:

Diketahui:

$$y = x^2$$

- Dilatasi sejajar sumbu y dengan skala 3

138 Matematika untuk SMA/SMK Kelas XII

8. Petunjuk

Dalam kegiatan Petunjuk, guru memberi petunjuk dan langkah-langkah untuk memancing siswa dalam pemecahan masalah. Bentuk dari kegiatan ini ada banyak variasi tergantung pada kebutuhan dan jenis permasalahan yang ada.

- Kombinasi dan transformasi vertikal
Jumlahkan $f(x)$ dengan $\left(\frac{1}{2}\right)$ kemudian dilatasi sejajar sumbu y dengan skala 2
- Kombinasi satu transformasi vertikal dan satu transformasi horizontal.
Refleksi $f(x)$ terhadap sumbu x , dilatasi transformasi oleh $\left(\frac{1}{2}\right)$
- Kombinasi dan transformasi horizontal
Dilatasi $f(x)$ sejajar sumbu x dengan skala 2, kemudian dilatasi dengan $\left(\frac{1}{2}\right)$

139 Ayo Menggunakan Teknologi

Kunjungi

<https://www.tutort.com/AyoMenggunakanTeknologi> untuk menggunakan aplikasi Canggih dalam mengerjakan kegiatan Ayo Berkomunikasi sebelumnya.

Petunjuk

- Kunjungi tautan di atas untuk mengerjakan kegiatan Ayo Berkomunikasi sebelumnya.
- Kerjakan kegiatan tersebut menggunakan definisi sebelumnya dengan baik untuk menentukan hasil transformasi yang sesuai.
- Tentukan fungsi hasil transformasi yang telah ditentukan pada tautan <https://www.tutort.com/AyoMenggunakanTeknologi> untuk menentukan grafik hasil transformasinya.

Setelah menyelesaikan kegiatan Ayo Menggunakan Teknologi, sampaikan temuan dan pilihan kepada teman yang lain.

140 Matematika untuk SMA/SMK Kelas XII

9. Tahukah Kalian?

Dalam kegiatan Tahukah Kalian, siswa mendapat informasi yang berkaitan dengan materi yang sedang dipelajari yang merupakan manfaat matematika dalam kehidupan manusia dalam sejarah kehidupan agar pengetahuan siswa semakin kuat dan terbangun semangat untuk senang bermatematika.

141 Tahukah Kalian

- Jika dua transformasi vertikal atau dua transformasi horizontal dikombinasikan, maka urutan pengerjaan yang diterapkan akan memengaruhi hasil transformasinya.
- Jika satu transformasi vertikal dan satu transformasi horizontal dikombinasikan, maka urutan pengerjaan yang diterapkan tidak akan memengaruhi hasil transformasinya.

142 Ayo Mengaplikasikan Proyek

Perhatikan lingkungan pada masalah di bawah ini.

Cantokan 1.11 Lingkungan jembatan sebagai Penerapan Fungsi Kuadrat

Jika lingkungan jembatan tersebut kita misalkan suatu fungsi kuadrat $y = x^2$, maka bentuk minimal 2 bentuk grafik fungsi tersebut dengan koordinat yang berbeda, selanjutnya transformasikan gambar grafik tersebut sesuai dengan aturan berikut.

143 Matematika untuk SMA/SMK Kelas XII

10. Ayo Berefleksi

Dalam kegiatan Ayo Berefleksi, siswa diajak untuk melihat dan mengingat kembali semua materi yang telah mereka pelajari. Bentuk kegiatan ini dapat berupa membandingkan pengetahuan yang sudah didapatkan dan diaplikasikan untuk menyelesaikan soal.

Dengan demikian,

$$y = 2^{x-1} \dots \text{substitusi } y = x, x = y'$$

$$x' = 2^{y'-1}$$

$$x' = 2^{y'-1}, \text{ hasil rotasinya adalah } x = 2^{y'-1}$$

E. Kombinasi Transformasi Fungsi

144 Ayo Berefleksi

Transformasi fungsi $y = f(x)$ secara menyeluruh dalam penjelasan sebelumnya dikategorikan menjadi transformasi vertikal dan transformasi horizontal. Lebih jelasnya dapat dilihat pada tabel rangkuman di bawah ini.

Tabel 1.1 Rangkuman Transformasi Fungsi

Langkah bagian yang masih kurang.

Jika fungsi $y = f(x)$ ditransformasikan, maka hasilnya adalah

Transformasi Vertikal		Transformasi Horizontal	
Fungsi	Keterangan	Fungsi	Keterangan
$y = f(x) + b$	Translasi oleh $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ b \end{smallmatrix}\right)$

145 Matematika untuk SMA/SMK Kelas XII

11. Ayo Mengingat Kembali

Dalam kegiatan Ayo Mengingat Kembali, siswa diajak untuk mengingat pengetahuan sebelumnya yang menjadi prasyarat untuk mempelajari materi saat ini, yang berupa hubungan antara konsep yang satu dengan konsep yang lainnya.

Transformasi Fungsi

Ayo Mengingat Kembali

- Transformasi adalah perubahan posisi dan atau ukuran suatu objek, baik berupa titik, garis, kurva, ataupun bidang.
- Translasi adalah transformasi yang memindahkan titik-titik dengan arah dan jarak tertentu atau bisa disebut peregangan.
 - Titik $A(x, y)$ dipindahkan oleh $T(a, b)$ menghasilkan bayangan $A'(x', y')$ ditulis dengan

$$A'(x', y') = T(a, b) \cdot A(x, y)$$
 - Berikut matriks translasi $T(a, b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$
 - $T(a, b)$ disebut sebagai komponen translasi, dengan konstanta a adalah peregangan secara horizontal dan b adalah peregangan secara vertikal.
- Refleksi adalah transformasi yang memindahkan tiap titik dengan menggunakan sifat bayangan oleh suatu cermin (pencerminan). Suatu refleksi dimungkinkan sebagai M' untuk A sebagai sumber cermin.
 - Sifat refleksi:
 - Jarak titik sumber dengan cermin sama dengan jarak cermin dengan titik bayangan.
 - Caris perpotongan dari titik sumber dengan titik bayangan beraturan tegak lurus terhadap cermin.
 - Caris-garis yang terbentuk antara titik sumber dengan titik bayangan akan saling tegak.

12. Ayo Bekerja Sama

Dalam kegiatan Ayo Bekerja Sama, siswa saling bertukar pikiran dan gagasan untuk menyelesaikan permasalahan atau menyelesaikan soal. Permasalahan akan dapat diselesaikan jika ada kerja sama yang baik antara siswa satu dengan lainnya sehingga pengetahuan menjadi utuh. Kegiatan ini juga untuk mendorong nilai karakter saling memahami dan menghargai antara siswa satu dengan lainnya.


Ayo Mencoba

Berikan informasi tersebut, pikirkan bagaimana cara mengubah panjang lintasan perahu yang berwana merah. Perhatikan panjang lintasan perahu yang berwana merah tersebut dan diskusikan dengan temanmu.

Ayo Bekerja Sama

Diskusikan dengan teman di sekelilmu untuk menyelesaikan permasalahan berikut ini:

- Apakah ada tali busur lingkaran yang panjangnya lebih panjang dari diameter lingkarannya? Jelaskan.
- Diketahui bahwa tiga titik yang berbeda, misalnya P, Q , dan R , tidak segaris. Maka bagaimana kalian menggambar juring setinggi lingkaran yang menghubungkan ketiga titik tersebut? Buatlah gambarnya.



- Tanggapih pernyataan berikut ini dengan menyebutkan "salah", "tidak salah", atau "tidak pasti". Jelaskan pula alasannya.
 - Sudut pusat busur minor suatu lingkaran membentuk sudut tumpul atau besar sudutnya lebih dari 180° .
 - Sudut pusat busur mayor suatu lingkaran membentuk sudut lancip atau besar sudutnya kurang dari 180° .
 - Jumlah dari banyak sudut pusat sebuah lingkaran tergantung pada ukuran panjang juring-juringnya.
 - Tali busur sebuah lingkaran merupakan diameter lingkaran.

Box 2 Busur dan Juring Lingkaran 63

13. Ayo Menggunakan Teknologi

Dalam kegiatan Ayo Menggunakan Teknologi, siswa diajak menggunakan berbagai macam bentuk teknologi baik dalam bentuk perangkat keras seperti kalkulator maupun perangkat lunak berupa aplikasi matematika agar dapat membantu siswa dalam menyelesaikan permasalahan yang ada.

- Kombinasi dua transformasi vertikal
- Translasi $f(x)$ dengan $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ kemudian dilantasi sejajar sumbu y dengan skala $\frac{1}{2}$
- Kombinasi satu transformasi vertikal dan satu transformasi horizontal
- Refleksi $f(x)$ terhadap sumbu x , dilanjutkan translasi oleh $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
- Kombinasi dua transformasi horizontal
- Dilantasi $f(x)$ sejajar sumbu y dengan skala 2, kemudian dilantasi dengan $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ayo Menggunakan Teknologi

Kunjungi



<https://sinyal.com/AyoMenggunakanTeknologi> untuk menggunakan aplikasi Canggih dalam mengerjakan kegiatan Ayo Bekerja Sama sebelumnya.

Perhatikan

- Kunjungi tautan di atas untuk mengerjakan kegiatan Ayo Bekerja Sama sebelumnya.
- Perhatikan kegiatan tersebut menggunakan definisi sebelumnya dengan baik untuk menentukan hasil transformasi yang sesuai.
- Telitikan fungsi hasil transformasi yang telah ditentukan pada tautan <https://sinyal.com/AyoMenggunakanTeknologi> untuk memverifikasi grafik hasil transformasinya.

Setelah menyelesaikan kegiatan Ayo Menggunakan Teknologi, sampaikan temuanmu dan jelaskan kepada teman yang lain.

13 Matematika untuk SMP/SPK Kelas XI

14. Contoh Soal

Dalam Contoh Soal, diberikan soal beserta alternatif penyelesaiannya yang dapat membantu siswa dalam memahami suatu konsep atau prosedur yang terkait dengan materi yang sedang dipelajari.

Contoh Soal 11

Suatu perusahaan masker yang mulai meningkat dengan harga tinggi pada masa pandemi Covid-19 disediakan dalam bentuk persamaan linear $8x - 4y + 16 = 0$. Setelah 8 hari, model grafik tersebut mengalami perubahan dengan perubahan oleh translasi $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Tentukan hasil bayangan dan grafiknya (harga masker = x , dan perusahaan masker = y)!

Alternatif penyelesaian:

Diketahui:

Cara 1

$$8x - 4y + 16 = 0, \text{ maka } 4y = 8x + 16$$

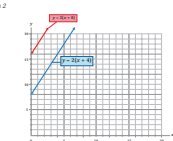
$$y = 2x + 4$$

$$y' = 2x + 4 + 1 \text{ (mengalami perubahan berdasarkan definisi 1.1)}$$

$$y' = 2x + 5$$

Sehingga translasinya adalah $2x - y + 16 = 0$

Cara 2



Contoh Soal 12

Tentukan translasi dari garis k dengan persamaan $y = x^2 - 2x - 8$ oleh $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

12 Matematika untuk SMP/SPK Kelas XI

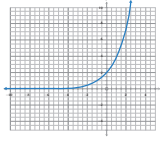
15. Latihan

Dalam Latihan dibagi menjadi tiga kategori, yaitu soal dasar, soal menengah, dan soal tingkat tinggi. Pertanyaan pada tingkat dasar berupa jawaban pendek untuk menguji pemahaman konsep materi dasar. Tingkat menengah dalam bentuk aplikasi soal yang terstruktur, sedangkan tingkat tinggi berupa permasalahan dan keterampilan tingkat tinggi.

Uji Berkompetensi

Jika suatu fungsi $y = x - 2$, $\frac{dy}{dx} = \frac{dx}{dx}$ adalah hasil turunan dari fungsi $y = x - 2$. Tentukan mata transformasinya (gunakan gambar sebagai lebih paham).
Dibuktikan dengan turunan dan sampai hasilnyanya kepada teman lain.

Latihan 1.1

- Tentukan hasil turunan dari fungsi berikut.
 - $y = 2x^2$ yang ditranslasi oleh $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
 - $y = 3x^2 - 2$ yang ditranslasi oleh $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$
 - $y = \frac{1}{x}$ yang ditranslasi oleh $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- Tentukan turunan dari transformasi berikut.
 - $y = x^2 + 3x - 4$ menjadi grafik $y = x^2 + 3x + 4$
 - $y = 3x + 4$ menjadi grafik $y = 3x^2 + 6$
- Diketahui grafik $y = f(x)$

 - Diketahui $g(x) = 3^x$, tentukan setiap kurva berikut ini.
 - $g(x - 1) - 4$
 - $g(\frac{1}{2}x + 2) + 3$
 - $\frac{1}{2}g(x) - 4$
 - $3g(x) - 1$

15 Matematika untuk SMA/SMK Kelas XII

16. Uji Kompetensi

Uji Kompetensi ini ada di setiap akhir bab, yang merupakan alat ukur bagi siswa untuk menguji tingkat ketercapaian siswa dalam memahami materi dalam bab tersebut. Siswa dapat mengerjakan sejumlah soal yang bervariasi dari yang sederhana hingga yang kompleks.

Uji Kompetensi 1

- Jika titik puncak suatu parabola $y = f(x)$ adalah $(2, -4)$, tentukan titik puncak yang lain pada parabola beraturan fungsi berikut.
 - $y = g(x) - 3$
 - $y = g(x) - 4$
 - $y = -g(x)$
 - $y = g(x)$
 - $y = 3g(x)$
- Diberikan $g(x) = 3^x$, tentukan setiap kurva berikut ini.
 - $g(x - 1) - 4$
 - $g(\frac{1}{2}x + 2) + 3$
 - $\frac{1}{2}g(x) - 4$
 - $3g(x) - 1$
- Diketahui fungsi $f(x) = x^2 - 4$, $x \in \mathbb{R}$ dan $g(x) = x^2 + 2x + 8$, $x \in \mathbb{R}$
 - Tentukan grafik dalam bentuk $(x - a)^2 + b$ dimana a dan b adalah konstanta.
 - Jika dua transformasi dengan urutan sesuai yang digunakan dalam transformasinya sehingga $g(x)$ adalah hasil transformasi dari $f(x)$.
- Diketahui $f(x) = 2^x - 4$. Tentukan $g(x)$ sebagai hasil dari $f(x)$ setelah mengalami transformasi berikut.
 - translasi oleh $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dilanjutkan dilatasi vertikal dengan skala 3,
 - translasi oleh $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dilanjutkan dilatasi vertikal dengan skala $\frac{1}{2}$,
 - refleksi terhadap sumbu horizontal, kemudian ditranslasi oleh $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$,
 - refleksi terhadap sumbu horizontal, dilanjutkan dilatasi vertikal dengan skala $\frac{1}{2}$, kemudian ditranslasi oleh $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,
 - refleksi terhadap sumbu horizontal, kemudian ditranslasi oleh $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ selanjutnya dilatasi vertikal dengan skala $\frac{1}{2}$.

16 Matematika untuk SMA/SMK Kelas XII

17. Pengayaan/Projek


Pengayaan/Projek untuk memperluas atau memperdalam pemahaman siswa terhadap konsep dan prosedur matematika dan aplikasinya dalam kehidupan sehari-hari terutama dalam bidang teknologi.

Refleksi-Kalau

- Jika dua transformasi vertikal atau dua transformasi horizontal dikombinasikan, maka urutan pengerjaan yang diterapkan akan memengaruhi hasil transformasinya.
- Jika satu transformasi vertikal dan satu transformasi horizontal dikombinasikan, maka urutan pengerjaan yang diterapkan tidak akan memengaruhi hasil transformasinya.

Agar Mengerjakan Projek

Pertahankan lingkungan pada jembatan di bawah ini.



Contoh 1.8 Langkah-langkah sebagai Penerapan Fungsi Kuadrat

Jika lingkungan jembatan tersebut kita misalkan suatu fungsi kuadrat $y = -x^2$, maka tentukan minimal 2 bentuk grafik fungsi tersebut dengan koordinat yang berbeda, selanjutnya transformasikan gambar grafik tersebut sesuai dengan aturan berikut.

- Gambarkan grafik fungsi kuadrat tersebut.
- Selanjutnya, tentukan hasil turunan oleh $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dari grafik tersebut.
- Kemudian refleksikan terhadap sumbu horizontal.
- Dari hasil grafik pada no. 3, lanjutkan dilatasi dengan skala 3 sejajar sumbu x.
- Kemudian rotasikan sejajar W' dengan pusat $(0, 0)$.

17 Matematika untuk SMA/SMK Kelas XII

Daftar Isi

iii		Kata Pengantar	xi		Daftar Isi
iv		Prakata	xii		Daftar Gambar
vi		Petunjuk Penggunaan Buku	xiv		Daftar Tabel

1

Bab 1

Transformasi Fungsi

7		A. Translasi
19		B. Refleksi
27		C. Dilatasi
34		D. Rotasi
36		E. Kombinasi Transformasi Fungsi
46		Uji Kompetensi 1



49

Bab 2

Busur dan Juring Lingkaran

52		A. Busur Lingkaran
67		B. Juring Lingkaran
76		C. Hubungan Panjang Busur dan Luas Juring
85		Uji Kompetensi 2

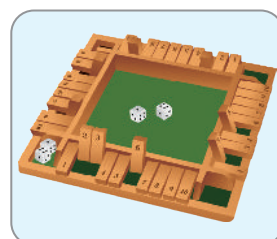


89

Bab 3

Kombinatorik

89		A. Aturan Pengisian Tempat
95		B. Permutasi
103		C. Kombinasi
112		D. Peluang Suatu Kejadian
118		E. Peluang Kejadian Majemuk
137		F. Peluang Kejadian Majemuk Saling Bebas Bersyarat
146		Uji Kompetensi 3



Glosarium		149	Indeks		156
Daftar Pustaka		154	Biodata Pelaku Perbukuan		158

Daftar Gambar

Gambar 1.1	Perkembangan Kasus Terkonfirmasi Covid-19 Per Bulan	2
Gambar 1.2	Perkembangan Kasus Terkonfirmasi Covid-19 dengan Angka Sama	3
Gambar 1.3	Grafik Fungsi Linear $y = 2x$ dengan Perubahan Konstanta	8
Gambar 1.4	Grafik Fungsi Linear $y = 2x$ dengan Perubahan Variabel	8
Gambar 1.5	Translasi Fungsi $y = 2x + 4$ dan $y = 2x + 6$	9
Gambar 1.6	Translasi Grafik Fungsi Kuadrat $y = x^2 + 1$ Menjadi $y = x^2 - 2$	10
Gambar 1.7	Translasi Fungsi Kuadrat $y = x^2$	13
Gambar 1.8	Translasi Grafik Fungsi $y = x^2 + 2$ Sejauh 2 Satuan	14
Gambar 1.9	Translasi Grafik Fungsi $y = 2x$ Sejauh 5 Satuan	15
Gambar 1.10	Mangkuk	19
Gambar 1.11	Refleksi Grafik Fungsi $y = x^2 - 4x + 4$ terhadap Sumbu x	20
Gambar 1.12	Refleksi Fungsi Eksponen $y = 3^{-x} + 2$ terhadap Sumbu x	21
Gambar 1.13	Pencerminan Grafik Fungsi $y = x^2 + 4x + 4$ terhadap Sumbu y	24
Gambar 1.14	Dilatasi Fungsi $y = x^2 - 4x - 5$ terhadap Sumbu x	28
Gambar 1.15	Dilatasi Fungsi $y = x^2 - 4x - 5$ terhadap Sumbu y	29
Gambar 1.16	Grafik Fungsi Kuadrat $x = y^2$ dengan Perputaran 90°	34
Gambar 1.17	Grafik Fungsi Kuadrat $y = x^2$	37
Gambar 1.18	Lengkungan Jembatan sebagai Penerapan Fungsi Kuadrat	39
Gambar 2.1	Lapangan Olahraga Tolak Peluru	50
Gambar 2.2	Bentuk Lapangan Olahraga Tolak Peluru	50
Gambar 2.3	Ilustrasi Lapangan Tolak Peluru	50
Gambar 2.4	Jembatan Lengkung Tol Kalikutho Kendal	52
Gambar 2.5	Archymedes	52
Gambar 2.6	Segi Enam	52
Gambar 2.7	Sudut Pusat dan Busur Lingkaran	57
Gambar 2.8	Roda Sepeda	61

Gambar 2.9	Jembatan Youtefa Jayapura, Papua	62
Gambar 2.10	Irisan Piza	68
Gambar 2.11	Daerah Juring Lingkaran	69
Gambar 2.12	Sinar Matahari ke Bumi	76
Gambar 2.13	Tembereng	81
Gambar 3.1	Denah Perumahan Bunga Indah	90
Gambar 3.2	<i>Handphone</i> yang Dipamerkan	91
Gambar 3.3	Struktur Pengurus Kelas	95
Gambar 3.4	Posisi Duduk Melingkar pada Meja Bundar	100
Gambar 3.5	Bagan Pemain Futsal	103
Gambar 3.6	Papan Permainan <i>Shut the Box</i>	112
Gambar 3.7	Dua Mata Uang Logam	115
Gambar 3.8	Dadu dan Koin	118
Gambar 3.9	Mengambil Bola secara Acak	120
Gambar 3.10	Pelantunan Mata Dadu	124
Gambar 3.11	Dua Dadu	131
Gambar 3.12	Mata Dadu dan Uang Koin	133
Gambar 3.13	Dadu Dilantunkan	134
Gambar 3.14	Kartu Remi dan Kartu <i>Heart</i>	137
Gambar 3.15	Kartu Remi	139

Daftar Tabel

Tabel 1.1	Rangkuman Transformasi Fungsi	36
Tabel 2.1	Hubungan Sudut Pusat Lingkaran dengan Panjang Busurnya	58
Tabel 2.2	Hubungan Sudut Pusat Lingkaran dengan Juringnya	69
Tabel 2.3	Hubungan Sudut Pusat Lingkaran dengan Panjang Busur dan Luas Juringnya	77
Tabel 3.1	Kemungkinan Cara Memasukkan Bola ke Dalam Tempatnya	108
Tabel 3.2	Pelantunan Satu Koin dan Dadu	119

KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET, DAN TEKNOLOGI
REPUBLIK INDONESIA, 2022

Matematika untuk SMA/SMK/MA Kelas XII

Penulis: Mohammad Tohir, dkk.

ISBN: 978-602-244-738-2

Bab

1

Transformasi Fungsi



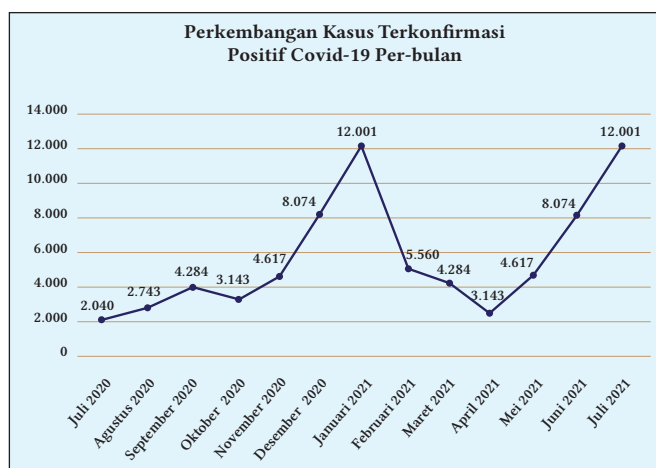
Tujuan Pembelajaran

1. Memahami transformasi pada suatu fungsi linear, fungsi kuadrat, dan fungsi eksponen
2. Menentukan transformasi translasi pada suatu fungsi
3. Menentukan transformasi refleksi pada suatu fungsi
4. Menentukan transformasi dilatasi pada suatu fungsi
5. Menentukan transformasi rotasi pada suatu fungsi
6. Menentukan kombinasi transformasi pada suatu fungsi

Severe Acute Respiratory Syndrome Coronavirus 2 (SARS-CoV-2) yang kemudian oleh *World Health Organization* (WHO) diganti namanya menjadi *Coronavirus Disease 2019* (Covid-19) merupakan pandemi global yang sudah tersebar ke banyak negara di dunia. Indonesia juga tidak lepas dari pandemi tersebut sehingga beberapa daerah mengalami penambahan kasus terkonfirmasi positif Covid-19 sejak virus ini masuk ke Indonesia awal tahun 2020. Covid-19 adalah penyakit menular yang disebabkan oleh tipe baru coronavirus dengan gejala umum demam, lemah, batuk, kejang, dan diare (WHO, 2020). Virus ini dapat bergerak cepat dari manusia ke manusia melalui kontak langsung (Li et al., 2020). Pada pertengahan tahun 2021 jumlah penambahan kasus terkonfirmasi positif Covid-19 makin meningkat hingga mencapai angka lebih dari 2.000.000 pasien terkonfirmasi. Hal tersebut sungguh menjadi perhatian pemerintah dengan terus mengencangkan patuh protokol kesehatan dan mengeluarkan peraturan Pemberlakuan Pembatasan Kegiatan Masyarakat (PPKM) sebagai upaya mengantisipasi penyebaran Covid-19. Berikut ditunjukkan penambahan kasus terkonfirmasi Covid-19 secara nasional pada semester pertama tahun 2021.

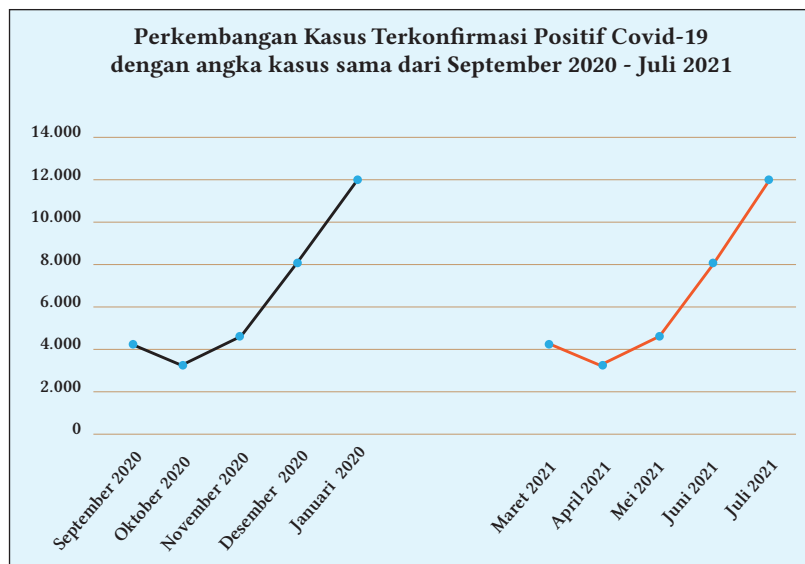
Jumlah penambahan kasus terkonfirmasi positif Covid-19 di Indonesia pada semester pertama tahun 2021

Penambahan kasus terkonfirmasi positif Covid-19 berdasarkan data dari <https://covid19.go.id/peta-sebaran-covid19> per bulan sejak pertengahan tahun 2020 sampai dengan pertengahan tahun 2021 ditunjukkan pada diagram berikut.



Gambar 1.1 Perkembangan Kasus Terkonfirmasi Covid-19 Per Bulan

Berdasarkan Gambar 1.1 di atas diketahui bahwa perkembangan kasus terkonfirmasi setiap bulan berbeda-beda, terkadang meningkat terkadang menurun. Gambar di atas menunjukkan bahwa sejak Oktober 2020 grafik selalu meningkat, setelah memasuki bulan Februari 2021 grafik mulai menurun, tetapi meningkat lagi pada Mei 2021. Pada saat grafik meningkat atau naik maka pemerintah secara bertahap melaksanakan kebijakan PPKM. Coba perhatikan angka perkembangan kasus terkonfirmasi pada bulan September 2020 dan Maret 2021, ternyata memiliki angka sama yaitu 4.284 kasus. Pada bulan Oktober 2020 dan April 2021 juga memiliki angka sama yaitu 3.143 kasus, kemudian pada bulan November 2020 dan Mei 2021 juga memiliki angka sama yaitu 4.617 kasus. Selanjutnya, pada bulan Desember 2020 dan Juni 2021 angka perkembangannya adalah 8.074 kasus, sedangkan pada bulan Januari 2021 dan Juli 2021 memiliki angka perkembangan paling tinggi yaitu 12.001 kasus. Kesamaan data pada bulan berbeda tersebut, jika dimodelkan dalam bentuk grafik, akan tampak seperti pada gambar berikut.

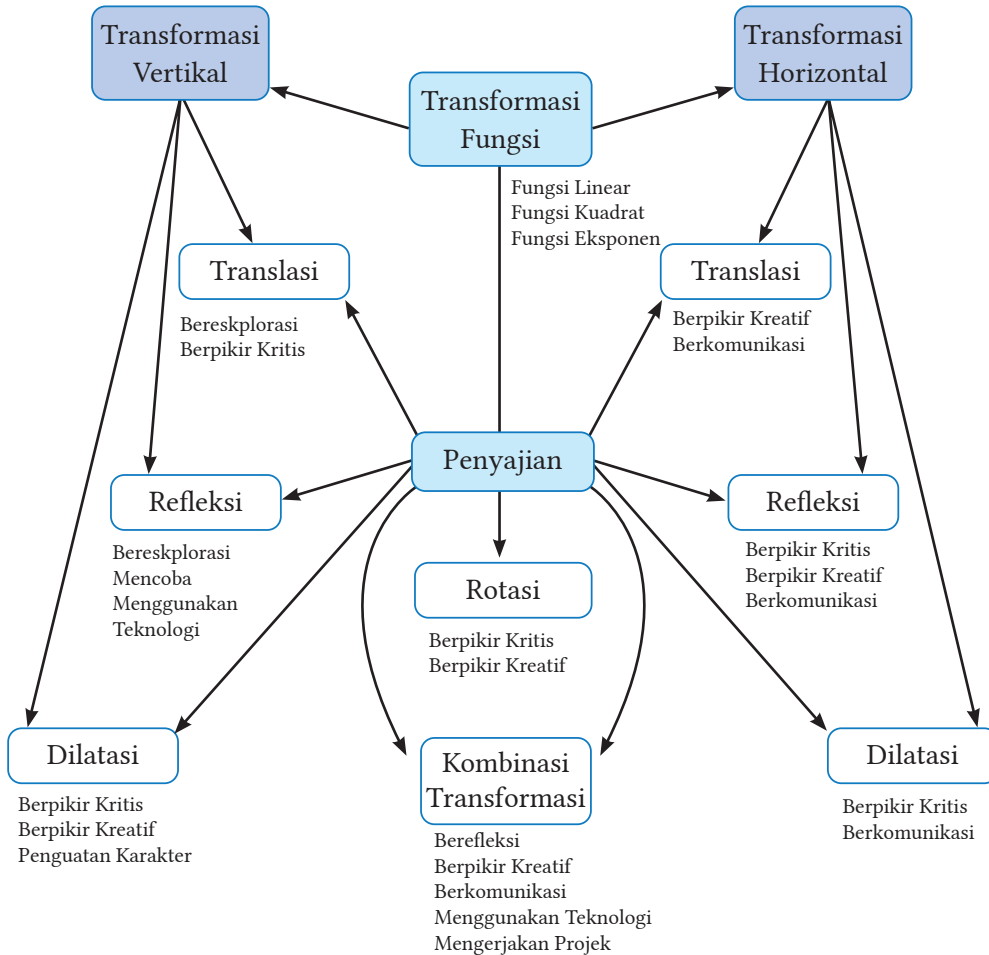


Gambar 1.2 Perkembangan Kasus Terkonfirmasi Covid-19 dengan Angka Sama

Berdasarkan gambar tersebut, dapat kita ketahui bahwa data yang dimodelkan dengan diagram garis di atas menunjukkan bahwa data pada bulan Maret 2021–Juli 2021 merupakan pergeseran ke kanan dari grafik yang memodelkan data pada bulan September 2020–Januari 2021. Pergeseran tersebut merupakan penerapan transformasi. Pada bab ini akan kita pelajari terkait transformasi suatu fungsi.

Kata Kunci	Pertanyaan Pemantik
<i>Transformasi fungsi linear, transformasi fungsi kuadrat, transformasi fungsi eksponensial, translasi, refleksi, dilatasi, rotasi</i>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Bagaimana hasil bayangan translasi dari suatu fungsi? 2. Apakah refleksi dari suatu fungsi terhadap salah satu sumbu memiliki jarak yang sama? 3. Mengapa hasil rotasi dari suatu fungsi yang diputar searah jarum jam memiliki sudut bernilai negatif? 4. Apa yang terjadi jika semua transformasi dikombinasikan?

Peta Konsep



Transformasi Fungsi



Ayo Mengingat Kembali

1. Transformasi adalah perubahan posisi dan atau ukuran suatu objek, baik berupa titik, garis, kurva, ataupun bidang.
2. Translasi adalah transformasi yang memindahkan titik-titik dengan arah dan jarak tertentu atau biasa disebut pergeseran.

- Titik $A(x, y)$ ditranslasikan oleh $T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ menghasilkan bayangan $A'(x', y')$ ditulis dengan

$$A(x, y) \xrightarrow{T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}} A'(x', y')$$

- Bentuk matriks translasi $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$
 - $T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ disebut sebagai komponen translasi, dengan konstanta a adalah pergeseran secara horizontal dan b adalah pergeseran secara vertikal.
3. Refleksi adalah transformasi yang memindahkan tiap titik dengan menggunakan sifat bayangan oleh suatu cermin (pencerminan). Suatu refleksi disimbolkan sebagai M_a untuk a sebagai sumbu cermin.
 - Sifat refleksi
 - a. Jarak titik semula dengan cermin sama dengan jarak cermin dengan titik bayangan.
 - b. Garis penghubung dari titik semula dengan titik bayangan bersifat tegak lurus terhadap cermin.
 - c. Garis-garis yang terbentuk antara titik semula dengan titik bayangan akan saling sejajar.
 - Jenis refleksi
 - a. Titik $A(x, y)$ direfleksikan terhadap sumbu x menghasilkan bayangan $A'(x', y')$ ditulis dengan

$$A(x, y) \xrightarrow{M_x} A'(x', y')$$

Bentuk matriks refleksi $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Dapat dituliskan refleksi dari $A(x, y)$ terhadap sumbu x adalah $A'(x, -y)$

- b. Titik $A(x, y)$ direfleksikan terhadap sumbu y menghasilkan bayangan $A'(x', y')$ ditulis dengan

$$A(x, y) \xrightarrow{M_y} A'(x', y')$$

Bentuk matriks refleksi $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Dapat dituliskan refleksi dari $A(x, y)$ terhadap sumbu y adalah $A'(-x, y)$

4. Dilatasi adalah transformasi yang mengubah jarak dari titik-titik dengan faktor pengali tertentu terhadap suatu titik tertentu.

- Titik (x, y) didilatasikan dengan faktor skala k terhadap titik pusat $(0, 0)$, kemudian menghasilkan bayangan di titik (x', y') , maka persamaan umum dalam bentuk matriks dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- Titik (x, y) didilatasikan dengan faktor skala k terhadap titik pusat (a, b) , kemudian menghasilkan bayangan di titik (x', y') , maka persamaan umum dalam bentuk matriks dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

5. Rotasi adalah transformasi yang memindahkan titik-titik pada suatu daerah dengan cara memutar titik-titik tersebut sejauh α terhadap suatu titik tertentu. Rotasi pada suatu bidang ditentukan oleh beberapa hal:

- titik pusat rotasi
- besar sudut rotasi
- arah sudut rotasi

- a. Jika arah rotasi diputar searah jarum jam maka besar sudut rotasinya negatif ($-\alpha$).
 - b. Jika arah rotasi diputar berlawanan arah jarum jam maka besar sudut rotasinya positif (α).
- Jenis rotasi
 - a. Jika koordinat titik semula $A(x, y)$ akan dirotasikan dengan besar sudut α terhadap pusat $(0, 0)$ akan menghasilkan bayangan

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- b. Jika koordinat titik semula $A(x, y)$ akan dirotasikan dengan besar sudut α terhadap pusat (a, b) akan menghasilkan bayangan

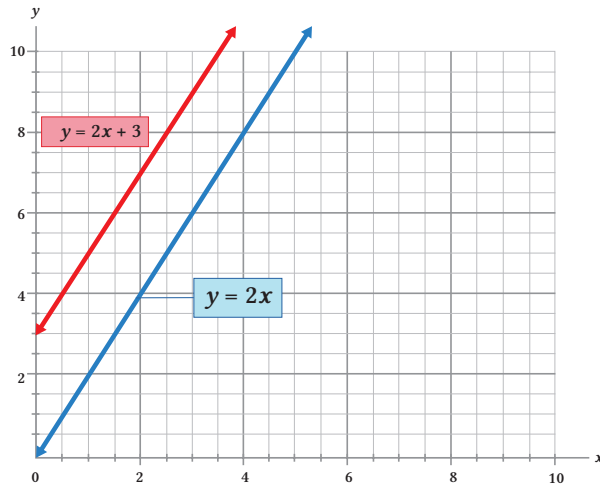
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

A. Translasi



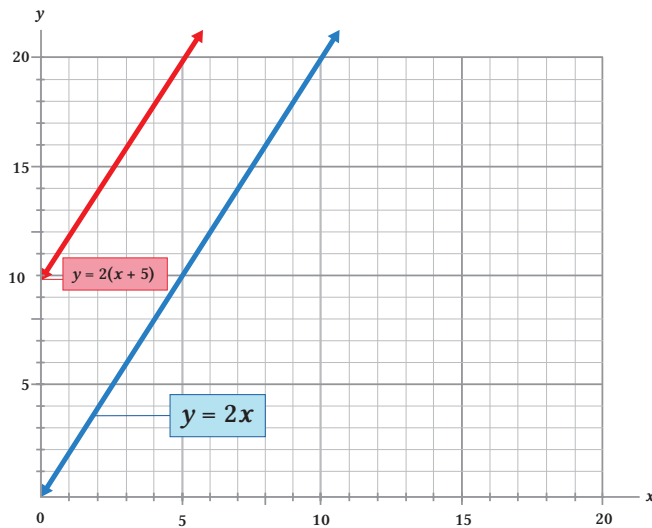
Ayo Bereksplorasi

Pada masa pandemi Covid-19 masyarakat membutuhkan masker sebagai penutup mulut dan hidung agar terhindar dari virus, juga memerlukan *hand sanitizer* yang dapat dibawa saat bekerja. Permintaan akan kebutuhan tersebut mengakibatkan harga naik sehingga beberapa pengusaha konveksi ataupun pelaku UMKM beralih menjadi produsen masker dan distributor *hand sanitizer* untuk mendapatkan keuntungan serta memberikan penawaran dan mengisi permintaan barang. Permintaan masker dan *hand sanitizer* yang cukup tinggi harus diimbangi dengan kualitas barang yang terjamin, sehingga konsumen tidak merasa dirugikan dan hak konsumen selalu terjaga. Untuk mengelola keuangan dengan benar dan akurat, Produsen dan Distributor mestinya harus memahami perencanaan dan pengolahan keuangan yang benar dan akurat. Secara ekonomi, hal tersebut disebut sebagai fungsi penawaran yang disimbolkan menggunakan fungsi linear $y = ax + b$. Perhatikan Gambar 1.3 terkait grafik fungsi linear sebagai pemodelan fungsi penawaran.



Gambar 1.3 Grafik Fungsi Linear $y = 2x$ dengan Perubahan Konstanta

Perhatikan bentuk garis pada fungsi linear pada Gambar 1.3. Sumbu x merupakan grafik yang menunjukkan harga suatu barang dan sumbu y menunjukkan banyaknya barang yang ditawarkan. Garis $y = 2x$ merupakan gambaran fungsi penawaran masker pada hari pertama pemberlakuan aturan wajib memakai masker. Setelah tiga hari berlalu, banyaknya masker yang ditawarkan makin naik, sedangkan harga tetap, seperti yang ditunjukkan pada grafik $y = 2x + 3$. Berdasarkan kedua grafik tersebut, dapat diketahui bahwa garis $y = 2x$ mengalami pergeseran sejauh 3 satuan sehingga diperoleh garis $y = 2x + 3$. Coba perhatikan kembali Gambar 1.4 di bawah ini.



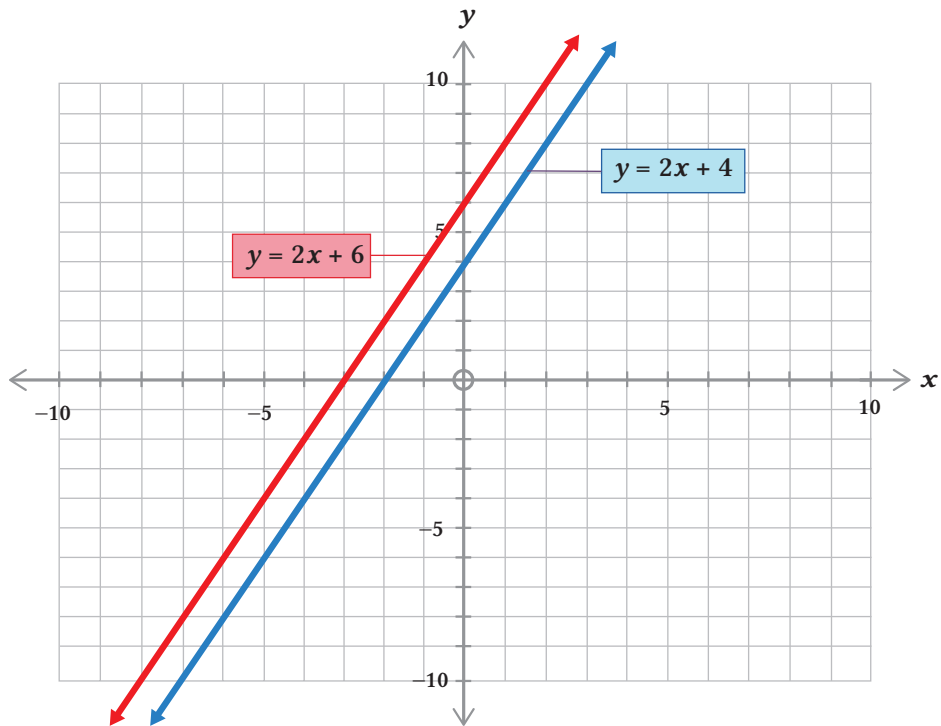
Gambar 1.4 Grafik Fungsi Linear $y = 2x$ dengan Perubahan Variabel

Pada Gambar 1.3 tampak bahwa garis $y = 2x$ memiliki variabel x , sedangkan garis $y = 2(x + 5)$ memiliki variabel $(x + 5)$. Maka garis $y = 2x$ mengalami pergeseran sejauh 5 satuan sehingga diperoleh bahwa garis $y = 2x$ mengalami pergeseran menjadi garis $y = 2x + 10$. Apa yang dapat kalian simpulkan berdasarkan gambar garis pada Gambar 1.3 dan Gambar 1.4 dengan konstanta serta variabel yang berbeda?

1. Translasi Vertikal

a. Translasi vertikal ke atas

Terdapat dua fungsi linear berbeda yaitu $y = 2x + 4$ dan $2x - y + 6 = 0$. Jika digambarkan pada koordinat kartesius, maka akan seperti grafik berikut.



Gambar 1.5 Translasi Fungsi $y = 2x + 4$ dan $y = 2x + 6$

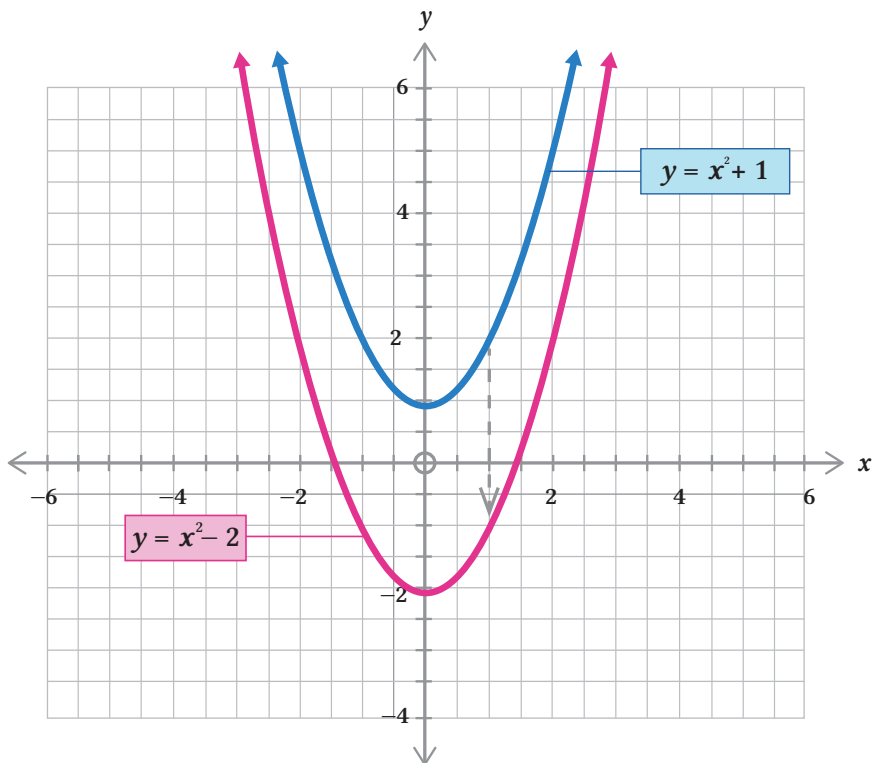
Berdasarkan Gambar 1.5 diketahui bahwa garis tersebut adalah gambar dari fungsi linear $y = 2x + 4$ yang digeser menjadi $y = 2x + 6$. Jika kita analisis, grafik tersebut memiliki bentuk yang sama, tetapi koordinatnya berbeda sehingga kita peroleh

- $y = 2x + 4$, dan
- $y' = 2x + 6$
 $y' = (2x + 4) + 2$
 $y' = y + 2 \dots$ (dengan y' adalah hasil transformasi)

Jika kita perhatikan pada bagian Ayo Mengingat Kembali tampak bahwa $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ adalah komponen translasi dan $y = f(x)$, maka fungsi linear $y' = y + 2$ di atas dapat ditulis bahwa $f'(x) = f(x) + 2$ untuk $f'(x)$ adalah hasil translasi sehingga garis di atas bergeser sejauh 2 satuan ke atas. Dengan demikian, $y = 2x + 6$ adalah hasil translasi dari $y = 2x + 4$ oleh $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ sejauh 2 satuan ke atas.

b. *Translasi vertikal ke bawah*

Terdapat dua fungsi kuadrat yang digambarkan pada grafik berikut.



Gambar 1.6 Translasi Grafik Fungsi Kuadrat $y = x^2 + 1$ menjadi $y = x^2 - 2$

Fungsi kuadrat $y = x^2 + 1$ yang ditunjukkan pada Gambar 1.6 merupakan fungsi kuadrat asal yang kemudian mengalami pergeseran (translasi) menjadi $y = x^2 - 2$. Jika memperhatikan fungsi kuadrat asal, maka pergeseran yang terjadi sejauh 3 satuan ke bawah. Secara matematis kita peroleh:

$$y' = x^2 - 2$$

$$y' = x^2 + 1 - 3$$

$$y' = x^2 + 1 - 3$$

$$y' = y - 3$$

Kedua fungsi kuadrat memiliki absis ($x = x$) sama, tetapi memiliki ordinat y berbeda ($y' = y - 3$) sehingga fungsi $y' = x^2 - 2$ adalah hasil translasi dari $y = x^2 + 1$ oleh $\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$. Berdasarkan keterangan Gambar 1.5 dan Gambar 1.6, secara umum dapat dituliskan:

Definisi 1.1

Grafik $y = f(x) + b$ adalah hasil translasi dari $y = f(x)$ oleh $\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$

Pada translasi $y = f(x) + b$, berlaku:

untuk $b > 0$, maka grafik bergeser **ke atas**

untuk $b < 0$, maka grafik bergeser **ke bawah**

sehingga translasi $y = f(x) + b$ disebut sebagai bentuk **Translasi Vertikal**.



Ayo Berpikir Kritis

Andi melakukan percobaan mengamati bakteri selama beberapa waktu, yang hasil percobaannya dimodelkan dalam grafik $y = 2^x$. Setelah mengalami perlakuan, hasil bakteri yang diamati berubah dan membentuk model grafik $y = 2^{x+1}$. Berdasarkan gambar kedua grafik tersebut, apakah grafik mengalami pergeseran ke atas atau ke bawah dari grafik fungsi $y = 2^x$?

Contoh Soal 1.1

Suatu penawaran masker yang makin meningkat dengan harga tinggi pada masa pandemi Covid-19 dimodelkan dalam bentuk persamaan linear $8x - 4y + 16 = 0$. Setelah 8 hari, model grafik tersebut mengalami perubahan dengan perubahan oleh translasi $\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}$. Tentukan hasil bayangan dan grafiknya (harga masker = x , dan penawaran masker = y)!

Alternatif penyelesaian:

Diketahui:

Cara 1

$$8x - 4y + 16 = 0, \text{ maka } 4y = 8x + 16$$

$$y = 2x + 8$$

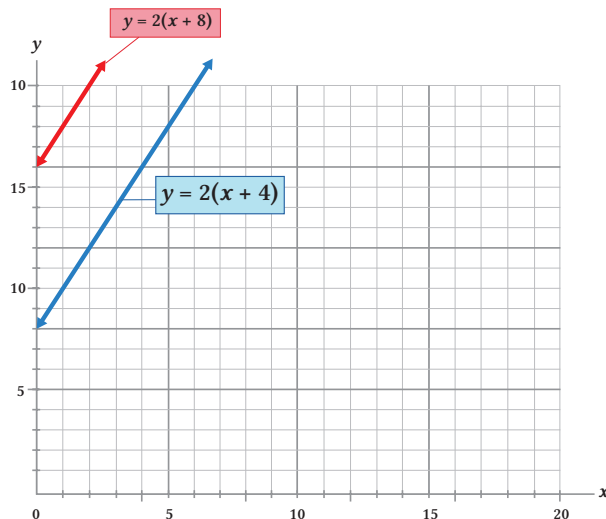
$$y = 2(x + 4)$$

$$y' = 2x + 8 + 8 \text{ (mengalami perubahan berdasarkan definisi 1.1)}$$

$$y' = 2x + 16$$

$$y' = 2(x + 8)$$

Sehingga translasinya adalah $2x - y + 16 = 0$

Cara 2**Contoh Soal 1.2**

Tentukan translasi dari garis k dengan persamaan $y = x^2 - 2x - 8$ oleh $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Alternatif penyelesaian:

Diketahui:

$$y = x^2 - 2x - 8 \quad \text{menggunakan } y = f(x) + b$$

$$y = (x^2 - 2x - 8) + 4$$

$$y = x^2 - 2x - 4$$

Sehingga translasinya adalah $y = x^2 - 2x - 4$

2. Translasi Horizontal

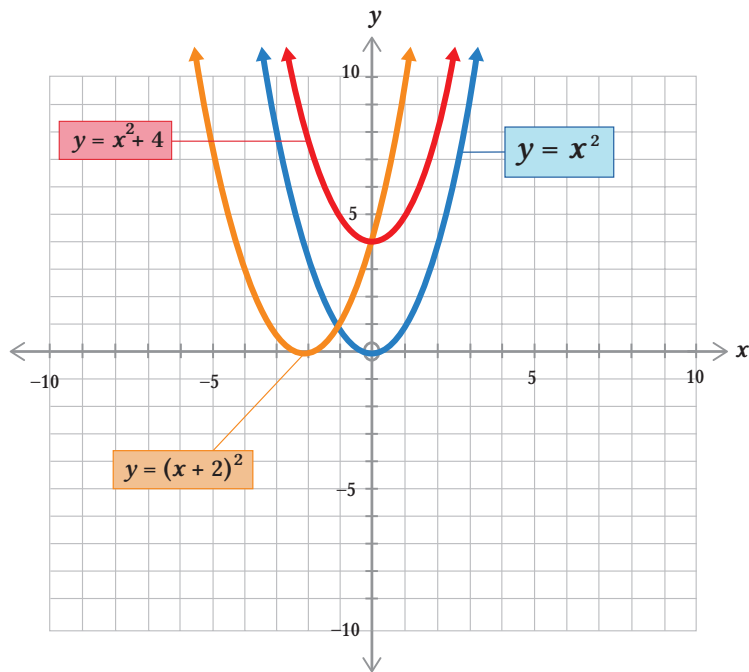


Ayo Bereksplorasi

Parabola merek terbaru akan dipasang di sebuah atap yang datar dengan acuan tiang penyangga parabola berada pada titik tengah atap. Parabola tersebut dimodelkan dalam bentuk fungsi kuadrat $f(x) = x^2$. Jika fungsi $f(x)$ berubah menjadi

- $y = f(x) + 4$
- $y = f(x + 2)$

Maka ilustrasi fungsi di atas dapat dinyatakan dalam gambar 1.7

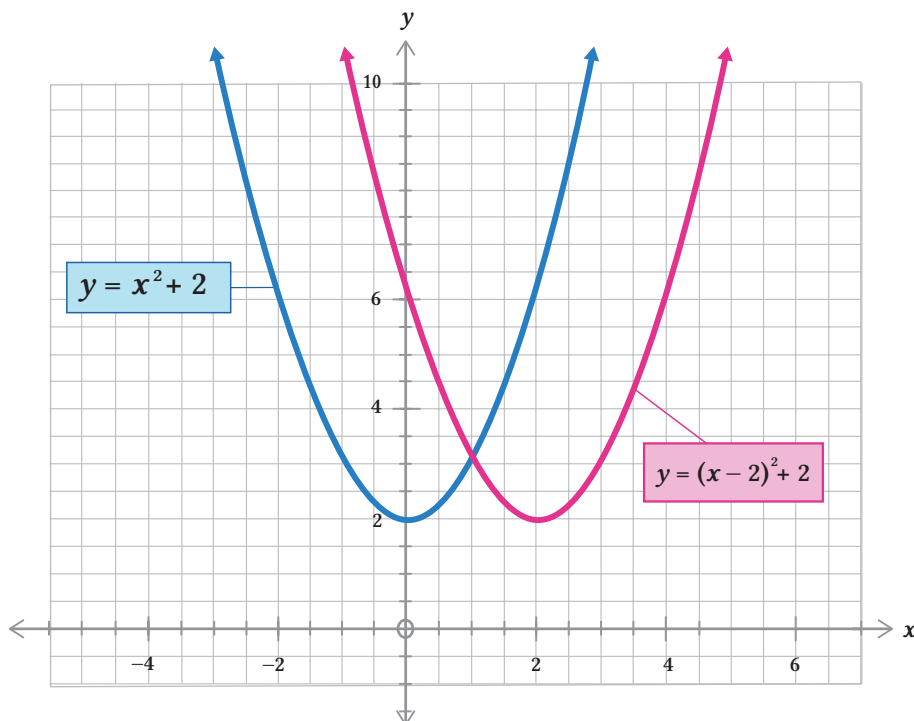


Gambar 1.7 Translasi Fungsi Kuadrat $y = x^2$

Perhatikan grafik pada Gambar 1.7. Jika (x, y) adalah titik puncak pada grafik berwarna biru ($y = x^2$), bagaimana kondisi titik puncak tersebut pada grafik lain terhadap grafik berwarna biru?

a. *Translasi horizontal ke kanan*

Terdapat fungsi kuadrat $y = x^2 + 2$. Jika fungsi tersebut digeser ke kanan sejauh 2 satuan, maka grafiknya menjadi seperti di bawah ini.

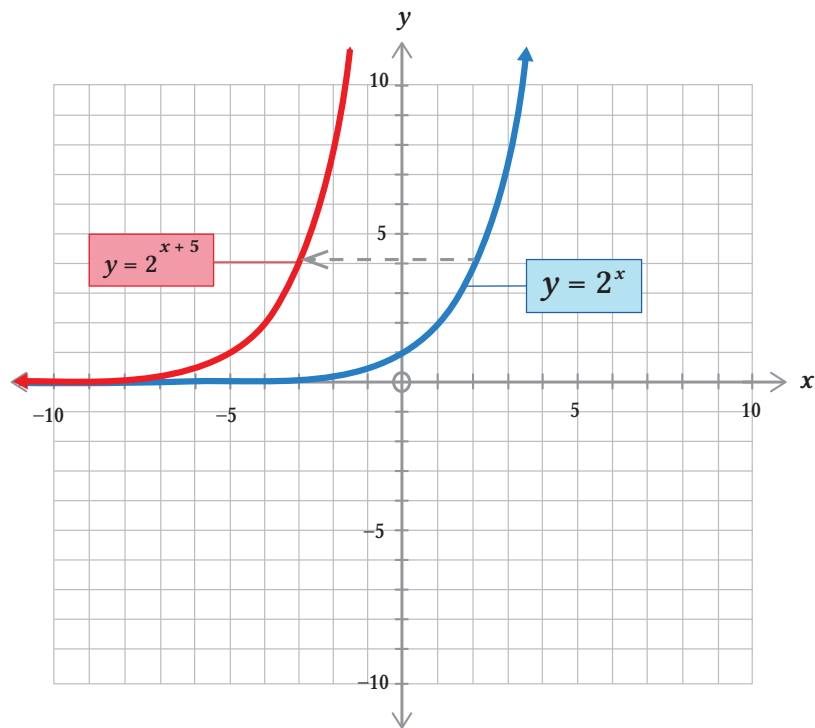


Gambar 1.8 Translasi Grafik Fungsi $y = x^2 + 2$ Sejauh 2 Satuan

Hasil pergeseran dari fungsi $y = x^2 + 2$ adalah $y = (x - 2)^2 + 2$ yang mengalami pergeseran sejauh 2 satuan ke kanan. Jika menganalisis kedua fungsi kuadrat tersebut, maka kita ketahui bahwa kedua fungsi memiliki absis $x = x - 2$ dan ordinat $y = y$. Maksudnya, pergeseran tersebut terjadi ketika ordinat dari kedua grafik sama, sedangkan absis berbeda sehingga perbedaan x pada kedua grafik yaitu $x - 2$ akan mengalami pergeseran ke kanan. Dengan demikian, dapat dinyatakan bahwa $y = (x - 2)^2 + 2$ merupakan hasil ditranslasi dari $y = x^2 + 2$ oleh $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b. *Translasi horizontal ke kiri*

Fungsi eksponen $y = 2^x$ yang digambarkan pada Gambar 1.9 di bawah ini mengalami pergeseran sejauh 4 satuan ke arah kiri.



Gambar 1.9 Translasi Grafik Fungsi $y = 2^x$ Sejauh 5 Satuan

Gambar di atas menunjukkan bahwa hasil translasi sejauh 5 satuan ke kiri dari garis $y = 2^x$ adalah $y = 2^{x+5}$. Artinya, kedua fungsi tersebut memiliki kesamaan koordinat y ($y = y$) dan koordinat x berbeda ($x = x + 5$) sehingga perbedaan x pada kedua grafik yaitu $x + 5$ akan mengalami pergeseran ke kiri. Dengan demikian, dapat dinyatakan bahwa $y = 2^{x+5}$ merupakan hasil translasi dari $y = 2^x$ oleh $\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$. Secara umum dapat dituliskan:

Definisi 1.2

Grafik $y = f(x - a)$ adalah hasil translasi dari $y = f(x)$ oleh $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$

Pada translasi $y = f(x - a)$, berlaku:
 untuk $a > 0$, maka grafik bergeser **ke kanan**
 untuk $a < 0$, maka grafik bergeser **ke kiri**
 sehingga translasi $y = f(x - a)$ disebut sebagai bentuk **Translasi Horizontal**.

Contoh Soal 1.3

Diketahui fungsi linear $f(x) = 2x + 3y + 4$. Jika $f(x)$ mengalami pergeseran ke bawah sejauh 4 satuan, maka tentukan hasil translasi $f(x)$.

Alternatif penyelesaian:

Diketahui:

$$f(x) = 2x + 3y + 4$$

$$y = 2x + 3y + 4$$

$$y - 3y = 2x + 4$$

$$-2y = 2x + 4$$

$$y = -x - 2$$

Karena bergeser 4 satuan ke bawah maka $y = f(x) + b$ untuk $b < 0$, hal ini berarti

$$y = -x - 2 - 4$$

$$y = -x - 6$$

Jadi, hasil translasinya adalah $y = -x - 6$

Contoh Soal 1.4

Grafik dari $y = x^2 + 3x$ digeser sejauh 6 satuan ke kanan. Tentukan hasil translasinya dan gambarlah grafiknya.

Alternatif penyelesaian:

Diketahui:

$$y = x^2 + 3x$$

$$y = (x - 6)^2 + 3(x - 6)$$

$$y = x^2 - 12x + 36 + 3x - 18$$

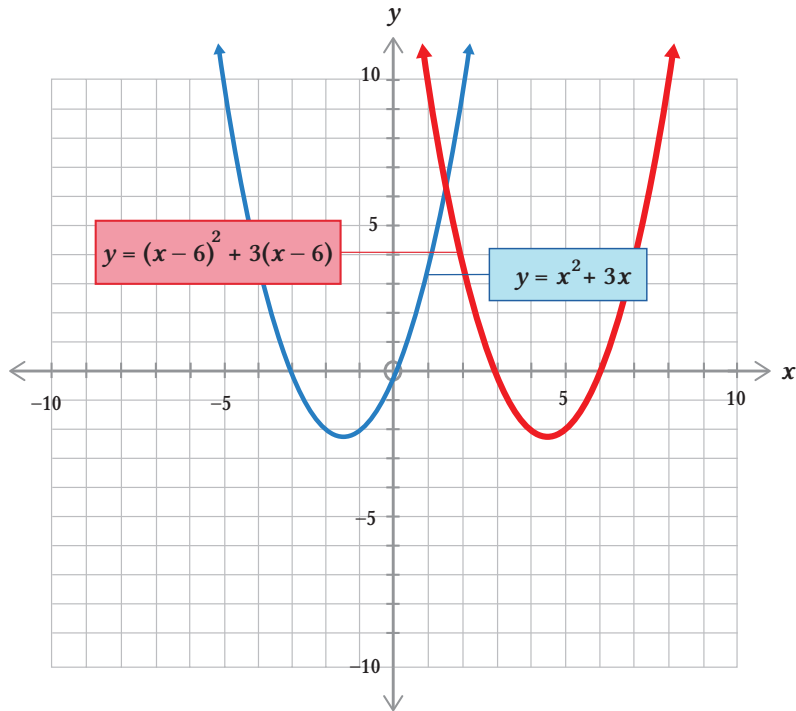
$$y = x^2 - 9x + 18$$

karena di geser sejauh 6 satuan

ke kanan,

maka $x' = x - 6$

Gambar grafik



Ayo Berpikir Kreatif

Translasi dari fungsi $f(x) = (x + 1)(x - 3)$ oleh $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ untuk $a = -3$ adalah ke kiri, sedangkan oleh $\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$ untuk $b = 2$ adalah ke atas. Tentukan nilai a dan b yang lain jika $f(x) = (x + 1)(x - 3)$ ditranslasi masing-masing ke bawah, ke kanan, ke atas, dan ke kiri.



Ayo Berpikir Kritis

Pak Ahmad menentukan hasil translasi dari fungsi eksponen $y = 2^x$ ke kanan sejauh 2 satuan menjadi $y = 2^{x-2}$ sehingga Pak Ahmad menyimpulkan bahwa definisi 1.2 pasti berlaku pada setiap fungsi eksponen seperti $y = 2^x$. Setujukah kalian dengan kesimpulan Pak Ahmad?



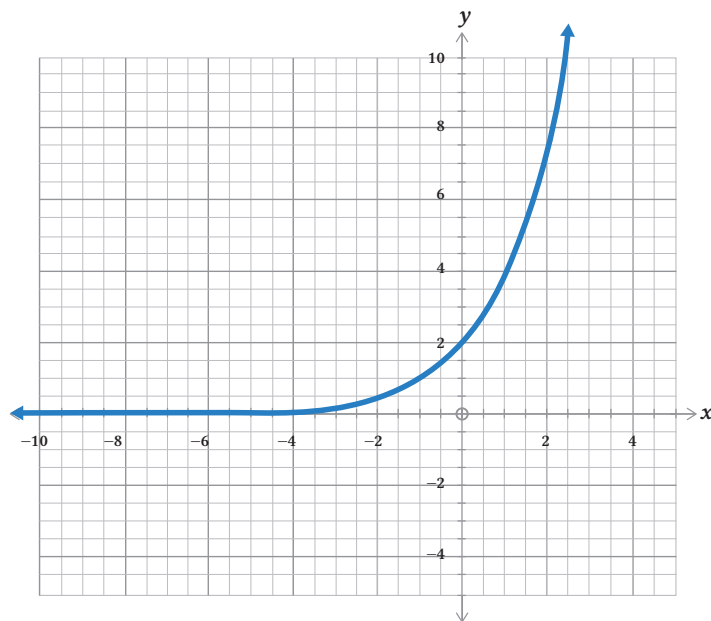
Ayo Berkomunikasi

Jika suatu fungsi $y = x - 2 + \frac{6}{x-2}$ adalah hasil translasi dari fungsi $y = x + \frac{6}{x}$ tentukan matriks transformasinya (gunakan gambar supaya lebih paham).

Diskusikan dengan temanmu dan sampaikan hasilnya kepada teman lain.

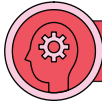
Latihan 1.1

1. Tentukan hasil translasi dari fungsi berikut.
 - a. $y = 2x^2$ yang ditranslasi oleh $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$
 - b. $y = 3x^2 - 2$ yang ditranslasi oleh $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
 - c. $y = \frac{2}{x}$ yang ditranslasi oleh $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$
2. Tentukan translasi dari transformasi berikut.
 - a. $y = x^2 + 3x - 4$ menjadi grafik $y = x^2 + 3x + 4$
 - b. $y = 3^x + 4$ menjadi grafik $y = 3^{x+2} + 6$
3. Diketahui grafik $y = f(x)$



Buatlah gambar grafik dari translasi berikut.

- $y = f(x) - 2$
 - $y = f(x + 3)$
 - $y = f(x - 1) + 4$
4. Tentukan bayangan dari fungsi $y = |x| + 2x$ yang ditranslasi oleh $\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ dalam beberapa alternatif penyelesaian.



Ayo Berpikir Kritis

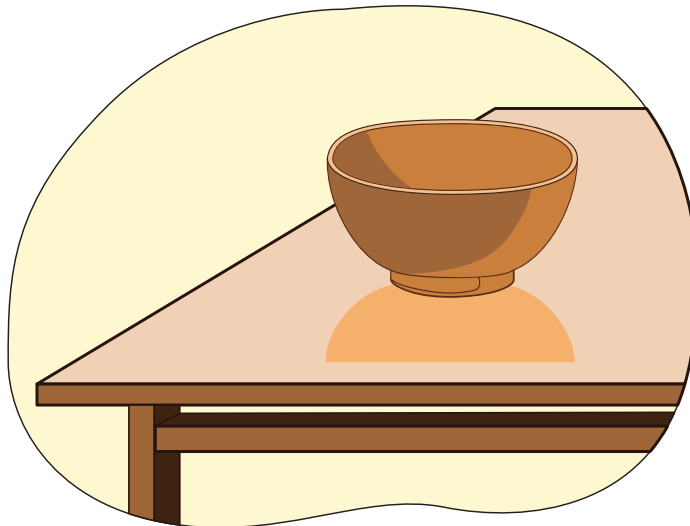
5. Hasil translasi dari suatu fungsi $y^2 = x$ yang mengalami pergeseran 2 satuan ke kanan ke arah sumbu x positif menjadi $y^2 = x - 2$. Berdasarkan definisi 1.1 dan definisi 1.2, berikan penjelasan kalian.

B. Refleksi



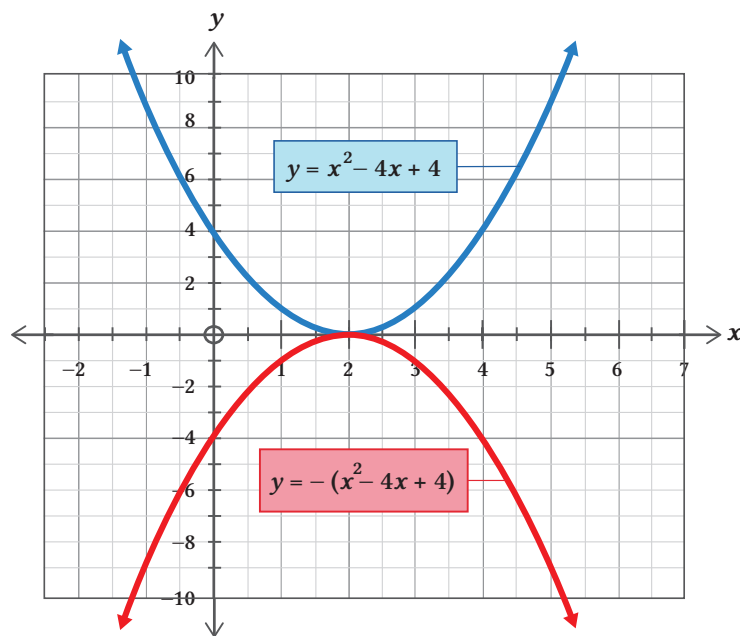
Ayo Bereksplorasi

Choirul adalah seorang penjual mangkuk yang akan mempromosikan barang jualannya. Dia meletakkan mangkuk tersebut untuk difoto di atas meja seperti gambar berikut.



Gambar 1.10 Mangkuk

Choirul melihat bahwa terdapat bayangan mangkuk yang dicerminkan oleh meja yang terbuat dari kaca, kemudian dia mengangkat dan menggeser mangkuk tersebut dan bayangannya ikut berpindah. Secara matematis, lengkungan pada mangkuk tersebut menyerupai grafik fungsi kuadrat. Jika digambarkan pada koordinat kartesius, maka akan tampak seperti gambar berikut.



Gambar 1.11 Refleksi Grafik Fungsi $y = x^2 - 4x + 4$ terhadap Sumbu x

Berdasarkan **Gambar 1.11** di atas, yang menjadi visualisasi mangkuk dan bayangannya pada meja dimisalkan sebagai sumbu x . Jika mangkuk dimisalkan grafik berwarna biru, maka selidikilah salah satu titik yang ada pada grafik biru, kemudian bandingkan titik pada grafik merah yang memiliki jarak sama dengan titik pada grafik biru. Apa yang kalian temukan?



Ayo Mengingat Kembali

Pada materi transformasi geometri kita mengenal pencerminan (refleksi) yaitu:

- jika titik $A(x, y)$ dicerminkan terhadap sumbu x , maka akan menghasilkan bayangan $A(x, -y)$;
- jika titik $A(x, y)$ dicerminkan terhadap sumbu y , maka akan menghasilkan bayangan $A(-x, y)$.

1. Refleksi Vertikal

Perhatikan **Gambar 1.8**. Grafik fungsi kuadrat yang ditunjukkan adalah $y = x^2 - 4x + 4$ dan $y = -(x^2 - 4x + 4)$. Kedua fungsi kuadrat tersebut memiliki kesamaan koordinat x ($x = x$), dan perbedaan koordinat y ($y = -y$) atau dapat dikatakan koordinat y lainnya berlawanan (negatif) dari sebelumnya sehingga grafik biru dan grafik merah memiliki kesamaan jarak vertikal dari sumbu x , hanya saja berada pada sisi yang berlawanan. Jadi, grafik $y = -(x^2 - 4x + 4)$ adalah hasil refleksi dari grafik $y = x^2 - 4x + 4$ terhadap sumbu x .

Petunjuk

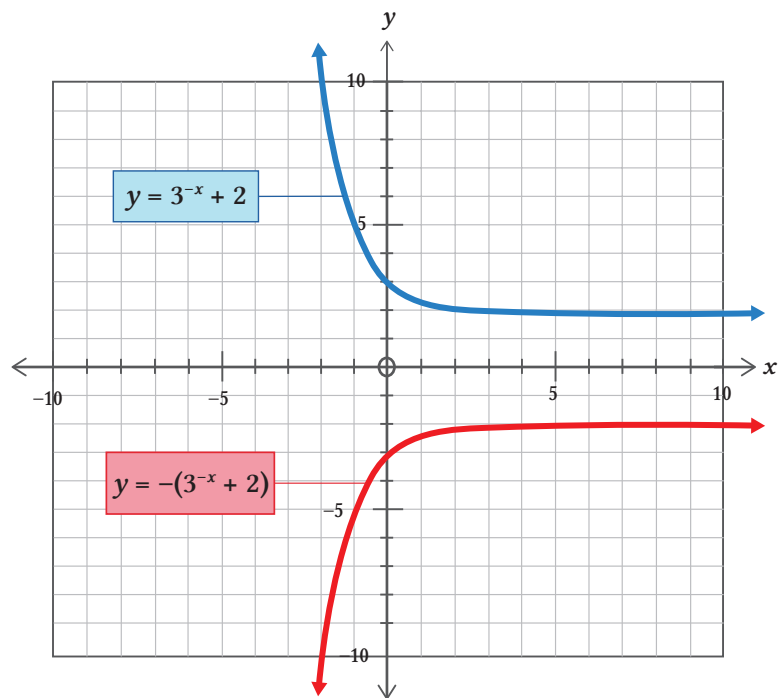
Secara matematis dirumuskan bahwa setiap titik pada grafik dengan koordinat

$$(x, y) \rightarrow (x, -y). \text{ Perlu diingat bahwa } y = f(x), \text{ maka}$$

$$(x, f(x)) \rightarrow (x, -f(x)).$$

Refleksi vertikal (refleksi terhadap sumbu x)

Terdapat dua grafik fungsi eksponen yang saling berlawanan seperti gambar di bawah ini.



Gambar 1.12 Refleksi Fungsi Eksponen $y = 3^{-x} + 2$ terhadap Sumbu x

Pada Gambar 1.9 grafik biru dan grafik merah memiliki jarak yang sama dari sumbu x , tetapi pada sisi yang berlawanan. Fungsi eksponen $y = -(3^{-x} + 2)$ pada gambar di atas merupakan hasil pencerminan terhadap sumbu x dari fungsi eksponen $y = 3^{-x} + 2$ sehingga grafik $y = -(3^{-x} + 2)$ adalah hasil refleksi dari grafik $y = 3^{-x} + 2$ terhadap sumbu x .

Definisi 1.3

Grafik $y = -f(x)$ adalah hasil refleksi dari $y = f(x)$ terhadap sumbu x .

Contoh Soal 1.5

Diketahui $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$, tentukan refleksi terhadap sumbu x .

Alternatif penyelesaian:

Diketahui:

$$y = 2x^2 - 5x + 3$$

Refleksi terhadap sumbu x

Menggunakan aturan: $y = f(x) \rightarrow y = -f(x)$, maka

$$y = -f(x)$$

$$y = -(2x^2 - 5x + 3)$$

$$y = -2x^2 + 5x - 3$$

Jadi, hasil refleksinya adalah $y = -2x^2 + 5x - 3$

Contoh Soal 1.6

Diketahui grafik fungsi kuadrat $y = f(x)$ yang memiliki titik minimum di $(5, -7)$. Tentukan koordinat titik dan apakah titik tersebut minimum atau maksimum berdasarkan $y = -f(x)$.

Alternatif penyelesaian:

Diketahui:

Titik $(5, -7)$

$y = -f(x)$ adalah hasil refleksi dari $y = f(x)$.

Jika pada titik (x, y) maka hasil translasinya $(x, -y)$

$(5, -7) \rightarrow (5, 7)$, jadi titiknya adalah $(5, 7)$

sehingga titik $(5, 7)$ merupakan titik maksimal.



Ayo Mencoba

$f(x) = (x + 1)(x - 2)$, gambarlah grafik berdasarkan fungsi berikut

a. $-f(x)$

b. $-f(x + 3)$

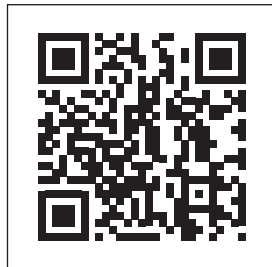
Petunjuk

1. Buka tautan <https://tinyurl.com/AyoMencoba1> untuk mempraktikkan kegiatan Ayo Mencoba.
2. Ketikkan fungsi yang sesuai berdasarkan soal.
3. Perhatikan gambar yang terbentuk.
4. Gambar dan letakkan hasil gambar pada Buku Tugas.



Ayo Menggunakan Teknologi

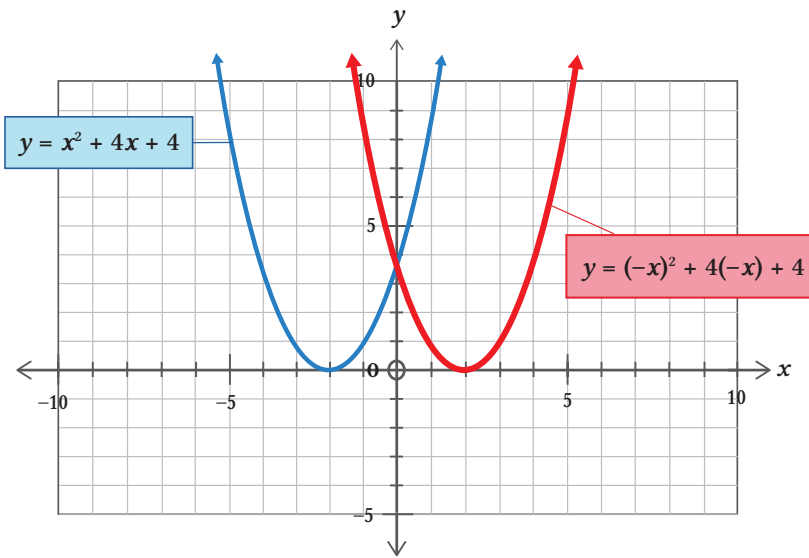
Kunjungi



<https://tinyurl.com/TransformasiFungsi1> dan atau <https://tinyurl.com/TransformasiFungsi2> untuk lebih memaksimalkan dalam pemahaman terkait gambar fungsi dan transformasi tersebut.

2. Refleksi Horizontal

Sekarang perhatikan fungsi kuadrat $y = x^2 + 4x + 4$ yang direfleksikan terhadap sumbu y dan menghasilkan fungsi $y = (-x)^2 + 4(-x) + 4$. Berikut ditunjukkan gambar grafiknya.



Gambar 1.13 Pencerminan Grafik Fungsi $y = x^2 + 4x + 4$ terhadap Sumbu y

Berdasarkan gambar 1.13 di atas, kita ketahui bahwa terdapat fungsi $y = x^2 + 4x + 4$ dan $y = (-x)^2 + 4(-x) + 4$ dengan ketinggian kurva sama ($y = y$). Selain itu, koordinat x memiliki jarak sama terhadap sumbu y ($x = -x$). Maksudnya adalah jika koordinat titik y sama, maka dapat dikatakan bahwa grafik berwarna merah mengalami perpindahan secara horizontal yang memiliki jarak sama dengan grafik berwarna biru dari sumbu y tetapi berada pada sisi yang berlawanan sehingga grafik $y = (-x)^2 + 4(-x) + 4$ merupakan hasil pencerminan dari grafik $y = x^2 - 4x + 4$ terhadap sumbu y .

Definisi 1.4

Grafik $y = f(-x)$ adalah hasil refleksi dari $y = f(x)$ terhadap sumbu y .



Ayo Berkomunikasi

Setiap grafik fungsi pasti memuat titik. Jika titik $P(-3, 5)$ dan titik $Q(-2, -8)$ terletak pada grafik fungsi $y = f(x)$, tentukan titik koordinat P dan Q setelah grafik tersebut mengalami transformasi berdasarkan:

- a. $f(-x)$ b. $-f(x)$ c. $f(-x + 1)$ d. $-f(x) + 5$

Diskusikan dengan temanmu dan komunikasikan hasilnya.

Contoh Soal 1.7

Tentukan refleksi dari $y = 2x^2 - 5x + 3$ terhadap

- sumbu x
- sumbu y

Alternatif penyelesaian:

Diketahui:

$$y = 2x^2 - 5x + 3$$

- Refleksi terhadap sumbu x

Menggunakan aturan: $y = f(x) \rightarrow y = -f(x)$, maka

$$y = -f(x)$$

$$y = -(2x^2 - 5x + 3)$$

$$y = -2x^2 + 5x - 3$$

Jadi, hasil refleksinya adalah $y = -2x^2 + 5x - 3$

- Refleksi terhadap sumbu y

Menggunakan aturan: $y = f(x) \rightarrow y = f(-x)$, maka

$$y = f(-x)$$

$$y = 2(-x)^2 - 5(-x) + 3$$

$$y = 2x^2 + 5x + 3$$

Jadi, hasil refleksinya adalah $y = 2x^2 + 5x + 3$

Contoh Soal 1.8

Diketahui grafik fungsi kuadrat $y = f(x)$ yang memiliki titik minimum di $(5, -7)$. Tentukan koordinat titik dan apakah titik tersebut minimum atau maksimum berdasarkan grafik berikut.

- $y = -f(x)$
- $y = f(-x)$

Alternatif penyelesaian:

Diketahui:

Titik $(5, -7)$

- a. $y = -f(x)$ adalah hasil refleksi dari $y = f(x)$, jika pada titik maka $(x, y) \rightarrow (x, -y)$.
 $(5, -7) \rightarrow (5, 7)$, jadi titiknya adalah $(5, 7)$
 sehingga titik $(5, 7)$ merupakan titik maksimum.
- b. $y = f(-x)$ adalah hasil refleksi dari $y = f(x)$, jika pada titik maka $(x, y) \rightarrow (-x, y)$.
 $(5, -7) \rightarrow (-5, -7)$, jadi titiknya adalah $(-5, -7)$
 sehingga titik $(5, 7)$ merupakan titik minimum.

Latihan 1.2

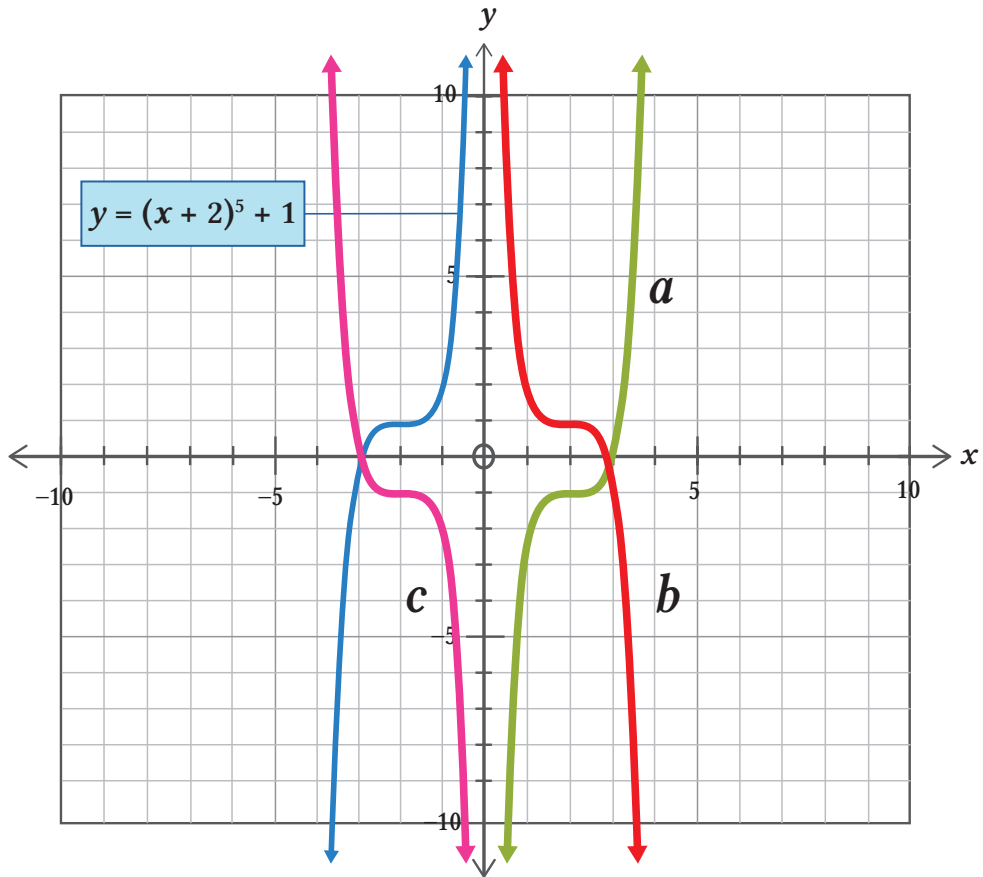
1. Jika $y = x^2 + 2x - 1$, tentukan fungsi yang dihasilkan dari
 - a. $y = -f(x)$
 - b. $y = -f(-x)$
2. Diketahui $f(x) = x(x + 1)(x - 2)$, gambarlah grafik fungsi berdasarkan
 - a. $1 + f(-x)$
 - b. $-f(x + 5)$



Ayo Berpikir Kreatif

3. Terdapat suatu grafik fungsi $y = (x + 2)^4 + 1$. Jika grafik fungsi tersebut direfleksikan secara horizontal dan vertikal, bagaimana prosedur menentukan hasil refleksinya? Tunjukkan prosedur yang bervariasi.
4. Tentukan persamaan grafik setelah diberikan transformasi berikut!
 - a. $y = 2x^4$ setelah direfleksikan terhadap sumbu x
 - b. $y = 2^{x+1} - 3$ setelah direfleksikan terhadap sumbu y
 - c. $y = 3^{-x} + 1$ setelah direfleksikan terhadap sumbu x

5. Diketahui suatu fungsi $y = f(x)$ seperti gambar di bawah ini.

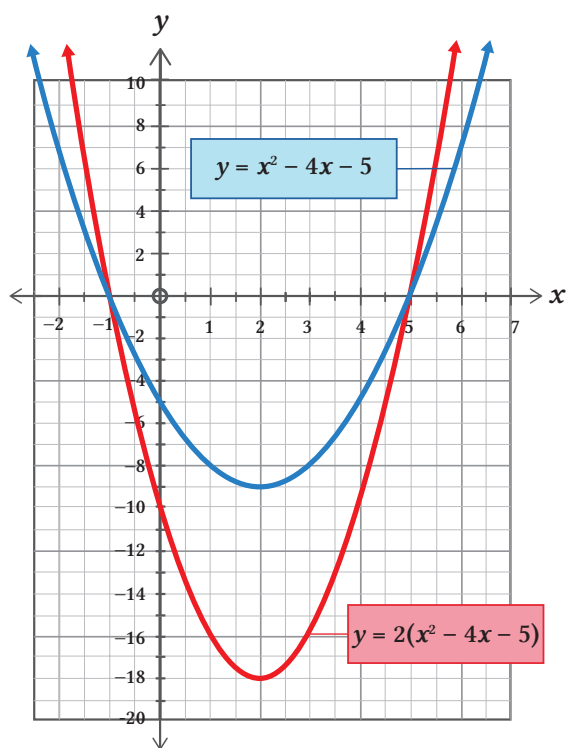


Tunjukkan fungsi yang ditunjukkan pada grafik a , b , dan c .

C. Dilatasi

1. Dilatasi Vertikal

Gambar berikut menunjukkan grafik dari dua fungsi kuadrat $y = x^2 - 4x - 5$ dan $y = 2(x^2 - 4x - 5)$.



Gambar 1.14 Dilatasi Fungsi $y = x^2 - 4x - 5$ terhadap Sumbu x

Jika koordinat x pada kedua grafik di atas sama ($x = x$), maka koordinat y pada grafik merah adalah dua kali dari koordinat y pada grafik biru ($y = 2y$). Hal ini menunjukkan bahwa grafik merah adalah dua kali lipat jarak dari grafik biru terhadap sumbu x sehingga grafik $y = 2(x^2 - 4x - 5)$ merupakan hasil dilatasi dari grafik $y = x^2 - 4x - 5$. Dengan kata lain, grafik biru tersebut didilatasi dengan faktor 2 (dua kali) sejajar sumbu y . Secara umum dinyatakan:

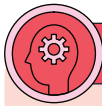
Definisi 1.5

Grafik $y = kf(x)$ adalah hasil dilatasi dari $y = f(x)$ dengan faktor k yang sejajar sumbu y

Pada $y = kf(x)$ berlaku:

- i. Jika $k > 1$, maka grafik $y = kf(x)$ adalah grafik $y = f(x)$ yang diperbesar secara vertikal dengan mengalikan setiap koordinat y dengan k .

- ii. Jika $0 < k < 1$, maka grafik $y = kf(x)$ adalah grafik $y = f(x)$ yang diperkecil secara vertikal dengan mengalikan setiap koordinat y dengan k .



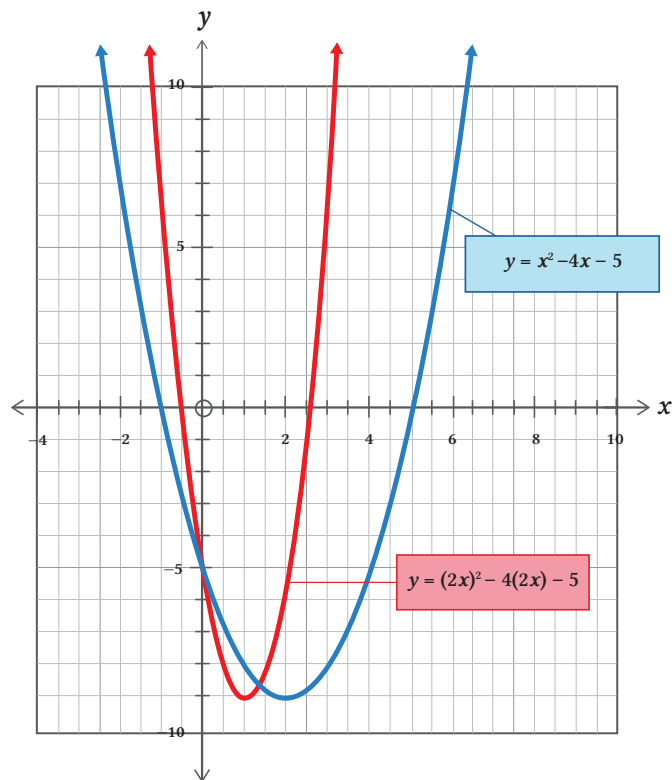
Ayo Berpikir Kritis

Grafik $y = 4x^3$ adalah hasil dilatasi dari $f(x) = 2$.

Jika k adalah konstanta untuk $k \leq 0$, setujukah kalian bentuk $y = kf(x)$ sebagai dilatasi dari $y = f(x)$?

2. Dilatasi Horizontal

Perhatikan **Gambar 1.15** di bawah ini.



Gambar 1.15 Dilatasi Fungsi $y = x^2 - 4x - 5$ terhadap Sumbu y

Pada gambar 1.15 di atas terdapat dua fungsi kuadrat $y = x^2 - 4x - 5$ dan $y = (2x)^2 - 4(2x) - 5$. Jika mengamati fungsi kuadrat yang kedua, maka kita memperoleh x pada fungsi kuadrat pertama diganti dengan $2x$. Kita ketahui bahwa kedua grafik tersebut terletak pada ketinggian yang sama ($y = y$), sedangkan $x = 2x$ atau ekuivalen dengan $x = \frac{1}{2}x$. Hal ini berarti, kedua grafik tersebut memiliki ketinggian yang sama atau koordinat sumbu y sama ketika grafik merah mengalami perpindahan secara horizontal terhadap sumbu y sehingga fungsi $y = x^2 - 4x - 5$ mengalami dilatasi dengan skala $\frac{1}{2}$ yang sejajar sumbu x dan menghasilkan fungsi $y = (2x)^2 - 4(2x) - 5$.

Definisi 1.6

Grafik $y = f(kx)$ adalah hasil dilatasi dari $y = f(x)$ dengan faktor k yang sejajar sumbu x

Pada $y = f(kx)$ berlaku:

- i. Jika $k > 1$, maka grafik $y = f(kx)$ adalah grafik $y = f(x)$ yang diperkecil secara horizontal dengan membagi setiap koordinat x dengan k .
- ii. Jika $0 < k < 1$, maka grafik $y = f(x)$ adalah grafik $y = f(x)$ yang diperbesar secara horizontal dengan membagi setiap koordinat x dengan k .

Contoh Soal 1.9

Diketahui fungsi kuadrat $f(x) = 16 - x^2$. Gambarlah grafik fungsi berikut berdasarkan $y = f(x)$!

- a. $y = f(2x)$
- b. $y = 4f(x)$

Alternatif penyelesaian:

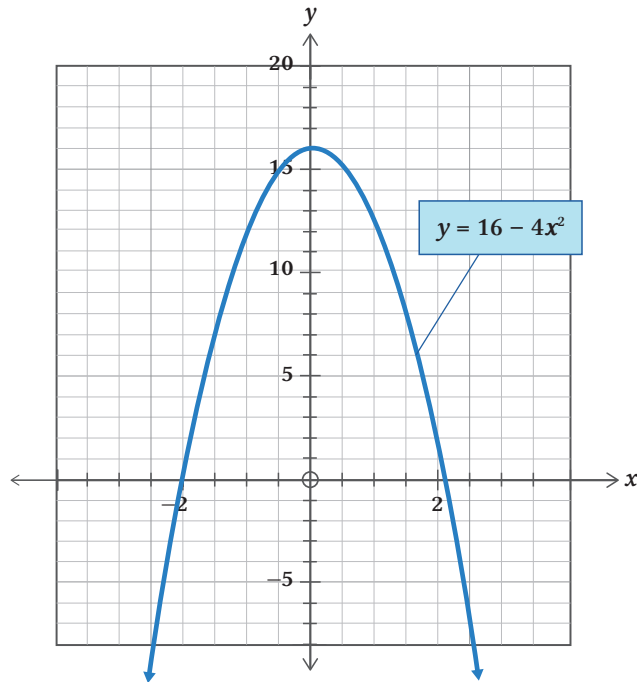
Diketahui:

$$f(x) = 16 - x^2$$

a. Untuk $y = f(2x)$, maka

$$y = 16 - (2x)^2$$

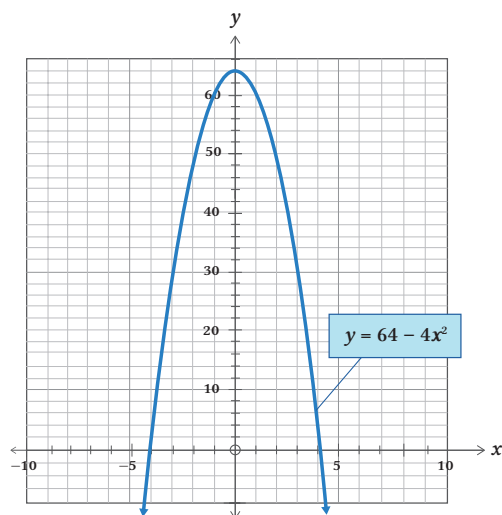
$$y = 16 - 4x^2$$



b. Untuk $y = 4f(x)$, maka

$$y = 4(16 - x^2)$$

$$y = 64 - 4x^2$$



Contoh Soal 1.10

Tentukan transformasi tunggal dari grafik $y = x^2 - 6x - 5$ menjadi grafik $y = 4x^2 - 6x - 5$.

Alternatif penyelesaian:

Diketahui:

$$y = x^2 - 6x - 5$$

menggunakan Definisi 1.6 pada $4x^2 - 6x - 5$

$$f(x) = x^2 - 6x - 5$$

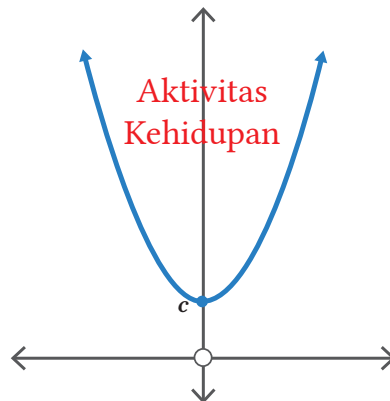
$$4x^2 - 6x - 5 = (2x)^2 - 3(2x) - 5$$

$$4x^2 - 6x - 5 = f(2x)$$

Jadi, transformasi yang digunakan adalah dilatasi yang sejajar sumbu x dengan skala $\frac{1}{2}$.

**Penguatan Karakter**

Ingatlah kembali grafik fungsi kuadrat dalam bentuk umum $f(x) = ax^2 + bx + c$. Jika nilai $a > 0$ (positif), maka gambar grafik akan selalu membuka ke atas. Hal tersebut dapat kita aplikasikan dalam prinsip kehidupan kita. Grafik yang selalu membuka ke atas dimisalkan suatu tempat atau wadah yang berisi hal-hal yang bersifat positif dan negatif (sumbu x dan sumbu y). Berkaitan dengan transformasi, ketika grafik tersebut mengalami translasi, refleksi, ataupun dilatasi selalu akan membuka ke atas, dengan catatan $a > 0$ (positif). Jadi bagaimanapun kondisinya, jika selalu berperilaku dan beraktivitas positif, maka kehidupan kita akan selalu positif juga dengan tetap berpedoman pada sumbu y (hubungan dengan Tuhan) secara vertikal. Akan berbeda jika mengalami refleksi dengan acuan adalah sumbu x (hubungan dengan manusia), maka grafik tersebut akan terbalik (arah berlawanan). Hal ini dimaksudkan bahwa dalam hidup di dunia ini hendaknya kita selalu menjaga dan memegang teguh hubungan dengan Tuhan dan berpedoman hanya kepada Tuhan

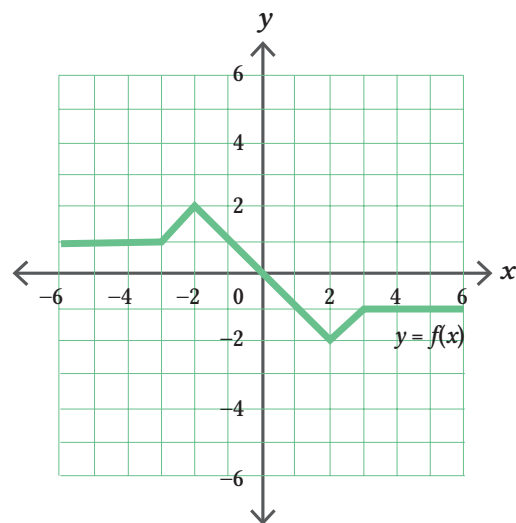


dengan kuat, selain juga meningkatkan hubungan dengan sesama manusia juga perlu meningkatkan hubungan dengan lingkungan sekitar. Perlunya menjaga dengan lingkungan sekitar agar terjaga stabilitas lingkungan yang seimbang, yang akhirnya dapat mengurangi kerusakan lingkungan yang dapat merugikan manusia itu sendiri, seperti terjadinya banjir, tanah longsor, kebakaran hutan, polusi udara, dan pengolahan limbah yang kurang maksimal.

Apakah kalian dapat memahami penerapan transformasi seperti di atas dalam kehidupan sehari-hari? Kalian juga bisa menemukan hal positif lain dalam menerapkan transformasi dalam kehidupan sehari-hari.

Latihan 1.3

- Diketahui $f(x) = x^3$. Tentukan hasil dilatasi dari fungsi berikut.
 - $y = 6f(x)$
 - $y = f(4x)$
- Diketahui suatu fungsi $y = f(x)$ yang ditunjukkan pada gambar di bawah ini.



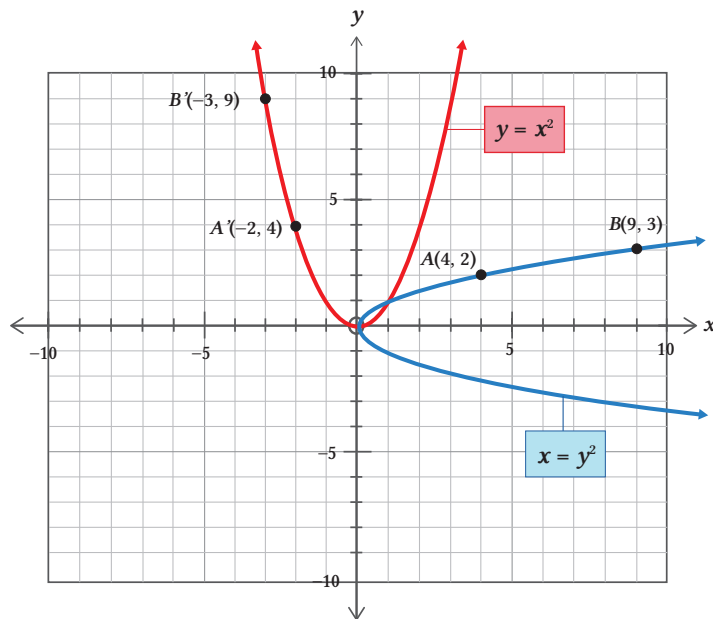
Gambarlah grafik lain berdasarkan fungsi berikut.

- $y = 3f(x)$
 - $y = f(2x)$
- Tentukan persamaan setiap grafik setelah diberikan transformasi.
 - $y = 3x^2$ setelah dilatasi sejajar sumbu y dengan skala 2

- b. $y = x^3 - 1$ setelah dilatasi sejajar sumbu y dengan skala 3
 c. $y = 4^x + 6$ setelah dilatasi sejajar sumbu y dengan skala $\frac{1}{2}$
4. Tunjukkan transformasi yang memetakan fungsi berikut.
- a. $y = x^2 + 2x - 5$ menjadi grafik $y = 4x^2 + 4x - 5$
 b. $y = x^2 - 3x + 2$ menjadi grafik $y = 3x^2 - 9x + 6$
 c. $y = 2x + 1$ menjadi grafik $y = 2^{x+1} + 2$

D. Rotasi

Pada Gambar 1.16 di bawah ini ditunjukkan suatu grafik fungsi kuadrat yang mengalami perputaran ke arah kanan.



Gambar 1.16 Grafik Fungsi Kuadrat $x = y^2$ dengan Perputaran 90°

Berdasarkan gambar di atas dapat kita perhatikan bahwa grafik berwarna biru merupakan grafik dari fungsi kuadrat $x = y^2$, dan grafik berwarna merah adalah grafik fungsi $y = x^2$. Jika titik $A(4, 2)$ dan titik $B(9, 3)$ berada pada grafik $x = y^2$, kemudian diputar sejauh 90° sehingga titik dan grafiknya berubah menjadi $A'(-2, 4)$ dan $B'(-3, 9)$ dan grafiknya adalah $y = x^2$. Maka dapat dituliskan bahwa titik $A(4, 2) = (x, y)$ dirotasikan sejauh 90° menjadi $A'(-2, 4) = (-y, x)$. Selanjutnya, grafik fungsi $x = y^2$ dirotasikan sejauh 90° menjadi $x = y^2$. Secara umum dituliskan:

Definisi 1.7

Jika koordinat titik semula $A(x, y)$ akan dirotasikan dengan besar sudut α terhadap pusat $(0, 0)$ akan menghasilkan bayangan

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Dengan catatan:

- Arah rotasi diputar searah jarum jam maka besar sudut rotasinya negatif $(-\alpha)$.
- Arah rotasi diputar berlawanan arah jarum jam maka besar sudut rotasinya positif (α) .

Contoh Soal 1.11

Diketahui fungsi eksponen $y = 2^{x+1}$. Jika fungsi eksponen tersebut dirotasi sejauh 90° searah jarum jam, tentukan hasil rotasi dan gambar grafiknya.

Alternatif penyelesaian:

Diketahui:

$$y = 2^{x+1}$$

$$\alpha = 90^\circ$$

Karena arah rotasi searah jarum jam, jadi sudut rotasinya negatif.

Menggunakan Definisi 1.7, maka

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos -90^\circ & -\sin -90^\circ \\ \sin -90^\circ & \cos -90^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

sehingga

$$x' = 0, x + y, y = x'$$

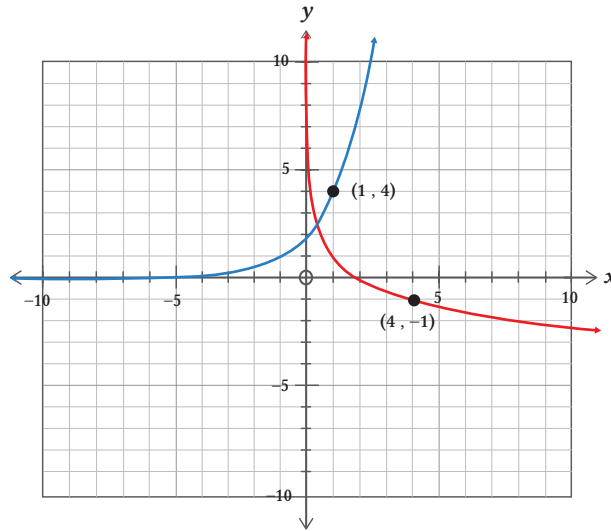
$$y' = -x + 0, x = -y'$$

Dengan demikian,

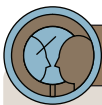
$y = 2^{x+1}$. . . substitusi $y = x'$, $x = y'$

$$x' = 2^{-y'+1}$$

$x' = 2^{-y'+1}$, hasil rotasinya adalah $x = 2^{-(y-1)}$



E. Kombinasi Transformasi Fungsi



Ayo Berefleksi

Transformasi fungsi $y = f(x)$ secara menyeluruh dalam penjelasan sebelumnya dikategorikan menjadi transformasi vertikal dan transformasi horizontal. Lebih jelasnya dapat dilihat pada tabel rangkuman di bawah ini.

Tabel 1.1 Rangkuman Transformasi Fungsi

Lengkapi bagian yang masih kosong.

Jika fungsi $y = f(x)$ ditransformasikan, maka hasilnya adalah

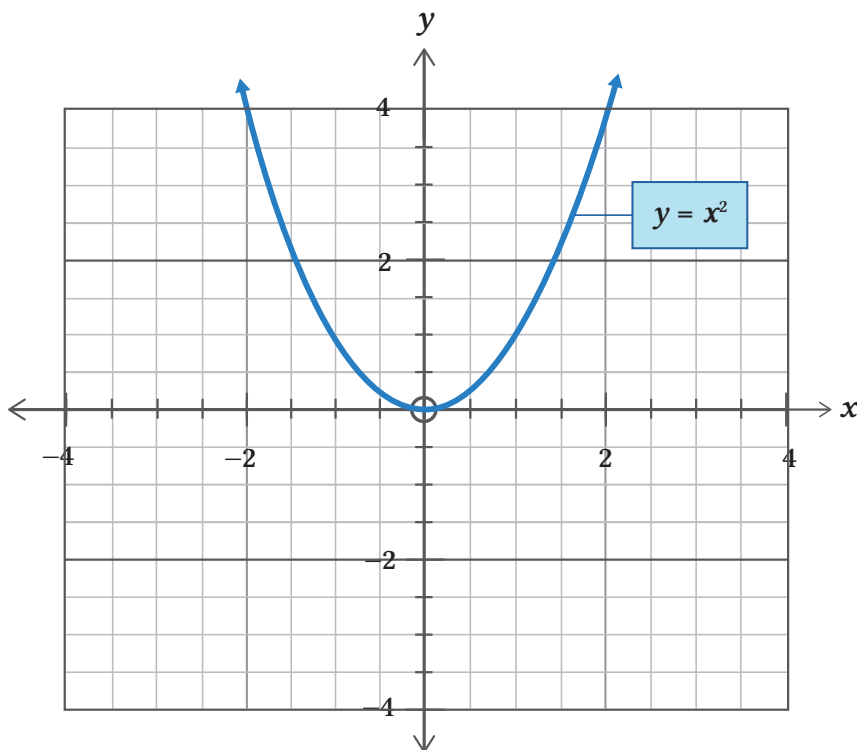
Transformasi Vertikal		Transformasi Horizontal	
Fungsi	Keterangan	Fungsi	Keterangan
$y = f(x) + b$	Translasi oleh $\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$

Transformasi Vertikal		Transformasi Horizontal	
.....	$y = f(-x)$	Refleksi terhadap sumbu y
.....	Dilatasi vertikal dengan skala k	Dilatasi horizontal dengan skala $\frac{1}{k}$



Ayo Bereksplorasi

Diketahui suatu fungsi kuadrat $y = x^2$ dengan gambar sebagai berikut.



Gambar 1.17 Grafik Fungsi Kuadrat $y = x^2$

Pada gambar di atas ditunjukkan bahwa $y = f(x) = x^2$.

Analisislah fungsi tersebut dan tentukan hasilnya berdasarkan beberapa pernyataan berikut.

1. Kombinasi dua transformasi vertikal
Translasikan $f(x)$ dengan $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, kemudian dilatasikan sejajar sumbu y dengan skala $\frac{1}{2}$.
2. Kombinasi satu transformasi vertikal dan satu transformasi horizontal.
Refleksikan $f(x)$ terhadap sumbu x , dilanjutkan translasi oleh $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.
3. Kombinasi dua transformasi horizontal
Dilatasikan $f(x)$ sejajar sumbu x dengan skala 2, kemudian dilatasikan dengan $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.



Ayo Menggunakan Teknologi

Kunjungi



<https://tinyurl.com/AyoMenggunakanTeknologi> untuk menggunakan aplikasi Geogebra dalam mengerjakan kegiatan Ayo Bereksplorasi sebelumnya.

Petunjuk

1. Kunjungi tautan di atas untuk mengerjakan kegiatan Ayo Bereksplorasi sebelumnya.
2. Kerjakan kegiatan tersebut menggunakan definisi sebelumnya dengan baik untuk menemukan hasil transformasi yang sesuai.
3. Tuliskan fungsi hasil transformasi yang telah ditemukan pada tautan <https://tinyurl.com/AyoMenggunakanTeknologi> untuk menentukan grafik hasil transformasinya.

Setelah menyelesaikan kegiatan Ayo Menggunakan Teknologi, sampaikan temuanmu dan jelaskan kepada teman yang lain.



Tahukah Kalian

- Jika dua transformasi vertikal atau dua transformasi horizontal dikombinasikan, maka urutan pengerjaan yang diterapkan akan memengaruhi hasil transformasinya.
- Jika satu transformasi vertikal dan satu transformasi horizontal dikombinasikan, maka urutan pengerjaan yang diterapkan tidak akan memengaruhi hasil transformasinya.



Ayo Mengerjakan Proyek

Perhatikan lengkungan pada jembatan di bawah ini.



Gambar 1.18 Lengkungan Jembatan sebagai Penerapan Fungsi Kuadrat

Jika lengkungan jembatan tersebut kita misalkan suatu fungsi kuadrat $y = -x^2$, maka tentukan minimal 2 bentuk grafik fungsi tersebut dengan koordinat yang berbeda, selanjutnya transformasikan gambar grafik tersebut sesuai dengan aturan berikut.

1. Gambarlah grafik fungsi kuadrat tersebut.
2. Selanjutnya, tentukan hasil translasi oleh $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ dari grafik tersebut.
3. Kemudian refleksikan terhadap sumbu horizontal.
4. Dari hasil grafik pada no. 3, lanjutkan dilatasi dengan skala 3 sejajar sumbu x .
5. Kemudian rotasikan sejauh 90° dengan pusat $(0, 0)$.

Tempelkan gambar hasil akhir dari transformasi tersebut beserta prosedurnya ke dalam lembar proyek.



Ayo Berkomunikasi

Hasil akhir dari transformasi yang sudah diselesaikan pada kegiatan Ayo Mengerjakan Proyek selanjutnya diskusikan dengan temanmu terkait hasil temuanmu, kemudian presentasikan temuan kalian kepada teman yang lain.

Contoh Soal 1.12

Diberikan fungsi kuadrat $y = x^2$. Tentukan hasil akhir translasi setelah diterapkan kombinasi transformasi berikut:

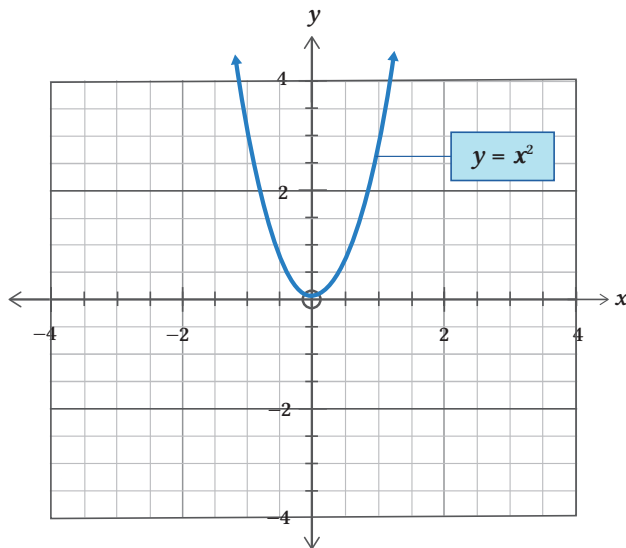
1. dilatasi yang sejajar sumbu y dengan skala 3, dilanjutkan translasi oleh $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
2. translasi oleh $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, kemudian refleksi terhadap sumbu y .

Alternatif penyelesaian:

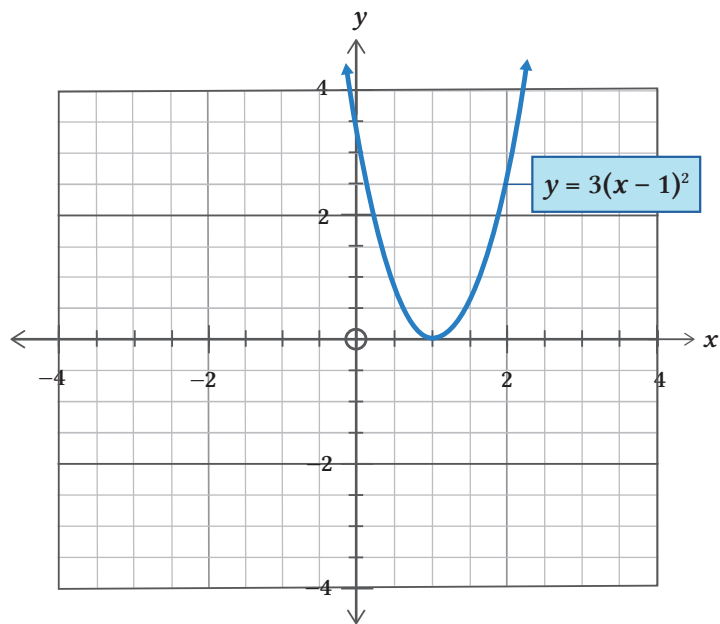
Diketahui:

$$y = x^2$$

1. Dilatasi sejajar sumbu y dengan skala 3

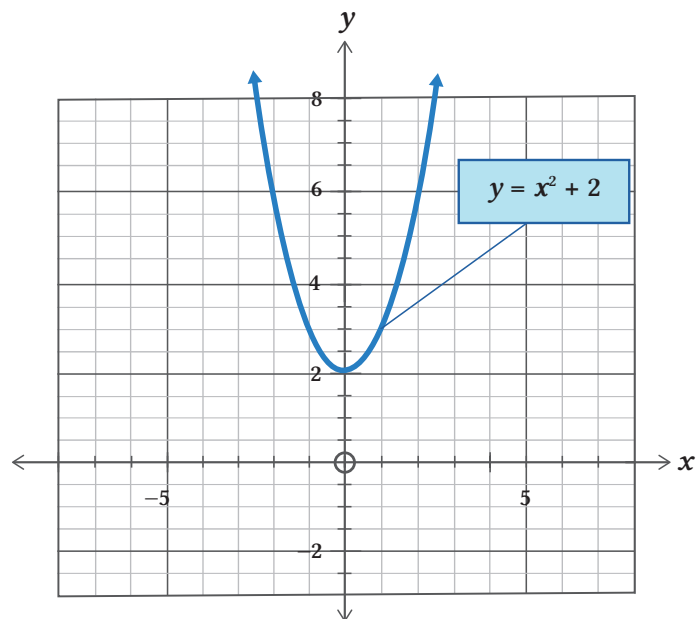


Translasi oleh $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

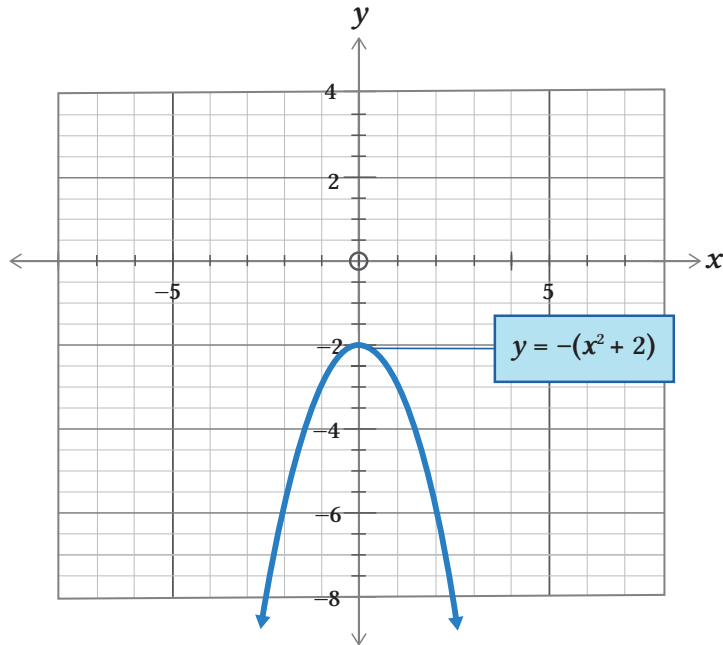


Jadi hasil transformasinya adalah $y = 3(x - 1)^2$.

2. Translasi oleh $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$



Refleksi terhadap sumbu y

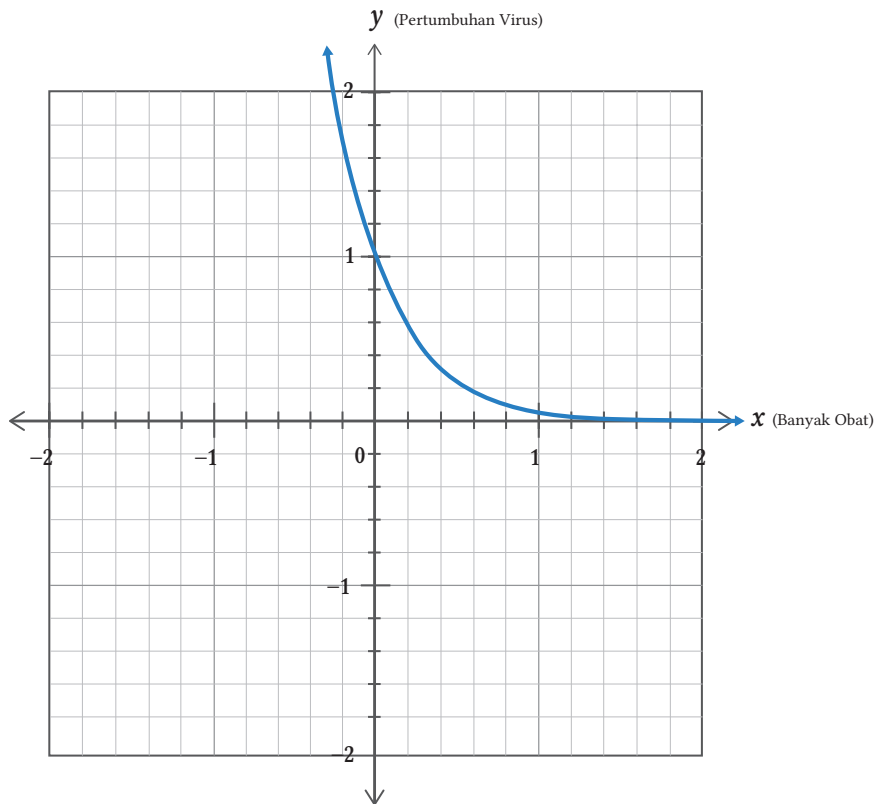


Jadi, hasil transformasinya adalah $y = -(x^2 + 2)$.

Latihan 1.4

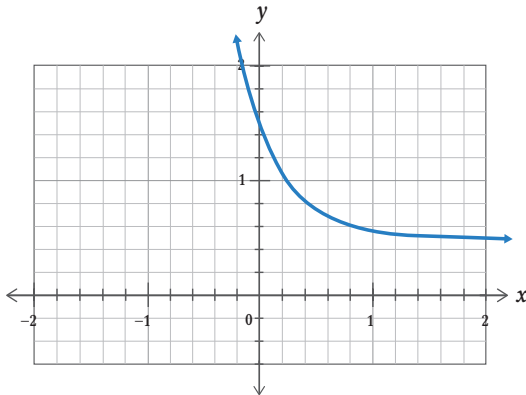
1. Diketahui $f(x) = x^2 + 1$, tentukan hasil transformasi dari $y = f(x)$ berdasarkan kombinasi transformasi berikut.
 - a. Translasi oleh $\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$, kemudian dilatasi sejajar sumbu y dengan skala 3
 - b. Translasi oleh $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, kemudian refleksi terhadap sumbu x
2. Tentukan urutan transformasi yang memetakan
 - a. grafik $y = x^3$ menjadi grafik $y = \frac{1}{2}(x + 5)^3$
 - b. grafik $y = x^3$ menjadi grafik $y = -\frac{1}{2}(x + 1)^3 - 2$
3. Diketahui $f(x) = \sqrt{x}$, tentukan hasil transformasi dari $y = f(x)$ berdasarkan kombinasi transformasi berikut.
 - a. Refleksi terhadap sumbu x , dilanjutkan translasi oleh $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, kemudian translasi oleh $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, dilanjutkan dilatasi sejajar sumbu x dengan skala 2

- b. Translasi oleh $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, dilanjutkan dilatasi sejajar sumbu x dengan skala 2, kemudian refleksi terhadap sumbu x , dilanjutkan translasi oleh $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
4. Seekor sapi terinfeksi virus yang sangat mematikan. Setelah diperiksa oleh dokter hewan terdapat 500 virus. Untuk menyelamatkan sapi tersebut, dokter hewan menyuntikkan obat supaya virus tersebut berkurang dan mati. Hasil pemeriksaan setelah diberikan obat dimodelkan dalam bentuk grafik fungsi eksponen $f(x) = 2^{(-x)}$ yang ditunjukkan pada gambar berikut.

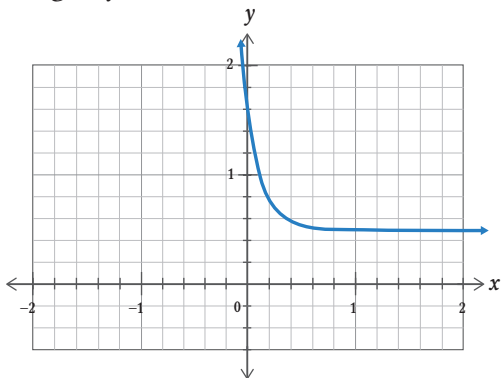


Jika dokter hewan memberikan beberapa tipe obat untuk menghilangkan virus, maka model matematika dalam pemberian obat ditunjukkan oleh beberapa gambar berikut.

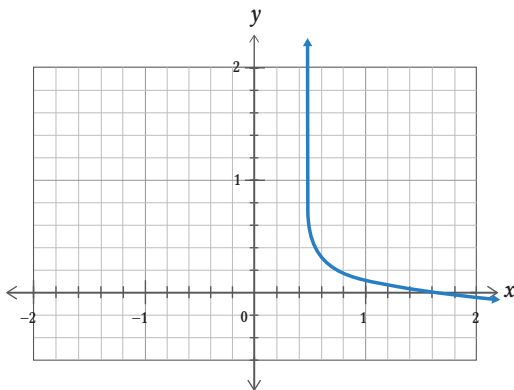
- a. Pemberian obat tipe A oleh dokter hewan menghasilkan perubahan pada pertumbuhan virus seperti gambar di bawah ini. Tentukan fungsinya?



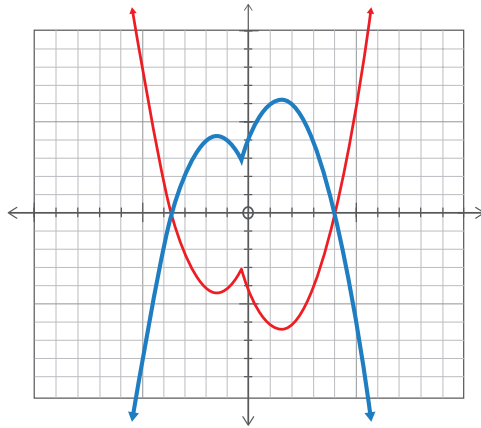
- b. Pemberian obat tipe B oleh dokter hewan menghasilkan perubahan pada pertumbuhan virus seperti gambar di bawah ini. Tentukan fungsinya?



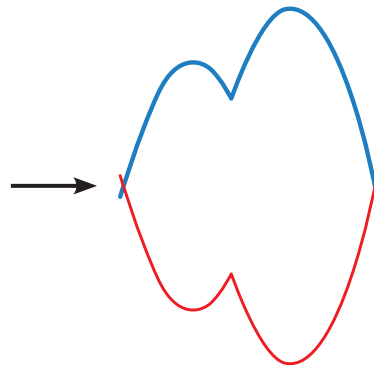
- c. Pemberian obat tipe C oleh dokter hewan menghasilkan perubahan pada pertumbuhan virus seperti gambar di bawah ini. Tentukan fungsinya?



5. Doni akan membuat cetakan kue. Cetakan kue tersebut mula-mula digambar oleh Doni pada koordinat kartesius supaya bentuknya simetris dan beraturan. Berikut gambar yang direncanakan oleh Doni.



Gambar a



Gambar b

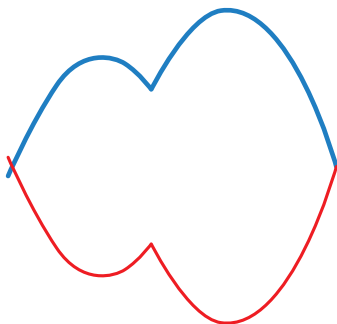
Gambar a merupakan sketsa gambar cetakan kue yang terbentuk dari dua buah grafik yang saling berpotongan. Jika grafik yang berwarna biru merupakan fungsi semula $y = -(x^2 - 3) + |3x + 1|$, apa yang kalian lakukan terhadap grafik tersebut supaya membentuk cetakan kue seperti gambar di atas?



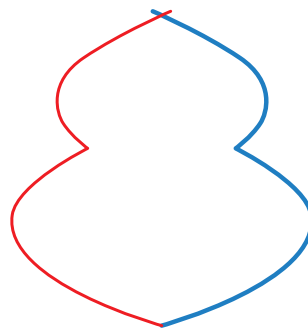
Ayo Berpikir Kreatif

Berdasarkan Gambar a di atas, jika kedua fungsi tersebut disatukan (menjadi suatu bangun), jelaskan transformasi yang sesuai jika gambar grafik fungsi tersebut menjadi seperti gambar berikut.

a.



b.





Uji Kompetensi 1

1. Jika titik puncak suatu parabola $y = g(x)$ adalah $(2, -4)$, tentukan titik puncak yang lain pada parabola berdasarkan fungsi berikut.
 - a. $y = g(x - 3)$
 - b. $y = g(x) - 4$
 - c. $y = -g(x)$
 - d. $y = g(3x)$
 - e. $y = 3g(x)$
2. Diberikan $g(x) = 3^x$, sketsalah setiap kurva berikut ini.
 - a. $g(x - 1) - 4$
 - b. $g\left(\frac{1}{2}x + 2\right) + 3$
 - c. $\frac{1}{3}g(-x) + 4$
 - d. $3g(x) - 1$
3. Diketahui fungsi $f(x) = -x^2$, $x \in \mathbb{R}$ dan $g(x) = x^2 + 2x + 8$, $x \in \mathbb{R}$
 - a. Tentukan $g(x)$ dalam bentuk $(x + a)^2 + b$, di mana a dan b adalah konstanta.
 - b. Jelaskan dua transformasi dengan urutan sesuai yang digunakan dalam transformasinya sehingga $g(x)$ adalah hasil transformasi dari $f(x)$.
4. Diketahui $f(x) = 2^{x+1} - 4$. Tentukan $g(x)$ sebagai hasil dari $f(x)$ setelah mengalami transformasi berikut:
 - a. translasi oleh $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, dilanjutkan dilatasi vertikal dengan skala 3,
 - b. translasi oleh $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$, dilanjutkan dilatasi vertikal dengan skala $\frac{1}{2}$,
 - c. refleksi terhadap sumbu horizontal, kemudian ditranslasi oleh $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$,
 - d. refleksi terhadap sumbu horizontal, dilanjutkan dilatasi vertikal dengan skala $\frac{1}{2}$, kemudian ditranslasi oleh $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$,
 - e. refleksi terhadap sumbu horizontal, kemudian ditranslasi oleh $\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix}$ selanjutnya dilatasi vertikal dengan skala $\frac{3}{2}$.

5. Fungsi $f(x) = ax + b$ ditransformasikan dengan translasi oleh $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, kemudian direfleksi terhadap sumbu y , dilanjutkan dilatasi horizontal dengan skala $\frac{1}{3}$. Jika hasil transformasinya adalah $g(x) = 4 - 15x$, tentukan nilai a dan b .
6. Fungsi $f(x) = ax^2 + bx + c$ ditransformasikan melalui:
- refleksi terhadap sumbu x ,
 - translasi oleh $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$,
 - dilatasi horizontal dengan skala 2.

Jika hasil transformasinya adalah $g(x) = 4x^2 + ax - 6$, tentukan nilai a , b , dan c .



“

Matematika murni, dengan caranya merupakan puisi
dari ide-ide logis.

Albert Einstein

”

Busur dan Juring Lingkaran



Tujuan Pembelajaran

1. Memahami ciri-ciri elemen lingkaran berupa ruas garis atau kurva lengkung: busur, tali busur, jari-jari, diameter, apotema, juring, dan tembereng
2. Menganalisis hubungan antara elemen-elemen lingkaran
3. Menentukan rumus panjang busur suatu lingkaran
4. Menentukan rumus luas juring suatu lingkaran
5. Mengeksplorasi hubungan sudut pusat lingkaran dengan panjang busurnya
6. Mengeksplorasi hubungan sudut pusat lingkaran dengan luas juringnya
7. Mengeksplorasi hubungan sudut pusat lingkaran, panjang busur, dan luas juringnya

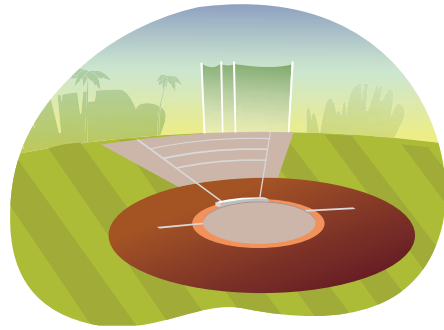
Tolak peluru adalah salah satu nomor yang terdapat dalam nomor lempar pada cabang atletik bersama dengan lempar cakram, lempar palu, dan lempar lembing. Permainan tolak peluru tidak luput dari bentuk lapangannya yang berbentuk lingkaran, mulai dari garis tengah atau diameter lingkaran, arah tolak peluru, dan daerah sektor (juring) tolak peluru.

Gambar 2.1 adalah bentuk lapangan olahraga tolak peluru, sedangkan Gambar 2.2 adalah ilustrasi bentuk lapangan olahraga tolak peluru.

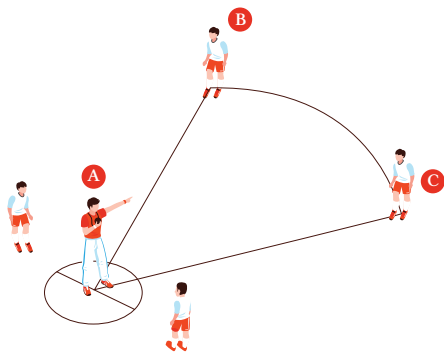
Apabila kalian amati dengan cermat Gambar 2.2 di bagian lingkaran pada anak dengan pusat A, maka gambar lapangan tolak peluru tersebut akan seperti pada Gambar 2.3 berikut ini.

Perhatikan Gambar 2.3 di samping. Dapatkah kalian menghitung berapa panjang garis lengkung yang dibentuk oleh sudut 45° ? Kemudian, coba kalian amati dengan cermat Gambar 2.2, titik A yang terbentuk sama persis seperti pada Gambar 3. Apabila jarak anak pada titik A dengan anak pada titik B sepanjang 100 m, maka dapatkah kalian menghitung panjang garis lengkung anak pada titik B dengan anak pada titik C?

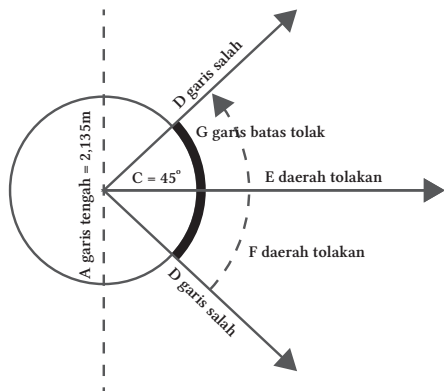
Agar kalian bisa memecahkan masalah tersebut, kalian harus memahami konsep keliling lingkaran, luas lingkaran, besar sudut pusat, panjang busur, dan luas juring lingkaran.



Gambar 2.1 Lapangan Olahraga Tolak Peluru



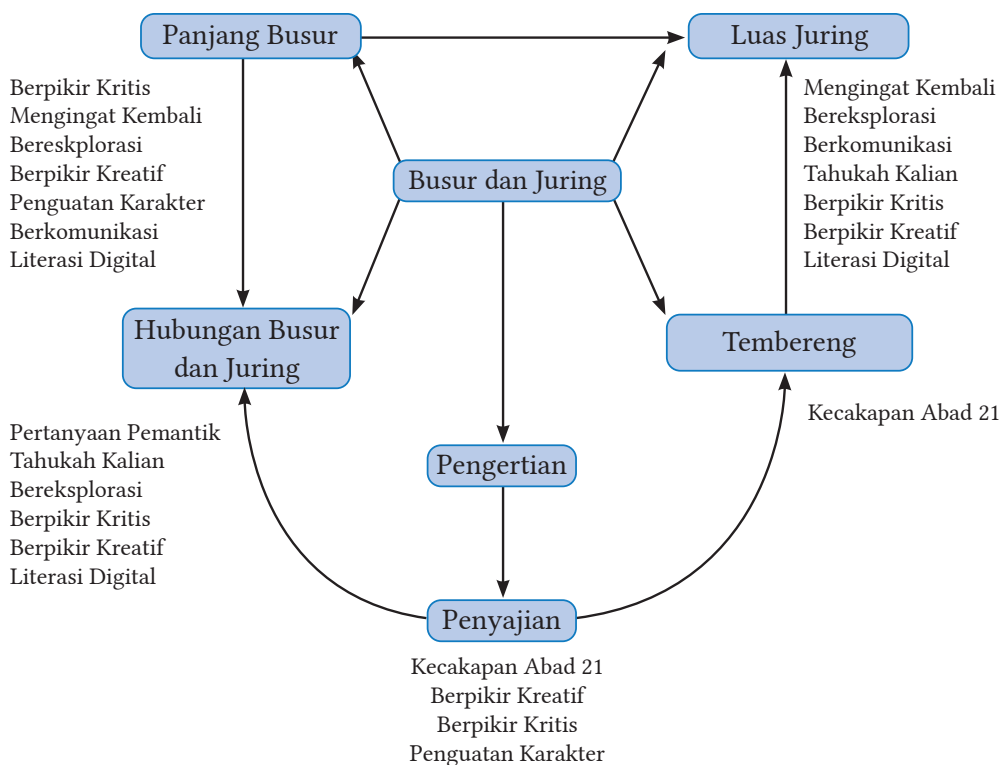
Gambar 2.2 Bentuk Lapangan Olahraga Tolak Peluru



Gambar 2.3 Ilustrasi Lapangan Tolak Peluru

Kata Kunci	Pertanyaan Pemantik
Lingkaran Busur Juring Tembereng	<ol style="list-style-type: none"> 1. Bagaimana hubungan besar sudut pusat lingkaran dengan panjang busurnya? 2. Bagaimana hubungan besar sudut pusat lingkaran dengan luas juringnya? 3. Apakah makin besar sudut pusat lingkaran, makin panjang busur di depan sudut pusat itu? 4. Apakah makin besar sudut pusat lingkaran, makin besar juga luas juring di depan sudut pusat itu? 5. Bagaimana hubungan besar sudut pusat lingkaran, panjang busur, dan luas juringnya?

Peta Konsep



A. Busur Lingkaran

Gambar 2.4 di samping merupakan salah satu contoh aplikasi busur lingkaran dalam bidang pembangunan jembatan lengkung yang banyak digunakan di beberapa negara dan di dalam negeri. Untuk menentukan panjang busur yang melengkung berbentuk busur lingkaran, maka perlu dihitung dengan cermat berapa panjang diameter dan sudut pusat lingkaran.



Gambar 2.4 Jembatan Lengkung Tol Kalikutho Kendal

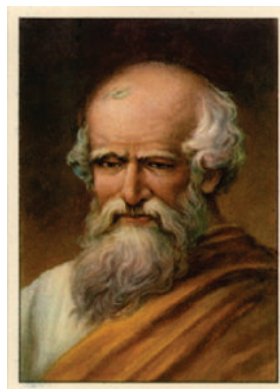


Tahukah Kalian

Sejarah Nilai π (pi)

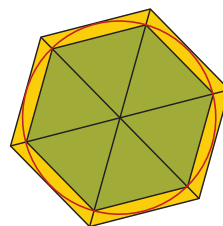
Mungkin kalian pernah bertanya-tanya, "mengapa rumusnya diatur sedemikian rupa?" atau "dari mana rumus itu berasal?" Ada konstanta yang ditentukan dalam kedua formulasi, yaitu π (pi). Apakah kalian tahu dari mana angka pi berasal? Pada materi kali ini, kalian akan belajar tentang asal-usul bilangan π , menemukan rumus untuk menghitung keliling lingkaran dan luas lingkaran. Bilangan π merupakan salah satu dari banyak bilangan yang dikenal sejak zaman kuno. Bilangan π ini menunjukkan rasio keliling dengan diameter lingkaran.

Orang-orang kuno tertentu menggunakan angka 3 sebagai bilangan π . Angka 3 tersebut masih jauh dari akurat, tetapi lebih mudah digunakan dalam menghitung sesuai yang terkait. Sementara itu, orang Babilonia telah menggunakan angka $3 + \frac{1}{8}$ ini karena lebih akurat. Bangsa Mesir kuno yang diperkirakan hidup sekitar tahun 1650 SM, kemudian menggunakan nilai π yaitu $4 \times \frac{8}{9} \times \frac{8}{9}$.



Gambar 2.5 Archymedes

Sumber: camphalfblood.wikia.com



Gambar 2.6 Segi enam

Kemudian, sekitar 250 SM, Archimedes, seorang ahli matematika Yunani yang hebat, menggunakan poligon untuk membantunya menghitung nilai yang terletak antara $\frac{223}{71}$ dan $\frac{22}{7}$.

Bilangan π penemuan Archimedes ini lebih tepat daripada penemuan seorang matematikawan bernama Zu Chungzhi pada tahun 50 SM. Nilai ini adalah $\frac{355}{113}$, dan unit desimal π seperti yang saat ini digunakan. Al Kashi, seorang matematikawan Persia, menentukan nilai π hingga 16 angka desimal pada tahun 1400. Dengan menggunakan teknik Archimedes, ia mengalikan sisi-sisinya sebanyak dua puluh tiga kali.

Pada tahun 1700, William Jones, seorang ahli matematika Inggris, menciptakan simbol saat ini untuk "pi". Simbol " π " dipilih karena bunyinya dalam bahasa Yunani mirip dengan huruf "p", yang berarti keliling (keliling lingkaran). Dengan adanya kemajuan teknologi, akhirnya nilai π ditemukan lebih dari satu triliunan digit di belakang tanda koma.

Nilai konstanta yang telah diketahui saat ini adalah perbandingan panjang keliling lingkaran dengan diameter. Dapat ditulis dengan simbol $\frac{K}{d} = \pi$.



Ayo Mengerjakan Projek 2.1

Bagaimana cara memperoleh nilai π ?

1. Carilah 10 macam benda yang berbentuk lingkaran, misalnya uang logam, tutup gelas, kaleng, dan lain sebagainya.
2. Ukurlah benda tersebut menggunakan pita pengukur atau lilitkan seutas benang pada keliling benda tersebut atau dengan cara menggelindingkan benda yang berbentuk lingkaran, yang telah ditandai tepinya (misalkan titik A) menyentuh meja sampai titik A menyentuh kembali. Catatlah ukurannya pada tabel keliling (K).
3. Jiplaklah benda yang berbentuk lingkaran di atas kertas, kemudian kertas digunting sepanjang kelilingnya. Lipatlah kertas menjadi dua sama besar (kongruen), ukur diameternya. Catatlah ukurannya pada tabel diameter (d).

4. Hitunglah nilai dari perbandingan $\frac{K}{d}$ dengan penulisan untuk masing-masing benda sampai angka seperseratusan terdekat. Tulislah hasil perhitungannya pada kolom tabel berikut ini.

No.	Nama Benda	Keliling (K)	Diameter (d)	$\frac{K}{d}$
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				
7.				
8.				
9.				
10.				

5. Berdasarkan tabel di atas, tentukan nilai rata-rata dari hasil (untuk selanjutnya disebut dengan π).
6. Kesimpulannya adalah



Ayo Mengingat Kembali

Ciri-ciri elemen lingkaran yang terkait dengan busur, tali, dan sudut pusat lingkaran

BUSUR

Ciri-ciri

- ✓ Berupa garis lengkung yang berbentuk kurva
- ✓ Garis lengkung yang berhimpit dengan lingkaran
- ✓ Apabila panjang garis lengkungnya kurang dari setengah keliling lingkaran (besar sudut pusat $< 180^\circ$), maka disebut dengan busur minor.

- ✓ Apabila panjang garis lengkungnya lebih dari setengah keliling lingkaran (besar sudut pusat $> 180^\circ$), maka disebut dengan busur mayor.
- ✓ Apabila panjang garis lengkungnya sama dengan setengah keliling lingkaran (besar sudut pusat $= 180^\circ$), maka disebut dengan setengah lingkaran.

Jika tidak ada indikasi busur mayor atau busur minor, maka untuk selanjutnya disebut dengan busur minor.

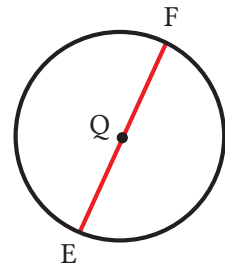
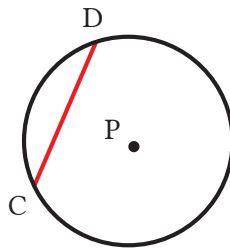
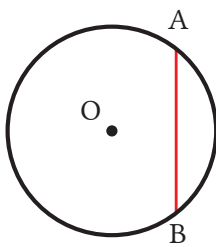
Penulisan simbol busur: \widehat{AB} , \widehat{CD} , \widehat{EF}

TALI BUSUR

Ciri-ciri

- ✓ Berbentuk ruas garis
- ✓ Ruas garis yang dihubungkan oleh dua titik pada lingkaran

Penulisan simbol tali busur: \overline{AB} , \overline{CD} , dan \overline{EF}

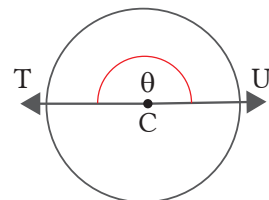
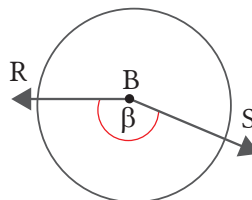
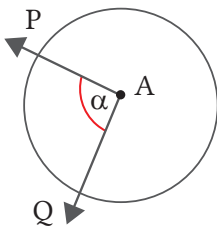


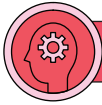
SUDUT PUSAT

Ciri-ciri

- ✓ Kedua kaki sudutnya terbentuk dari kedua sinar garis.
- ✓ Kedua kaki sudut-sudutnya berhimpitan dengan jari-jari lingkaran.
- ✓ Titik sudutnya merupakan titik pusat lingkaran.

Pada gambar berikut ini, besar sudut pusat PAQ dapat ditulis " $\angle PAQ$ " atau " α ", besar sudut pusat RBS dapat ditulis " $\angle RBS$ " atau " β ", dan besar sudut pusat TCU dapat ditulis " $\angle TCU$ " atau " θ ".





Ayo Berpikir Kritis

Berikan tanda centang pada pernyataan berikut! Jawab dengan "ya" jika kalian setuju dengan pernyataan tersebut dan jawab dengan "tidak" jika kalian tidak setuju dengan pernyataan tersebut.

Kemudian, berikan argumentasi semenarik mungkin terhadap tanggapan atas jawabanmu.

Daftar Pernyataan Kritis	Ya/Tidak
1. Jika diameter sebuah benda tertentu berbentuk sebuah lingkaran bertambah panjang, maka keliling benda tersebut juga bertambah panjang.	
2. Apabila K dan d berturut-turut merupakan keliling dan diameter suatu lingkaran, maka perbandingan nilai K dengan d akan makin bertambah apabila benda tersebut yang berbentuk lingkaran juga makin bertambah. Begitu juga sebaliknya, perbandingan nilai K dengan d akan makin berkurang apabila suatu benda berbentuk lingkaran makin berkurang juga.	



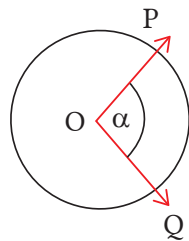
Ayo Mengingat Kembali

1. Jari-jari lingkaran adalah ruas garis yang dihubungkan oleh suatu titik pada lingkaran dengan titik pusat lingkaran.
2. Diameter lingkaran adalah ruas garis yang dihubungkan oleh dua titik pada lingkaran yang melalui titik pusat lingkaran.
3. Tali busur adalah ruas garis yang dihubungkan oleh dua titik pada lingkaran.

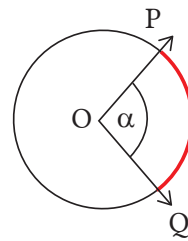


Pengertian Busur Lingkaran

Perbandingan panjang busur dengan besar sudut pusatnya di depan sudut pusat itu dengan busur yang sama adalah sebanding dengan perbandingan luas busur lingkaran dengan besar sudut pusatnya di depan sudut pusat itu dengan busur yang sama. Amati dengan cermat lengkungan merah pada Gambar 2.7 berikut ini.



Besar sudut pusat POQ atau $\angle POQ$



Panjang busur PQ atau \widehat{PQ}

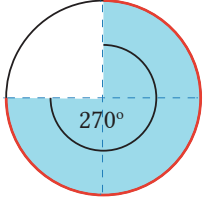
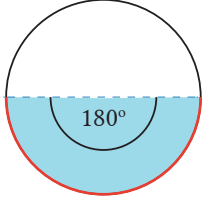
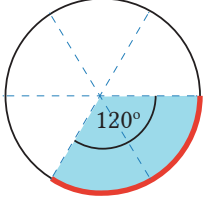
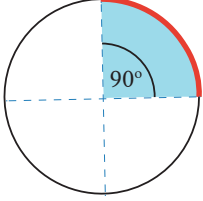
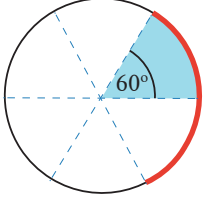
Gambar 2.7 Sudut Pusat dan Busur Lingkaran

Pada Gambar 2.7 di atas, panjang busur PQ sesuai dengan besar sudut pusat POQ atau α . Adapun besar sudut pusat suatu lingkaran berkisar mulai 0° sampai 360° .

Bagaimana cara kalian menghitung diameter lingkaran. Apabila diketahui panjang jari-jari sebuah lingkaran, maka kalian dapat dengan mudah menghitung panjang keliling lingkaran tersebut. Namun, bagaimana jika satu-satunya pertanyaan adalah panjang busur lingkaran?

Melalui kegiatan eksplorasi ini, kalian akan belajar bagaimana cara menemukan rumus panjang busur lingkaran. Kalian dapat dengan mudah memperoleh rumus panjang busur lingkaran dengan memeriksa hubungan keliling lingkaran, sudut pusat, dan panjang busurnya. Garis lengkung merah merupakan garis lengkung lingkaran yang berupa panjang busur lingkaran yang sesuai dengan sudut pusatnya. Amati dengan cermat Tabel 2.1 berikut ini dengan fokus pengamatan pada hasil perbandingan panjang busur lingkaran dengan kelilingnya.

Tabel 2.1 Hubungan Sudut Pusat Lingkaran dengan Panjang Busurnya

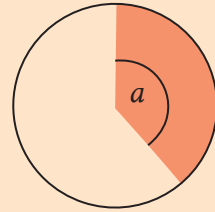
Busur Lingkaran	Perbandingan Besar Sudut Pusat α dengan 360°	Perbandingan Panjang Busur dengan Keliling Lingkaran
	$\frac{\alpha}{360^\circ}$	$\frac{\text{Panjang Busur}}{\text{Keliling Lingkaran}}$
	$\frac{270^\circ}{360^\circ}$	$\frac{3}{4}$
	$\frac{180^\circ}{360^\circ}$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{120^\circ}{360^\circ}$	$\frac{1}{3}$
	$\frac{90^\circ}{360^\circ}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{60^\circ}{360^\circ}$	$\frac{1}{6}$



Ayo Berkomunikasi

Berdasarkan Tabel 2.1 di atas, diskusikan beberapa pertanyaan berikut agar kalian lebih memahami konsep luas juring lingkaran.

1. Apakah besar sudut pusat lingkaran dengan panjang busurnya memiliki hubungan tertentu? Jelaskan!
2. Benarkah makin besar sudut pusat lingkaran, maka makin besar juga panjang busurnya yang sehadap?
3. Bagaimana perbandingan dua sudut pusat pada dua busur lingkaran yang sama?



Definisi 2.1

Busur lingkaran adalah sebuah ruas garis lengkung yang berimpit dengan lingkaran. Jika kita memiliki sebuah kawat berbentuk lingkaran, kemudian kita bagi tiga kawat lingkaran tersebut, maka masing-masing lengkungan yang terbentuk merupakan busur lingkaran.

Setelah mengetahui panjang jari-jari busur lingkaran dan ukuran sudut pusat lingkaran, kita dapat menentukan panjang busur lingkaran tersebut. Sudut pusat busur adalah sudut pusat di depan busur itu. Adapun dua garis lurus yang menghubungkan ujung busur yang dimaksud adalah jari-jari lingkaran, sedangkan titik pusat busur yang dimaksud adalah titik pusat lingkaran.

Rumus menghitung panjang busur lingkaran dapat ditulis seperti berikut ini.

$$\text{Panjang busur} = \frac{\text{Sudut pusat}}{360^\circ} \times \text{keliling lingkaran}$$

Jika α merupakan besar sudut pusat busur dan r merupakan jari-jari lengkungan tersebut (jari-jari lingkaran), hubungan antara besar sudut pusat

dan panjang busur adalah panjang busur suatu lingkaran sebanding dengan ukuran sudut pusat di depan busur itu. Dengan demikian, rumus panjang busur tersebut dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\text{Panjang busur} = \frac{\alpha}{360^\circ} \times 2\pi r$$

Contoh Soal 2.1

Diketahui sebuah busur lingkaran memiliki jari-jari 7 cm dan besar sudut pusatnya adalah 90° . Tentukan panjang busur lingkaran itu.

Alternatif penyelesaian:

$$\begin{aligned} \text{Panjang busur} &= \frac{\alpha}{360^\circ} \times 2\pi r \\ &= \frac{90^\circ}{360^\circ} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 7 \\ &= \frac{1}{4} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 7 \\ &= 11 \text{ cm} \end{aligned}$$

Jadi, panjang busur lingkaran tersebut adalah 11 cm.

Contoh Soal 2.2

Apabila diketahui panjang busur AB adalah 17,6 cm dan besar $\angle AOB$ sebesar 72° , maka berapakah panjang jari-jari lingkarannya?

Alternatif penyelesaian:

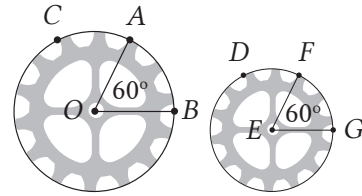
$$\begin{aligned} \text{Panjang busur} &= \frac{\alpha}{360^\circ} \times 2\pi r \Rightarrow 17,6 = \frac{72^\circ}{360^\circ} \times 2 \times \frac{22}{7} \times r \\ &= \frac{1}{5} \times \frac{44}{7} \times r \\ &= \frac{44}{35} \times r \\ r &= \frac{35}{44} \times 17,6 \\ r &= 14 \end{aligned}$$

Jadi, panjang jari-jari lingkarannya adalah 14 cm.



Ayo Berpikir Kreatif

Pertimbangkan roda gigi besar yang diwakili oleh lingkaran dengan sudut pusat titik O , besar $\angle AOB$ adalah 60° , busur minor AB , dan busur mayor ACB seperti yang ditunjukkan pada gambar. Pertimbangkan roda gigi kecil yang diwakili oleh lingkaran E , yang berisi sudut pusat, besar $\angle FEG$ adalah 60° , busur kecil FG , dan busur utama FDG seperti yang ditunjukkan pada gambar.



Gambar 2.8 Roda Gigi Sepeda

- Apakah roda gigi besar serupa dengan roda gigi kecil? Jelaskan.
- Apakah panjang jari-jari roda gigi besar sebanding dengan panjang jari-jari roda gigi kecil? Jelaskan.
- Tentukan besar busur minor pada setiap lingkaran.
- Berapa rasio ukuran derajat busur minor dengan ukuran derajat seluruh lingkaran untuk masing-masing dua roda gigi?
- Apakah kedua busur yang dipotong tampak sama panjang? Apakah besar busur potong pada roda gigi besar sama dengan ukuran derajat busur potong pada roda gigi kecil? Jelaskan.



Ayo Berpikir Kritis

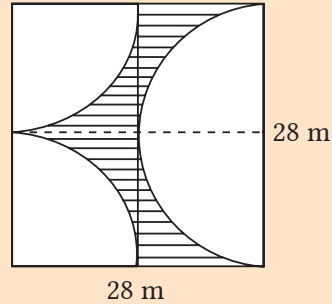
Halim mengatakan bahwa apabila dua lingkaran memiliki sudut pusat busur yang sama, maka panjang busurnya pastilah sama panjang. Setujukah kalian dengan pernyataan Halim? Jelaskan.



Ayo Berkomunikasi

Diskusikan permasalahan berikut dengan teman sebangku, kemudian sampaikan hasilnya kepada teman di kelompok lainnya!

Areal lahan rumput di belakang rumah Pak Hartono berbentuk segi empat dengan panjang sisi-sisinya berukuran $28 \times 28 \text{ m}^2$. Sebagian areal lahan rumput akan dibuat menjadi kolam renang (area yang tidak terarsir), sedangkan sisanya akan menjadi rerumputan yang indah (area yang terarsir). Jika biaya peletakan rumput adalah Rp $100.000/\text{m}^2$ dan biaya tukang Rp1.500.000,00, maka tentukan:



- panjang keliling areal lahan rumput Pak Hartono.
- besar anggaran yang harus disiapkan oleh Pak Hartono untuk menggarap lahan rumputnya.



Penguatan Karakter

Jembatan Merah Youtefa membentang di Teluk Youtefa, menghubungkan Jayapura, Desa Hamadi, dan Kabupaten Muara Tami. Ini adalah jembatan lengkung baja terpanjang di Papua. Panjang jembatan ini total 11,6 kilometer, termasuk bentang tengah 433 meter, jembatan pendekat sisi Youtefa sepanjang 900 meter, jalan pendekat sisi Hamadi sepanjang 320 meter, dan jalan akses 9.950 meter. Jembatan ini dapat



Gambar 2.9 Jembatan Youtefa Jayapura, Papua

memperpendek jarak antara Kota Jayapura dan Kabupaten Muara Tami dengan Pos Perbatasan Negara (PLBN) Skouw. Sebelum dibangunnya jembatan ini, perjalanan dari kawasan Pemkot Jayapura menuju Kabupaten Muara Tami menempuh jarak 35 kilometer dan memakan waktu sekitar satu jam.



Ayo Mencoba

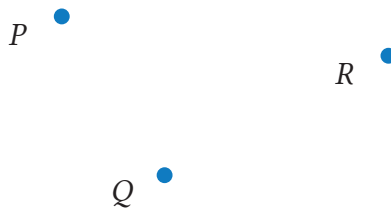
Berdasarkan informasi tersebut, pikirkan bagaimana cara mengukur panjang lengkungan jembatan yang berwarna merah. Perkirakan panjang lengkungan jembatan yang berwarna merah tersebut dan diskusikan dengan temanmu.



Ayo Bekerja Sama

Diskusikan dengan teman di sebelahmu untuk menyelesaikan permasalahan berikut ini.

1. Apakah ada tali busur lingkaran yang panjangnya lebih panjang dari diameter lingkarannya? Jelaskan.
2. Diketahui bahwa tiga titik yang berbeda, misalnya P , Q , dan R , tidak segaris. Maka bagaimana kalian menggambar juring setengah lingkaran yang menghubungkan ketiga titik tersebut? Buatlah gambarnya.



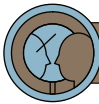
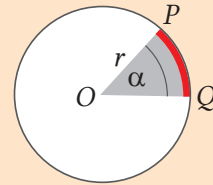
3. Tanggapilah pernyataan berikut ini dengan menyebutkan “selalu”, “kadang-kadang”, atau “tidak pernah”. Jelaskan pula alasanmu.
 - a. Sudut pusat busur mayor suatu lingkaran membentuk sudut tumpul atau besar sudutnya lebih dari 180° .
 - b. Sudut pusat busur minor suatu lingkaran membentuk sudut lancip atau besar sudutnya kurang dari 180° .
 - c. Jumlah dari banyak sudut pusat sebuah lingkaran tergantung pada ukuran panjang jari-jarinya.
 - d. Tali busur sebuah lingkaran merupakan diameter lingkaran.



Ayo Berkomunikasi

Jelaskan bagaimana kalian menyelesaikan permasalahan berikut!

Bagaimana cara menentukan rumus panjang busur PQ apabila diketahui panjang jari-jarinya adalah r dan besar sudut pusatnya adalah α ? Ungkapkan pendapatmu.



Ayo Berefleksi

1. Salinlah tabel berikut, kemudian lengkapilah.

Jari-jari (cm)	π (pi)	Sudut Pusat ($^\circ$)	Panjang Busur (cm)
21	$\frac{22}{7}$	60	...
...	3,14	72	1256
7	$\frac{22}{7}$	90	...
...	$\frac{22}{7}$	120	88
100	3,14	...	31,4

2. Apabila diketahui sudut pusat lingkaran sebesar 70° dan panjang jari-jarinya 21 cm, maka berapakah panjang busur lingkaran tersebut?



Ayo Menggunakan Teknologi

Tambahkan pengetahuan kalian tentang hubungan antara panjang busur lingkaran dan jari-jari lingkaran dengan mengunjungi tautan di samping karena ada sesuatu yang menarik.



<https://s.id/SelidikPanjangBusur>

Tuliskanlah hasil percobaanmu.

1. Jika sudut 20° dan diameter 20 cm, berapa jarak yang ditempuh untuk satu putaran roda?
2. Jika sudut 30° dan diameter 24 cm, berapa jarak yang ditempuh untuk satu putaran roda?
3. Jika sudut 40° dan diameter 28 cm, berapa jarak yang ditempuh untuk satu putaran roda?
4. Jika sudut 50° dan diameter 20 cm, berapa jarak yang ditempuh untuk satu putaran roda?
5. Jika sudut 60° dan diameter 24 cm, berapa jarak yang ditempuh untuk satu putaran roda?
6. Jika sudut 70° dan diameter 28 cm, berapa jarak yang ditempuh untuk satu putaran roda?
7. Jika sudut 80° dan diameter 20 cm, berapa jarak yang ditempuh untuk satu putaran roda?
8. Jika sudut 90° dan diameter 24 cm, berapa jarak yang ditempuh untuk satu putaran roda?

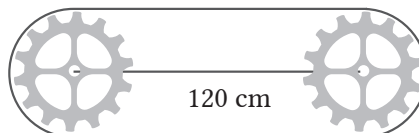
Kesimpulan apa yang kalian dapatkan setelah melakukan beberapa kali percobaan? Jelaskan jawaban kalian.

Latihan 2.1

1. Panjang jari-jari lingkaran A sebesar 10 cm. Apabila pada lingkaran A terdapat beberapa tali busur yaitu busur KL, MN, OP, dan QR dengan berturut-turut panjangnya adalah 16 cm, 14 cm, 12 cm, dan 10 cm, manakah dari apotema tersebut yang terpanjang jika dibangun dari pusat lingkaran A di sekitar setiap tali busur?
2. Pada suatu lingkaran terdapat busur \widehat{PQ} , \widehat{RS} , \widehat{TU} , dan \widehat{VW} . Diketahui keempat busur tersebut memiliki panjang $\widehat{PQ} > \widehat{RS} > \widehat{TU} > \widehat{VW}$. Jika pada masing-masing busur tersebut dibuat sudut pusat yang bersesuaian, maka menghadap sudut apakah sudut pusat terkecil tersebut?

3. **Ayo Mencoba**

Ada dua roda gigi yang memiliki jari-jari yang sama yaitu 28 cm. Tentukan panjang sabuk lilitan yang diperlukan agar dapat melingkari kedua roda gigi tersebut jika jarak antara pusat kedua roda adalah 120 cm.



4. **Ayo Berpikir Kritis**

Menurut Wafi, makin panjang busur lingkaran, maka makin besar juga sudut pusat yang menghadap busur tersebut. Apabila panjang busur diperkecil, maka ukuran sudut pusat yang berhadapan dengan busur tersebut juga berkurang. Apakah kalian setuju dengan pernyataan Wafi? Jelaskan.

5. **Ayo Berkomunikasi**

Perhatikan tabel di samping. Jajak pendapat *online* dilakukan untuk menentukan jumlah *file* musik yang dimiliki dan diterima melalui pengunduhan gratis.

Free Music Downloads	
How many free music files have you collected?	
100 files or less	76%
101 to 500 files	16%
501 to 1000 files	5%
More than 100 files	3%

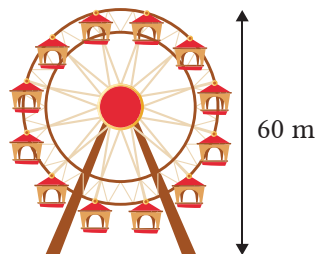
Sumber: QuickTake.com

Tentukan setiap ukuran sudut pusat setiap kategori tersebut jika kalian membuat diagram lingkaran dari data ini.

Gambarlah busur lingkaran yang sesuai kategori tersebut. Buatlah diagram lingkaran dengan data pada tabel di samping.

6. **Ayo Bereksplorasi**

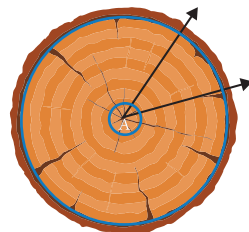
Suatu Kincir Ria yang ditunjukkan seperti gambar di samping memiliki diameter 50 cm. Jika busur baja yang menghubungkan satu mobil penumpang ke mobil penumpang lainnya berbentuk lingkaran. Tentukan panjang setiap busur baja yang menghubungkan setiap mobil penumpang.



7.  **Ayo Berpikir Kreatif**

Gunakan diagram yang ditunjukkan untuk menjawab setiap pertanyaan.

- Jari-jari lingkaran pohon kecil (lingkaran kecil) adalah r , dan jari-jari lingkaran pohon yang lebih besar (lingkaran besar) adalah $10r$. Bagaimana panjang busur-busur kecil pada lingkaran pohon kecil dibandingkan dengan panjang busur-busur kecil pada lingkaran pohon besar?
- Jika panjang busur kecil pada lingkaran pohon kecil sama dengan 3 inci, berapakah panjang busur besar pada lingkaran pohon besar?
- Jika Besar sudut $A = 20$ derajat, jari-jari lingkaran pohon kecil adalah r , jari-jari lingkaran pohon besar adalah $10r$, dan panjang busur kecil lingkaran pohon kecil adalah 3 inci, tentukan keliling lingkaran pohon besar.



B. Juring Lingkaran

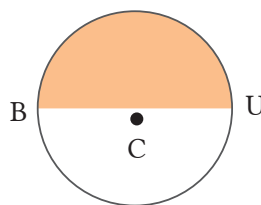
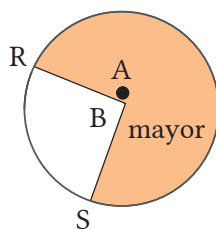
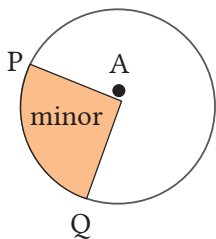
 **Ayo Mengingat Kembali**

Ciri-ciri elemen lingkaran yang terkait dengan juring dan sudut pusat lingkaran

JURING

Ciri-ciri

- ✓ Berbentuk suatu daerah pada lingkaran
- ✓ Suatu daerah yang dibatasi oleh satu busur dan dua jari-jari lingkaran
- ✓ Titik ujung busur lingkaran dibatasi oleh kedua jari-jari lingkaran.

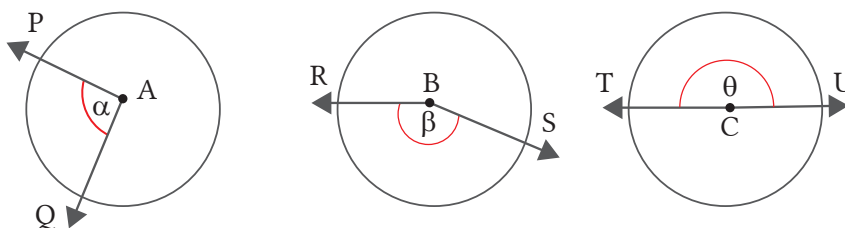


SUDUT PUSAT

Ciri-ciri

- ✓ Kedua kaki sudutnya terbentuk dari kedua sinar garis.
- ✓ Kedua kaki sudut-sudutnya berhimpitan dengan jari-jari lingkaran.
- ✓ Titik sudutnya merupakan titik pusat lingkaran.

Pada gambar berikut ini, besar sudut pusat PAQ dapat ditulis " $\angle PAQ$ " atau " α ", besar sudut pusat RBS dapat ditulis " $\angle RBS$ " atau " β ", dan besar sudut pusat TCU dapat ditulis " $\angle TCU$ " atau " θ ".

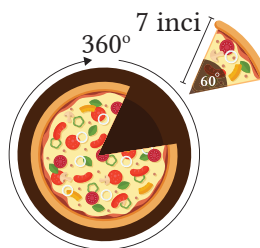


Definisi 2.2

Luas juring lingkaran adalah bagian dari lingkaran yang tertutup antara dua jari-jari dan busur yang menghubungkannya.

Juring lingkaran merupakan suatu daerah ruang tertutup di dalam batas suatu juring. Sebuah juring selalu berasal dari pusat lingkaran. Setengah lingkaran adalah juring paling umum dari sebuah lingkaran, yang mewakili setengah lingkaran.

Salah satu contoh dalam kehidupan nyata yang paling umum untuk daerah suatu juring lingkaran adalah sepotong piza. Irisan piza berbentuk lingkaran seperti juring. Sebuah piza dengan jari-jari 7 inci dipotong menjadi 6 irisan yang sama ukurannya (lihat Gambar 2.10 di samping) dan setiap irisannya merupakan juring lingkaran.



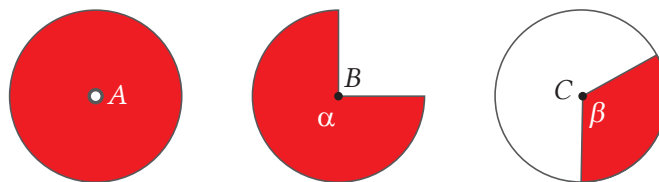
Gambar 2.10 Irisan Piza



Ayo Bereksplorasi

Luas bidang yang dibentuk oleh setiap irisan piza dapat dihitung dengan menggunakan rumus luas bidang. Sekarang, bagaimana cara menghitung luas irisan piza berbentuk juring dengan menggunakan rumus luas juring?

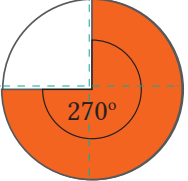
Dapatkan kalian menghitung luas ketiga daerah merah pada tiga lingkaran yang diilustrasikan pada Gambar 2.11 apabila panjang jari-jari dan sudut pusat ketiga lingkaran diketahui?

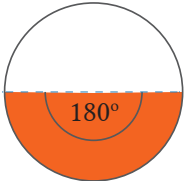
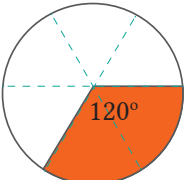
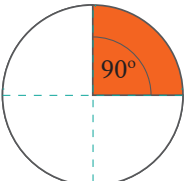
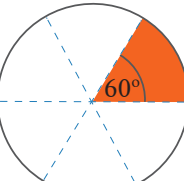


Gambar 2.11 Daerah Juring Lingkaran

Apabila kalian ingin mencari luas lingkaran A, tentunya akan mudah kalian dapatkan dengan cara mengetahui dan memahami rumus luas lingkaran. Akan tetapi, dapatkan kalian menentukan luas juring dari kedua lingkaran tersebut, yaitu lingkaran B dan lingkaran C? Ayo temukan rumus dalam menentukan besar ukuran luas juring lingkaran dengan memperhatikan bahwa daerah warna merah mewakili gambar lingkaran yang sesuai dengan sudut pusatnya. Pada Tabel 2.2, perhatikan baik-baik hubungan besar sudut pusat lingkaran dengan dan luas juringnya.

Tabel 2.2 Hubungan Sudut Pusat Lingkaran dengan Juringnya

Juring Lingkaran	Perbandingan Sudut Pusat α dengan 360°	Perbandingan Luas Juring terhadap Luas Lingkaran
	$\frac{\alpha}{360^\circ}$	$\frac{\text{Luas Juring}}{\text{Keliling Lingkaran}}$
	$\frac{270}{360} = \frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$

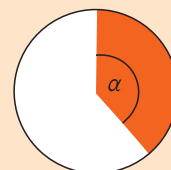
Busur Lingkaran	Perbandingan Sudut Pusat α dengan 360°	Perbandingan Luas Juring terhadap Luas Lingkaran
	$\frac{\alpha}{360^\circ}$	$\frac{\text{Panjang Busur}}{\text{Keliling Lingkaran}}$
	$\frac{180}{360} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{120}{360} = \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
	$\frac{90}{360} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{60}{360} = \frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$



Ayo Berkomunikasi

Berdasarkan Tabel 2.2 di atas, diskusikan beberapa pertanyaan berikut ini agar kalian lebih memahami konsep luas juring lingkaran.

1. Apa yang dapat kalian ketahui tentang hubungan sudut pusat lingkaran dengan luas juringnya?



2. Benarkah bahwa apabila makin bertambah besar sudut pusat lingkaran, maka akan makin bertambah besar pula luas juring yang sehadap?
3. Bagaimana cara kalian menentukan keliling juring lingkaran?
4. Bagaimana dengan luas daerah perpotongan tali busur dengan panjang busur lingkaran (tembereng)?



Tahukah Kalian

Besar sudut pusat untuk suatu lingkaran penuh adalah dari 0 sampai 360. Jika kalian perhatikan lebih dekat, kalian akan melihat bahwa makin besar luas juring dan panjang busur, maka akan makin besar sudut pusat lingkaran, begitu juga sebaliknya. Akibatnya, luas juring sebuah lingkaran akan sebanding dengan panjang busur lingkaran dan sudut pusat yang bersesuaian. Apa sebenarnya hubungan yang didapat?



Ayo Berpikir Kritis

Coba kalian pikirkan dua pernyataan berikut. Menurut kalian, manakah pernyataan berikut yang lebih luas?

- a. Sebuah juring lingkaran A dengan jari-jari r dan sudut pusat α , ataukah
- b. Sebuah juring lingkaran B dengan jari-jari $2r$ dan sudut pusat $\frac{1}{2}\alpha$.

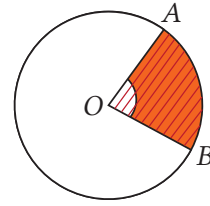


Ayo Berpikir Kreatif

Sebuah lingkaran dengan jari-jari r dan besar sudut pusat $\frac{1}{2}\alpha$ terdapat luas juring yang sama besar dengan luas lingkaran yang jari-jarinya r dan sudut pusatnya α . Carilah luas lingkaran lain yang jari-jari dan sudut pusatnya berbeda dari contoh tersebut, sehingga panjangnya sama dengan luas juring lingkaran dengan jari-jari r dan sudut pusat α . Buatlah setidaknya tiga juring lingkaran.

Contoh Soal 2.3

Diketahui besar $\angle AOB = 90^\circ$ dan jari-jari = 28 cm.
Tentukan berapakah luas juring AOB tersebut?



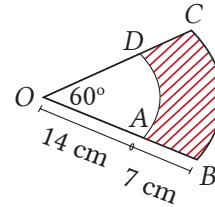
Alternatif penyelesaian:

$$\begin{aligned}
 \text{Luas Juring AOB} &= \frac{\alpha}{360^\circ} \times \pi r^2 \\
 &= \frac{90^\circ}{360^\circ} \times \frac{22}{7} \times 28^2 \\
 &= \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times 28 \times 28 \\
 &= 1 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 28 \\
 &= 22 \times 28 \\
 &= 616
 \end{aligned}$$

Jadi, luas juring AOB adalah 616 cm²

Contoh Soal 2.4

Pada gambar di samping, diketahui besar $\angle AOD$ adalah 60° , panjang OA adalah 14 cm, dan panjang AB adalah 7 cm. Tentukan luas daerah yang terarsir.



Alternatif penyelesaian:

$$\begin{aligned}
 \text{Luas Juring COB} &= \frac{60^\circ}{360^\circ} \times \pi r^2 \\
 &= \frac{1}{6} \times \frac{22}{7} \times 21^2 \\
 &= \frac{1}{2 \times 3} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \\
 &= 1 \times 11 \times 1 \times 21 \\
 &= 11 \times 21 \\
 &= 231 \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Luas Juring AOD} &= \frac{60^\circ}{360^\circ} \times \pi r^2 \\
 &= \frac{1}{6} \times \frac{22}{7} \times 14^2 \\
 &= \frac{1}{2 \times 3} \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14 \\
 &= \frac{1}{3} \times 11 \times 2 \times 14
 \end{aligned}$$

$$= \frac{308}{3}$$

$$= 102,67 \text{ cm}^2$$

$$\begin{aligned} \text{Luas daerah arsiran} &= \text{Luas Juring COB} - \text{Luas Juring AOD} \\ &= 231 - 102,67 \\ &= 128,33 \end{aligned}$$

Jadi, luas daerah arsiran adalah 128,33 cm²



Tahukah Kalian

1. Dua busur lingkaran dapat dikatakan sama (kongruen) dalam lingkaran yang sama atau dapat dikatakan juga bahwa dua busur lingkaran adalah kongruen jika dan hanya jika besar sudut pusat busur yang bersesuaian adalah sama besar.
2. Panjang busur lingkaran yang terbentuk dari dua busur saling berdekatan (salah satu titik ujungnya berhimpit dengan yang lain) dengan titik-titik ujungnya sama dengan jumlah kedua busur tersebut.

Petunjuk

Kongruen adalah dua buah bangun tertentu yang sama dan sebangun.

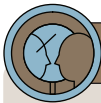


Ayo Menggunakan Teknologi

Setelah mempelajari luas juring lingkaran yang dibahas pada buku ini, kembangkan pengetahuan kalian tentang luas juring lingkaran dengan mengunjungi laman berikut.

Menghitung Luas Juring Lingkaran	Luas Juring Lingkaran dengan Animasi	Luas Juring Lingkaran dengan Rad
		
https://s.id/HitungLuasJuring	https://s.id/LuasJuringAnimasi	https://s.id/LuasJuringRad

Setelah kalian melakukan penelusuran pada ketiga tautan tersebut, buatlah rangkuman tentang konsep luas juring lingkaran, serta sebutkan minimal ada 5 percobaan yang telah kalian lakukan untuk tautan kedua dan ketiga.



Ayo Berefleksi

Pada subbab ini kalian telah belajar mengenai luas juring lingkaran.

1. Apa sajakah elemen-elemen juring lingkaran, sudut pusat, dan tembereng?
2. Apa itu juring lingkaran?
3. Apa saja syarat suatu daerah di dalam lingkaran dapat dikatakan sebagai luas juring lingkaran?
4. Bagaimana hubungan sudut pusat lingkaran dengan juringnya?

Latihan 2.2

1. Salinlah tabel berikut, kemudian lengkapilah.

Jari-jari (cm)	π (pi)	Sudut Pusat ($^{\circ}$)	Luas Juring (cm^2)
...	3,14	25	31,4
90	3,14	...	8478
6	3,14	100	...

2. Tentukan luas juring lingkaran yang berjari-jari 10 cm dan sudut pusatnya sebesar 70° .
3. Ibu Sulastri ingin membagi kue bolu menjadi enam bagian sama besar. Berapakah posisi sudut pusat masing-masing bagian? Dan seberapa besar bagian dasar setiap potong kue?



4.  **Ayo Berpikir Kreatif**

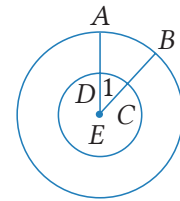
Diketahui panjang jari-jari suatu lingkaran A adalah 14 cm. Bagaimana cara menghitung panjang jari-jari lingkaran lain dan besar sudut pusatnya agar luas juringnya sama dengan lingkaran A? Jelaskan.

5.  **Ayo Berpikir Kreatif**

Bagaimana cara membuat lingkaran O dengan panjang jari-jari tertentu yang luasnya sama dengan luas juring pada lingkaran P dengan sudut pusat dan jari-jari tertentu juga? Jelaskan.

6.  **Ayo Berpikir Kritis** dan  **Ayo Berkomunikasi**

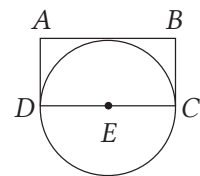
Perhatikan gambar lingkaran di samping. Diketahui dua buah lingkaran tersebut konsentris dengan titik pusat E. Jika besar sudut $AEB = 42^\circ$, maka apa kriterianya agar panjang busur AB dua kali busur CD?



Petunjuk

Konsentris adalah dua buah bangun tertentu yang mempunyai sudut pusat yang sama.

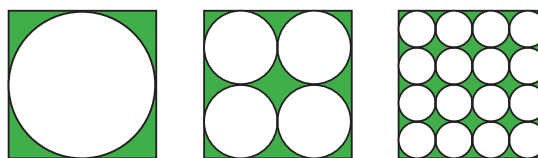
7. Perhatikan gambar di samping. Coba kalian bandingkan panjang keliling lingkaran E dengan panjang keliling persegi panjang ABCD. Tentukan manakah pernyataan berikut yang benar. Jelaskan.



- Panjang keliling persegi panjang ABCD lebih besar daripada panjang keliling lingkaran E.
- Panjang keliling lingkaran E lebih besar daripada panjang persegi panjang ABCD.
- Panjang keliling lingkaran E sama dengan panjang persegi panjang ABCD.
- Informasi yang terdapat pada soal tidak cukup untuk menentukan perbandingan keliling keduanya.

8.  **Ayo Berpikir Kreatif**

Perhatikan gambar di bawah. Gambar di bawah ini merupakan tiga gambar segi empat dengan ukuran sama. Masing-masing dalam segi empat tersebut terdapat lingkaran yang ukurannya sama. Tentukan daerah yang diarsir = sisi luar lingkaran dalam persegi!

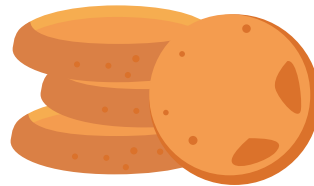


9.



Ayo Berpikir Kritis

Sebuah pabrik biskuit membuat biskuit sebanyak dua jenis yang berbentuk cakram dengan diameter yang berbeda, tetapi ketebalannya sama. Masing-masing kue kecil dan besar memiliki diameter 7 cm dan 10 cm. Dua paket berbeda dibungkus dalam biskuit.



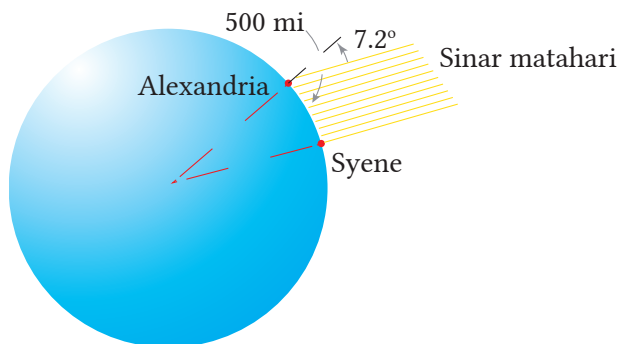
Sekotak kecil berisi 10 biskuit tersedia seharga Rp7.000,00, sedangkan paket besar berisi sebanyak 7 biskuit untuk dijual dengan harga Rp10.000,00. Manakah yang lebih menguntungkan, kemasan biskuit kecil atautah kemasan biskuit besar? Jelaskan alasannya.

C. Hubungan Panjang Busur dan Luas Juring

Pertanyaan Pemantik

Matematikawan Yunani, Eratosthenes (ca. 276-195 SM), mengukur keliling bumi dari pengamatan berikut. Dia memperhatikan bahwa pada hari tertentu matahari bersinar langsung ke bawah sumur (titik pusat bumi) melalui Alexandria dan Syene (Aswan modern). Pada saat yang sama di Alexandria, 500 mil ke utara (pada meridian yang sama), sinar matahari bersinar pada sudut $7,2^\circ$ ke zenit.

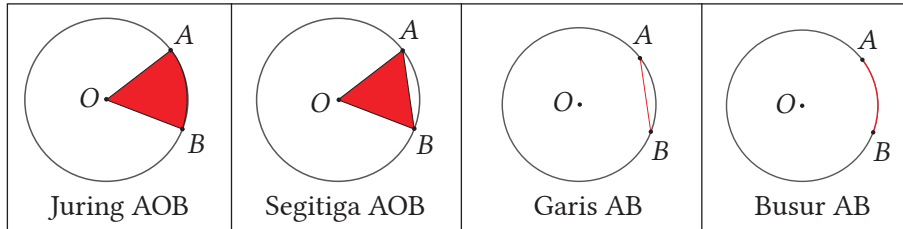
- Gunakan informasi ini dan Gambar 2.12 untuk menemukan jari-jari bumi. Bulatkan jawaban kalian ke sepuluh mil terdekat.
- Bagaimana cara mencari keliling bumi, panjang lengkungan Alexandria ke Syene (busur) dan sinar matahari pada bumi (juring)?



Gambar 2.12 Sinar Matahari ke Bumi

Tahukah Kalian

Pelabelan Busur dan Juring Lingkaran



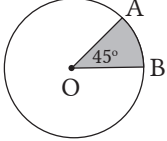
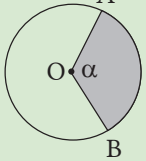
Kalian mungkin menemukan busur dan juring yang masing-masing gambar disebut sebagai "panjang busur AB" dan "juring AOB". Beberapa orang menjadi bingung dan berpikir bahwa AB harus berupa ruas garis lurus dan AOB harus berupa segitiga. Petunjuknya ada di susunan kata. Segitiga AOB tidak sama dengan besar juring AOB.

Ayo Bereksplorasi

Ayo menggali informasi agar bisa menjawab Pertanyaan Pemantik dan informasi pada bagian Tahukah Kalian? Amati dengan cermat Tabel 2.3 tentang hubungan sudut pusat lingkaran, panjang busur, dan luas juringnya.

Tabel 2.3 Hubungan Sudut Pusat Lingkaran dengan Panjang Busur dan Luas Juringnya

Lingkaran (L)	Panjang Busur (\widehat{AB})	Luas Juring (L)
$L_1 (r, 180^\circ)$ 	$\widehat{AB} = \frac{1}{2} \times \text{keliling lingkaran}$ atau $\widehat{AB} = \frac{180^\circ}{360^\circ} \times \text{keliling lingkaran}$	$L_{AOB} = \frac{1}{2} \times \text{luas lingkaran}$ atau $L_{AOB} = \frac{180^\circ}{360^\circ} \times \text{luas lingkaran}$
$L_1 (r, 90^\circ)$ 	$\widehat{AB} = \frac{1}{4} \times \text{keliling lingkaran}$ atau $\widehat{AB} = \frac{90^\circ}{360^\circ} \times \text{keliling lingkaran}$	$L_{AOB} = \frac{1}{4} \times \text{luas lingkaran}$ atau $L_{AOB} = \frac{90^\circ}{360^\circ} \times \text{luas lingkaran}$

Lingkaran (L)	Panjang Busur (\widehat{AB})	Luas Juring (L)
$L_1(r, 45^\circ)$ 	$\widehat{AB} = \frac{1}{8} \times \text{keliling lingkaran}$ atau $\widehat{AB} = \frac{45^\circ}{360^\circ} \times \text{keliling lingkaran}$	$L_{AOB} = \frac{1}{8} \times \text{luas lingkaran}$ atau $L_{AOB} = \frac{45^\circ}{360^\circ} \times \text{luas lingkaran}$
$L_1(r, \alpha^\circ)$ 	$\widehat{AB} = \frac{\alpha}{360^\circ} \times \text{keliling lingkaran}$	$L_{AOB} = \frac{\alpha}{360^\circ} \times \text{luas lingkaran}$

Simpulan penting adalah luas juring sebanding dengan ukuran sudut pusat dan panjang busurnya. Berdasarkan Tabel 2.3 di atas kalian temukan bahwa apabila titik A dan B pada $L(r, \alpha)$, maka dapat disimpulkan sebagai berikut.

(i) Panjang Busur AB:

$$\widehat{AB} = \frac{\alpha}{360^\circ} \times \text{keliling lingkaran} \quad \text{atau} \quad \widehat{AB} = \frac{\alpha}{360^\circ} \times 2\pi r$$

(ii) Luas Juring AOB:

$$L_{AOB} = \frac{\alpha}{360^\circ} \times \text{luas lingkaran} \quad \text{atau} \quad L_{AOB} = \frac{\alpha}{360^\circ} \times \pi r^2$$

Petunjuk

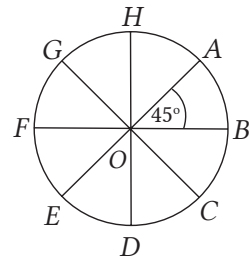
1. Dua busur dikatakan kongruen pada lingkaran yang sama atau kongruen asalkan sudut pusat yang bersesuaian adalah sama.
2. Panjang busur yang dibuat oleh dua busur yang berdekatan (salah satu titik ujungnya berhimpitan satu sama lain) ujungnya sama dengan jumlah kedua busur tersebut.



Ayo Mengerjakan Projek 2.2

Ayo selesaikan tahapan kegiatan proyek berikut untuk memiliki pengetahuan yang lebih baik tentang hubungan sudut pusat, panjang busur, dan luas juring lingkaran.

1. Sediakan jangka, spidol, penggaris, gunting, karton.
2. Buatlah sebuah lingkaran pada selembar karton dengan pusat di titik O dan jari-jari sebarang.
3. Lukislah beberapa juring lingkaran yang berukuran sama. Misalnya, juring tersebut dibagi menjadi 8 bagian yang sama seperti pada gambar di samping dengan besar sudut pusat 45° . Kemudian, potonglah kedelapan juring lingkaran tersebut.
4. Selanjutnya, amati dengan cermat kedelapan bagian juring lingkaran yang telah dipotong. Fokus pengamatannya pada besar sudut pusat, panjang busur, dan luas juringnya.
5. Kemudian, lengkapi perbandingan-perbandingan berikut pada lembar kegiatanmu.



- a. $\frac{\text{sudut pusat}}{\text{sudut satu putaran}} = \frac{45^\circ}{360^\circ} = \dots$
 - b. $\frac{\text{panjang busur AB}}{\text{keliling lingkaran}} = \dots$
 - c. $\frac{\text{luas juring AOB}}{\text{luas lingkaran}} = \dots$
6. Berikutnya, buatlah juga sebuah lingkaran pada kertas karton dengan jari-jari sesuai dengan keinginanmu (sebarang). Kemudian, bagilah lingkaran tersebut menjadi 16 juring lingkaran yang sama besar, lalu potonglah keenam belas bagian juring tersebut seperti kegiatan pada langkah keempat dan kelima.

Kesimpulan apa yang dapat kalian ambil dari menganalisis ketiga perbandingan hubungan sudut pusat, panjang busur, dan luas lingkaran?

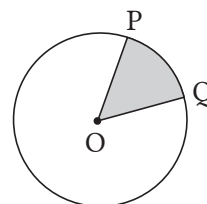
Setelah menyelesaikan pekerjaan proyek dengan sukses, kalian akan mendapatkan nilai perbandingan sudut pusat dan sudut satu putaran, panjang busur dan keliling lingkaran, dan luas juring dan luas lingkaran. Akibatnya, dapat dituliskan seperti berikut ini.

$$\frac{\text{sudut pusat}}{\text{sudut satu putaran}} = \frac{\text{panjang busur AB}}{\text{keliling lingkaran}} = \frac{\text{luas juring AOB}}{\text{luas lingkaran}}$$

Mari pahami contoh soal dan alternatif penyelesaian berikut ini untuk meningkatkan pemahaman kalian tentang hubungan sudut pusat lingkaran, panjang busur, dan luas juringnya.

Contoh Soal 2.5

Pada gambar lingkaran di samping, diketahui besar $\angle POQ = 60^\circ$, $OQ = 21$ cm. Tentukan panjang busur PQ dan luas juring POQ !



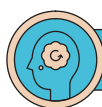
Alternatif penyelesaian:

$$\begin{aligned} \text{Panjang busur } PQ &= \frac{\alpha}{360^\circ} \times \text{keliling lingkaran} \\ &= \frac{60^\circ}{360^\circ} \times 2\pi r \\ &= \frac{1}{6} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 21 \\ &= 22 \end{aligned}$$

Jadi, panjang busur $PQ = 22$ cm.

$$\begin{aligned} \text{Luas juring } POQ &= \frac{\alpha}{360^\circ} \times \text{luas lingkaran} \\ &= \frac{60^\circ}{360^\circ} \times \pi r^2 \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \\ &= 231 \end{aligned}$$

Jadi, luas juring $POQ = 231$ cm²

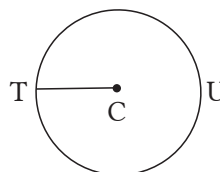
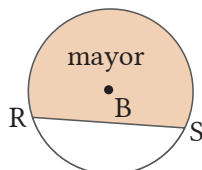
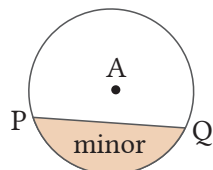


Ayo Mengingat Kembali

TEMBERENG

Ciri-ciri

- ✓ Suatu daerah yang terdapat pada lingkaran
- ✓ Suatu daerah yang dibatasi oleh satu busur dan tali busur lingkaran



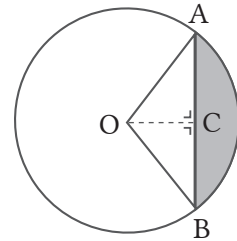
Definisi 2.3

Tembereng adalah luas daerah di dalam lingkaran yang dibatasi oleh sebuah tali busur dan sebuah busur lingkaran di depan tali busur tersebut sehingga luas tembereng lingkaran adalah besar luas juring lingkaran dikurangi oleh luas segitiga yang kaki-kaki sudutnya merupakan dua jari-jari lingkaran yang dibatasi oleh tali busur dan busur lingkaran yang menghubungkan batas tembereng tersebut.



Ayo Bereksplorasi

Berdasarkan definisi tembereng di atas, maka tembereng merupakan suatu daerah yang berada di dalam lingkaran yang dibatasi oleh tali busur dan busur lingkaran. Gambar 2.13 menggambarkan lingkaran dengan pusat O , garis lurus AB merupakan tali busur lingkaran, dan garis lengkung AB merupakan busur lingkaran. Sementara itu, daerah arsiran adalah daerah yang dibatasi oleh tali busur AB dan busur AB . Prosedur untuk menghitung luas tembereng adalah sebagai berikut.



Gambar 2.13 Tembereng

1. Carilah luas juring AOB berdasarkan ukuran yang diketahui.
2. Carilah panjang tali busur AB dengan memperhatikan sudut pusatnya.
3. Carilah panjang garis apotema OC dengan memperhatikan segitiga yang terbentuk.
4. Hitung luas segitiga AOB dengan memperhatikan panjang apotemanya.
Luas segitiga = $\frac{1}{2} \times$ panjang tali busur $AB \times$ panjang apotema OC .
5. Hitung luas tembereng yang didapat dari luas juring dikurangi dengan luas segitiga AOB .

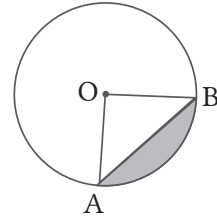
$$\text{Luas tembereng} = \text{luas juring } AOB - \text{luas segitiga } AOB,$$

Untuk lebih jelasnya, pelajari dan pahami contoh soal 2.6 berikut.

Contoh Soal 2.6

Perhatikan lingkaran pada gambar berikut!

Pada gambar tersebut diketahui besar $\angle AOB$ adalah 90° dan jari-jari lingkaran adalah 10 cm. Hitunglah:



- panjang busur,
- luas juring,
- luas tembereng.

Alternatif penyelesaian:

$$\begin{aligned}\text{Panjang busur AB} &= \frac{\alpha}{360^\circ} \times \text{keliling lingkaran} \\ &= \frac{90^\circ}{360^\circ} \times 2\pi r \\ &= \frac{1}{4} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 10 \\ &= 15,714 \text{ cm}\end{aligned}$$

Jadi, panjang busur AB = 15,714 cm.

$$\begin{aligned}\text{Luas juring AOB} &= \frac{\alpha}{360^\circ} \times \text{luas lingkaran} \\ &= \frac{90^\circ}{360^\circ} \times \pi r^2 \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times 10 \times 10 \\ &= 78,571 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

Jadi, luas juring AOB = 78,571 cm²

Luas tembereng = luas juring AOB – luas segitiga ABO.

$$\begin{aligned}&= 78,571 - \frac{1}{2} \times \text{alas} \times \text{tinggi} \\ &= 78,571 - \frac{1}{2} \times 10 \times 10 \\ &= 78,571 - 50 \\ &= 28,571\end{aligned}$$

Jadi, luas tembereng adalah 28,571 cm²



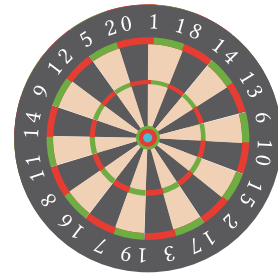
Ayo Berpikir Kritis

Idris mengatakan bahwa apabila dua juring lingkaran memiliki sudut pusat busur yang sama, maka kedua panjang busurnya akan sama panjang. Setujukah kalian dengan pernyataan Idris? Jelaskan jawaban kalian!



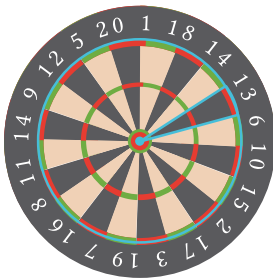
Ayo Berpikir Kreatif

Papan *dart* standar ditampilkan. Setiap bagian papan dikelilingi oleh kawat dan angka menunjukkan skor untuk permainan. Untuk satu lemparan, skor setinggi mungkin dapat dicapai dengan mendaratkan anak panah di bagian paling tengah atau tepat sasaran pada papan *dart*.



Luas juring lingkaran adalah suatu daerah ruang tertutup di dalam batas suatu juring. Papan *dart* dapat dibagi menjadi juring-juring yang kongruen.

- Tentukan jumlah juring yang terdapat pada lingkaran terluar (perhatikan gambar di samping).
- Tentukan besar sudut pusat dan besar busur potong yang dibentuk oleh masing-masing sektor.
- Tentukan perbandingan panjang setiap busur yang dipotong dengan kelilingnya.
- Tentukan perbandingan luas setiap bagian dengan luas lingkaran.
- Tentukan luas yang dibentuk oleh masing-masing juring lingkaran tersebut.



Ayo Menggunakan Teknologi

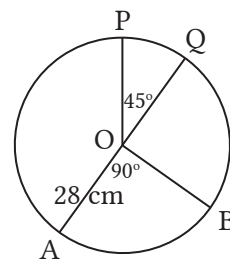
Setelah mempelajari hubungan panjang busur dan luas juring yang dibahas pada buku ini, sekarang kembangkan pengetahuan kalian tentang hubungan

besar sudut pusat lingkaran, panjang busur, dan luas juringnya dengan cara mengunjungi laman di samping. Lakukan percobaan dengan besar sudut dan panjang jari-jari berbeda sebanyak 5 kali percobaan, kemudian tuliskan apa yang dapat kalian simpulkan dari kelima percobaan tersebut.



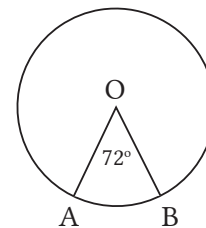
Latihan 2.3

- Berdasarkan gambar di samping, tentukan perbandingan antara:
 - besar $\angle POQ$ dengan $\angle AOB$
 - panjang \widehat{PQ} dengan \widehat{AB}
 - luas juring POQ dengan AOB

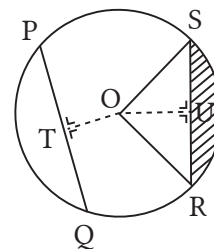


Kemudian, kesimpulan apa yang didapat dari hasil a, b, dan c?

- Diketahui panjang busur AB adalah 6,28 cm, maka bagaimana cara kalian menemukan panjang jari-jari lingkaran tersebut? Jelaskan.

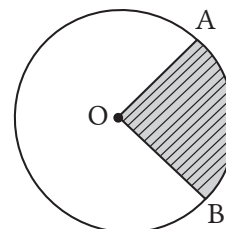


- Pada gambar di samping diketahui panjang jari-jari lingkaran 14 cm, panjang tali busur $RS = 16$ cm, dan besar sudut $ROS = 90^\circ$, maka tentukan panjang dan luas terbentuk:
 - apotema TO ,
 - apotema OU ,
 - juring ROS ,
 - segitiga ROS ,
 - tembereng RS .



- 
Ayo Berpikir Kreatif

Sebuah lingkaran dengan titik pusatnya di titik O memiliki luas daerah yang diarsir sebesar 20% dari luas lingkaran tersebut. Berapa besar $\angle AOB$?



5.



Ayo Berpikir Kritis

Menurut Ahmad, makin besar sudut pusat lingkaran, maka makin besar panjang busur dan luas juringnya. Sementara itu, Durahman menyatakan bahwa makin sempit sudut pusat lingkaran, maka makin kecil panjang busur dan ukuran luas juring lingkarannya. Apakah kalian setuju dengan pendapat Ahmad atau Durahman? Nyatakan sudut pandang kalian yang didukung dengan bukti.



Ayo Berefleksi

Buatlah daftar hal-hal penting yang telah kalian temukan setelah mempelajari panjang busur lingkaran dan juringnya.

1. Bagaimana hubungan sudut pusat lingkaran dengan sudut kelilingnya yang menghadap busur yang sama?
2. Bagaimana hubungan sudut pusat lingkaran dengan panjang busurnya?
3. Bagaimana hubungan sudut pusat lingkaran dengan luas juringnya?
4. Bagaimana hubungan sudut pusat lingkaran, panjang busur, dan luas juringnya?



Uji Kompetensi 2

A. Soal Pilihan Ganda

1. Apabila panjang busur lingkaran adalah 16,5 cm, maka besar sudut pusat lingkaran tersebut dengan diameter lingkaran 42 adalah ($\pi = \frac{22}{7}$)

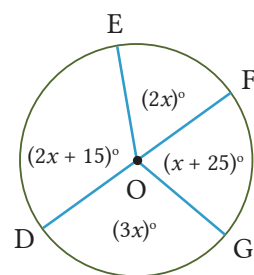
A. 180°	C. 90°
B. 135°	D. 45°
2. Diketahui sebuah busur lingkaran dengan panjang jari-jari 21 cm dan sudut pusat 30° memiliki panjang ... cm. ($\pi = \frac{22}{7}$)

A. 11	C. 110
B. 12	D. 120

- Luas juring lingkaran memiliki besar sudut pusat 90° . Apabila luas juring lingkaran tersebut adalah 78,5, maka jari-jari lingkarannya adalah ... cm. ($\pi = 3,14$)
 - 7
 - 10
 - 49
 - 100
- Panjang busur sebuah lingkaran adalah 44 cm. Apabila sudut pusat busurnya adalah 120° , maka jari-jari lingkaran tersebut adalah ... cm. ($\pi = \frac{22}{7}$)
 - 28
 - 21
 - 14
 - 7
- Luas juring lingkaran diketahui $57,75 \text{ cm}^2$. Apabila sudut pusat yang bersesuaian dengan juring lingkaran tersebut adalah sebesar 60° , maka jari-jari lingkaran adalah cm. ($\pi = \frac{22}{7}$)
 - 7
 - 10,5
 - 14
 - 17,5

B. Soal Uraian

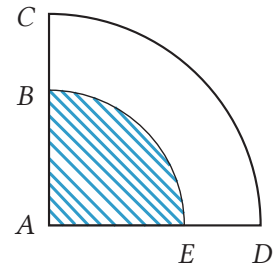
- Pada gambar berikut ini, diketahui panjang busur $EF = 8 \text{ cm}$. Tentukan:
 - nilai x
 - panjang \widehat{DE}
 - panjang \widehat{FG}
 - panjang \widehat{DG}



- 
Ayo Bereksplorasi

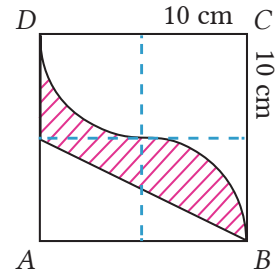
Sebuah pabrik memproduksi biskuit dalam bentuk lingkaran dengan diameter 5 cm. Perusahaan juga ingin memproduksi biskuit dengan ketebalan yang sama tetapi berbentuk lingkaran dengan sudut tengah 90° . Tentukan diameter biskuit sehingga memiliki bentuk yang sama dengan bentuk biskuit lingkaran.

8. Diketahui luas daerah arsiran sebesar setengah luas daerah yang tidak tersir. Tentukan perbandingan panjang AB dengan panjang AC.



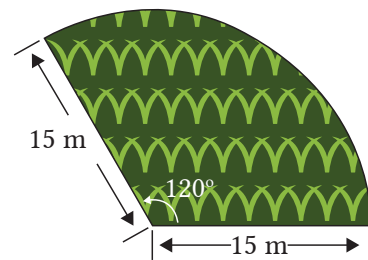
9.  **Ayo Berpikir Kreatif**

Persegi ABCD diketahui terdiri dari empat segi empat yang berukuran sama dengan panjang sisi-sinya sepanjang 10 cm. Berapakah luas daerah yang tersir pada gambar di samping? Jelaskan jawaban kalian.



10.  **Ayo Berpikir Kritis**

Gunakan pengetahuan kalian tentang ukuran derajat busur dan sudut pusat untuk menjawab pertanyaan-pertanyaan berikut yang berkaitan dengan ukuran linier dan ukuran luas pada sistem penyiraman irigasi untuk mengairi lahan pertanian (lihat gambar di samping).



- Berapakah luas bagian sawah yang dialiri air yang merupakan bidang lingkaran dengan jari-jari 15 meter?
- Jika petani ingin memagari bagian lahan ini, berapa panjang pagar yang dibutuhkan?



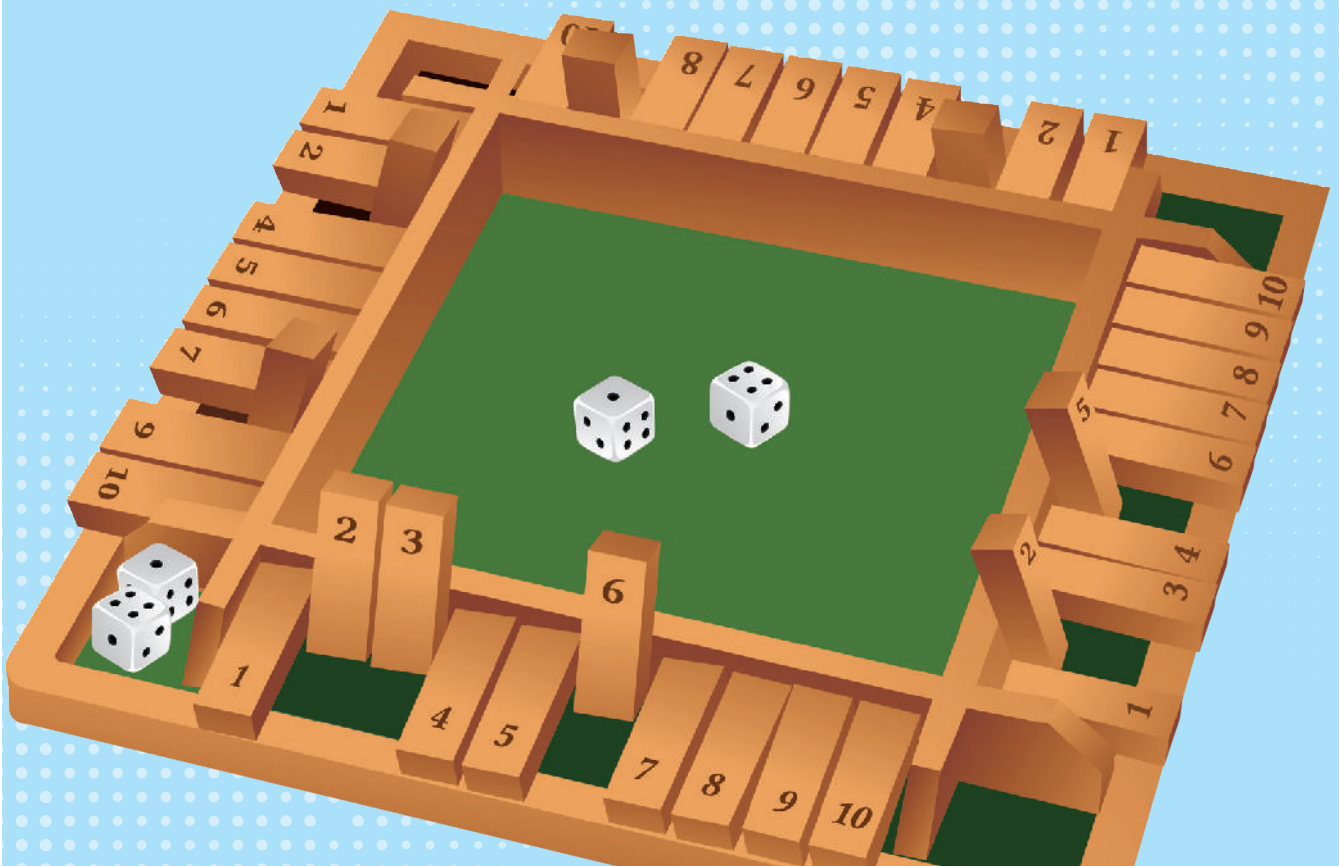
“

Kamu harus serius belajar dari sekarang. Matematika itu butuh latihan. Bukan tiba-tiba bisa. Tidak cukup hanya dengan menghafal rumus. Kamu harus berlatih, berlatih, berlatih.

”

Triani Retno A

Kombinatorik



Tujuan Pembelajaran

Bab ini dapat dipelajari siswa dengan harapan, siswa dapat:

1. Mendeskripsikan aturan pengisian tempat
2. Menentukan hasil dari permutasi
3. Menentukan hasil dari kombinasi
4. Mengevaluasi proses acak yang mendasari percobaan statistik
5. Menggunakan peluang saling lepas, saling bebas, dan bersyarat untuk menafsirkan data

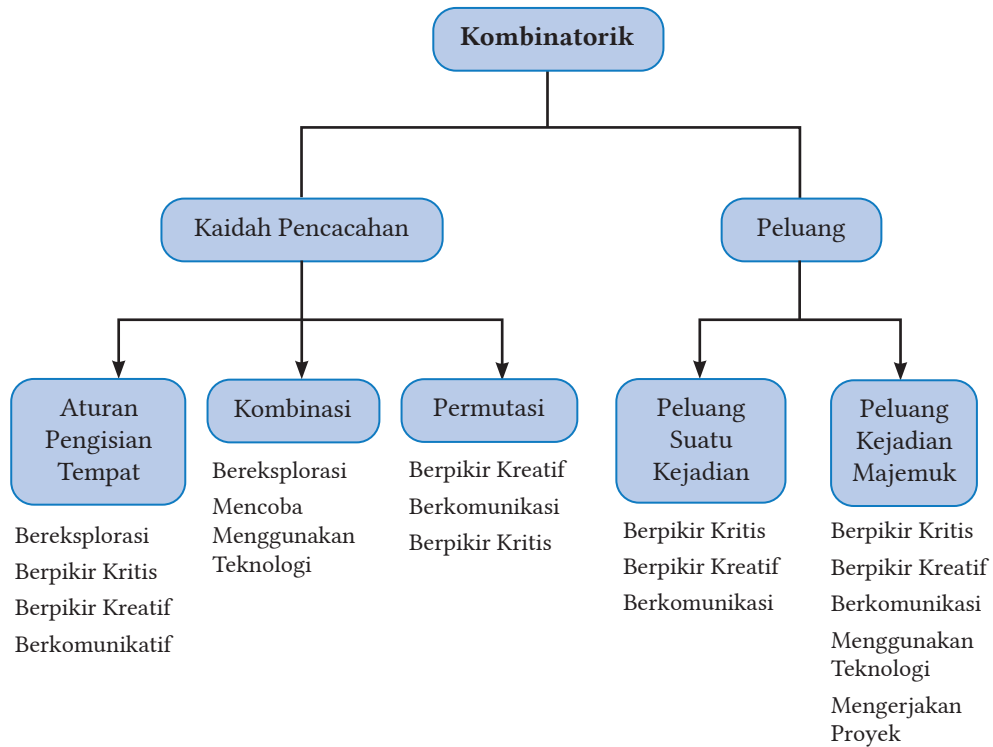


Gambar 3.1 Denah Perumahan Bunga Indah

Pada denah di atas terdapat beberapa rumah yang dapat kita ketahui dan terletak di beberapa jalan. Jika Dani akan berkunjung ke rumah Dino, maka terdapat banyak kemungkinan rute perjalanan yang dapat digunakan Dani menuju ke rumah Dino. Coba analisis banyak kemungkinan rute perjalanan yang digunakan Dani menuju rumah Dino. Banyak kemungkinan rute tersebut dapat diketahui melalui konsep kombinatorik.

Kata Kunci	Pertanyaan Pemantik
<i>Kaidah Pencacahan, Permutasi, Kombinasi, Peluang, Peluang Kejadian Majemuk, Kejadian Majemuk Saling Bebas</i>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Apa itu kaidah pencacahan? 2. Bagaimana perbedaan permutasi dari beberapa objek yang sama dengan permutasi siklis? 3. Mengapa kombinasi lebih lazim daripada permutasi dalam kehidupan sehari-hari? 4. Apa yang dimaksud peluang suatu kejadian majemuk? 5. Bagaimana menentukan kejadian majemuk saling bebas?

Peta Konsep

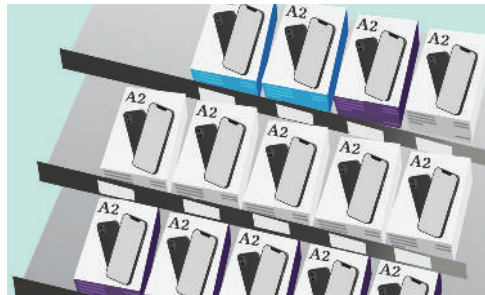


A. Aturan Pengisian Tempat



Ayo Bereksplorasi

Pak Tohir akan membelikan anaknya *handphone* untuk digunakan pembelajaran *online*. Terdapat tiga merek *handphone* yang ditawarkan oleh penjual yaitu **Samusung**, **Viova**, dan **Oppia**. Setiap merek *handphone* tersedia tiga jenis kapasitas RAM yang diberikan, yaitu 4GB, 6GB, dan 8GB. Serta empat jenis warna yang bagus yaitu hitam, putih, silver dan gold.



Gambar 3.2 Handphone yang Dipamerkan

Ketika Pak Tohir akan menentukan pilihan dalam memilih *handphone* yang akan dibeli, dalam pikiran Pak Tohir terdapat beberapa pertimbangan. Ketika mengacu pada merek, Pak Tohir memiliki 3 pertimbangan, dengan memperhitungkan kapasitas RAM sebanyak 3 pertimbangan, serta warna dengan 4 pertimbangan. Coba kalian amati dan perhitungkan, berapa banyak kemungkinan Pak Tohir dalam menentukan pilihan untuk membeli *handphone*?

Aturan Pengisian Tempat

Aturan pengisian tempat terdiri atas tiga cara, yaitu:

1. Aturan Tabel

Contoh Soal 3.1

Seorang anak memiliki 5 kaus kaki dan 3 sepatu. Dengan aturan tabel, banyaknya pasangan kaus kaki dan sepatu yang bisa dipakai anak tersebut sebagai berikut.

		KAUS KAKI (K)				
		K1	K2	K3	K4	K5
SEPATU (S)	S1	S1K1	S1K2	S1K3	S1K4	S1K5
	S2	S2K1	S2K2	S2K3	S2K4	S2K5
	S3	S3K1	S3K2	S3K3	S3K4	S3K5

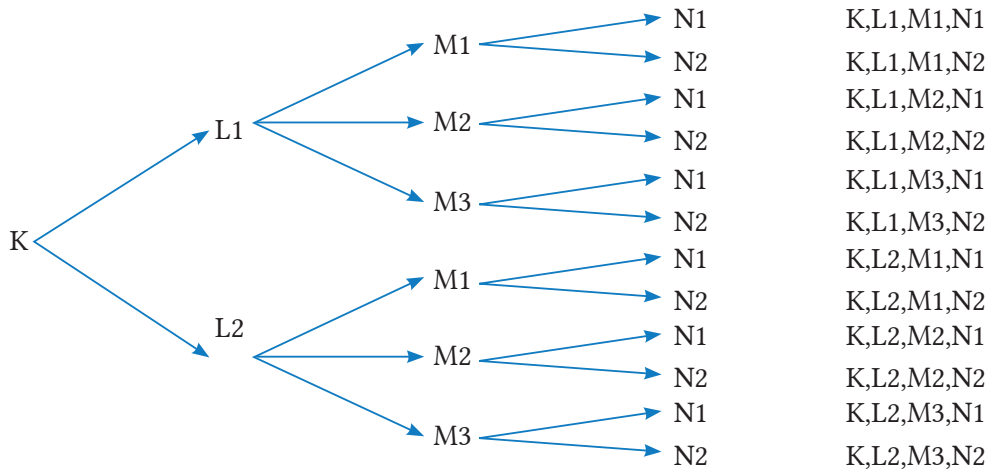
Berdasarkan aturan tabel di atas didapat 15 cara memakai kaus kaki dan sepatu.

2. Aturan Diagram Cabang

Contoh Soal 3.2

Untuk mencapai kota Bandung (N), Ahmad berangkat dari kota Surabaya (K), melalui kota Semarang (L), kemudian kota Bekasi (M). Jika jalan dari kota Surabaya ke kota Semarang ada dua jalan, dari kota Semarang ke Bekasi ada tiga jalan, dan dari Bekasi ke Bandung ada dua jalan, maka banyak rute yang dapat dilalui sebagai berikut.

Permasalahan di atas dapat diketahui dengan mendaftar kemungkinan rute perjalanan yang dapat dilalui oleh Ahmad ketika melakukan perjalanan dari kota Surabaya ke kota Bandung.



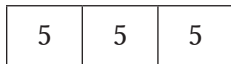
Berdasarkan aturan diagram panah di atas, didapat 12 rute perjalanan yang dapat dilewati dari kota Surabaya (K) ke kota Bandung (L) melalui kota Semarang (M) dan Bekasi (N).

3. Aturan Perkalian Terurut

Contoh Soal 3.3

Terdapat 5 buah angka yaitu 2, 3, 4, 5, dan 6. Banyak bilangan 3 angka yang bisa dibuat dari 5 angka tersebut sebagai berikut.

Apabila angka boleh berulang



$$5 \times 5 \times 5 = 125 \text{ bilangan}$$

Apabila angka tidak boleh berulang



$$5 \times 4 \times 3 = 60 \text{ bilangan}$$



Ayo Berkomunikasi

dan



Ayo Bereksplorasi

Pada suatu pemilihan OSIS terdapat empat calon kandidat untuk mengisi jabatan ketua dan wakil ketua OSIS. Berapa banyak kemungkinan susunan pengurus OSIS?

Petunjuk:

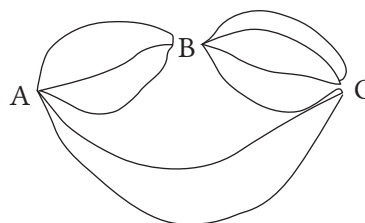
1. Kunjungi tautan <https://tinyurl.com/kaidahperkalian> sebagai bahan diskusi dengan temanmu terkait permasalahan tersebut.
2. Pahami perintah yang ada pada tautan terkait materi dan latihan.
3. Diskusikan dengan temanmu terkait permasalahan.
4. Buat argumentasi dan penjelasan berdasarkan hasil diskusi.
5. Presentasikan hasil diskusi kepada teman yang lain.

Latihan 3.1

1. Seorang siswa memiliki dua pasang sepatu dan lima pasang kaus kaki. Tentukan berapa banyak orang yang memakai sepatu dan kaus kaki sesuai dengan aturan tabel.
2. Achmad dan Budi merupakan calon ketua OSIS di SMA Semangat 45. Sementara Citra, Danita, dan Eko adalah calon wakil ketua. Kemudian terdapat Fitri dan Gina pesaing untuk sekretaris. Tentukan jumlah pasangan potensial pengurus inti OSIS di SMA tersebut dengan menggunakan diagram cabang.
3. Pada Peringatan HUT RI ke-76 yang diselenggarakan oleh RT 04 Desa Makmur terdapat perlombaan lari cepat 100 m. Ahmad, Rendi, Doni, dan Dendi menjadi peserta terakhir dalam putaran final yang akan memenangkan juara I dan II. Tentukanlah banyak susunan pemenang yang akan muncul sebagai juara lomba lari.

4.  **Ayo Berpikir Kreatif**

Gambar di samping mengilustrasikan perjalanan dari kota A ke kota C. Tentukan banyaknya rute kota A ke kota C.



5. Tentukan banyaknya bilangan tiga angka yang dapat dibentuk dari angka 3, 4, 5, 6, dan 7 jika dan hanya jika memenuhi syarat-syarat berikut:
 - a. Apabila angkanya tidak boleh berulang
 - b. Apabila angkanya bisa berulang

Petunjuk

n faktorial, yang kemudian menandakan $n!$, disebut n perkalian bilangan asli berurutan dari 1 ke n atau sebaliknya dari n ke 1. Secara matematis dapat ditunjukkan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}n! &= n(n-1)(n-2)(n-3)\dots(1) \\ &= (1)(2)\dots(n-2)(n-1)n\end{aligned}$$

Contoh:

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

B. Permutasi



Ayo Bereksplorasi

Kelas XIIA SMA Tunas Bangsa memilih pengurus kelas pada tahun ajaran baru. Pengurus kelasnya terdiri atas ketua, wakil ketua, sekretaris, dan bendahara. Contoh susunan pengurus kelasnya tampak disajikan seperti pada Gambar 3.3 berikut.



Gambar 3.3 Struktur Pengurus Kelas

Pada kelas X11A terdapat 8 siswa yang bersedia menjadi pengurus kelas. Berdasarkan gambar 3.3 di atas diketahui bahwa terdapat posisi pengurus yang belum terisi yaitu ketua kelas, wakil ketua kelas, sekretaris, dan bendahara. Apabila yang terpilih menjadi ketua kelas dan wakil ketua kelas adalah Roni dan Andi, maka berapa banyak cara yang mungkin dalam menyusun susunan pengurus yang belum terisi?

Coba Perhatikan!

Banyak cara yang mungkin untuk mengisi susunan pengurus yang belum terisi dapat ditunjukkan sebagai berikut.

Terdapat 8 siswa yang bersedia, dan terdapat 2 siswa yang sudah mengisi susunan pengurus, yaitu Roni dan Andi, sehingga tersisa 6 siswa yang mungkin mengisi 2 susunan pengurus lain yang belum terisi.

Susunan Pengurus	Bendahara	Sekretaris
Banyak Cara	6	5

Jadi, banyak cara yang mungkin untuk membuat susunan pengurus adalah $6 \times 5 = 30$ cara.

Secara matematis, perhitungan banyaknya susunan pengurus tersebut dituliskan sebagai berikut.

$$6 \times 5 = \frac{6 \times 5 \times (4 \times 3 \times 2 \times 1)}{(4 \times 3 \times 2 \times 1)} = \frac{6!}{4!} = \frac{6!}{(6-2)!}$$

Hasil terakhir perhitungan, dapat dinotasikan sebagai berikut.

$$\frac{6!}{(6-2)!} = P(6,2)$$

Berdasarkan perhitungan tersebut kita dapat mengetahui bahwa susunan pengurus kelas yang belum terisi adalah sekretaris dan bendahara yang dapat diisi oleh 6 siswa yang bersedia. Dengan demikian, secara matematis hal ini telah tersusun dan dibaca **permutasi 2 dari 6 objek** yang dinotasikan dengan $P(6,2)$.

Definisi 3.1

Permutasi r item dari n objek umumnya adalah jumlah konfigurasi potensial dari r objek yang diambil dari n objek, di mana $r \leq n$ tidak ditampilkan secara matematis dalam setiap kemungkinan susunan r objek: Elemen permutasi r yang berbeda dari n adalah:

$${}_n P_r = P(n, r) = P_r^n = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$$

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Keterangan:

${}_n P_r$ dibaca Permutasi r objek dari n objek.

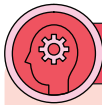
$n!$ Dibaca n faktorial

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$$

Tahukah Kalian

$$1! = 1$$

$$0! = 1$$



Ayo Berpikir Kritis

SMA Budi Mulya memiliki klub Olimpiade Matematika yang akan mempersiapkan siswanya mengikuti olimpiade tingkat nasional. Anggota klub terdiri atas dua siswa laki-laki dan tiga siswa perempuan. Sebagai persiapan, mereka diberikan *try out* kemudian diperingkat berdasarkan nilai ujian. Diasumsikan bahwa tidak ada dua siswa yang dianggap memiliki nilai tes yang sama. Setujukah kalian bahwa banyak susunan peringkat berbeda yang mungkin dihasilkan akan sama dengan banyak susunan ketika siswa laki-laki dan perempuan diperingkat sendiri?

Petunjuk

Rumus umum di atas dapat dimodifikasi berdasarkan konteks yang lebih khusus. Berikut beberapa permutasi khusus.

1. Permutasi n item dari n objek

Permutasi n item dari n objek yang disediakan dapat ditulis menjadi sebagai berikut.

$$\begin{aligned} {}_n P_n &= \frac{n!}{(n-n)!} \\ &= \frac{n!}{0!} \\ &= \frac{n!}{1} \end{aligned}$$

Contoh Soal 3.5

1. Permainan tradisional galasin (gobak sodor) terdiri atas 6 orang. Banyaknya cara untuk menyusun formasi yang terdiri atas 6 orang tersebut adalah

Alternatif penyelesaian:

Diketahui 6 pemain galasin. Maka banyak cara menyusun formasi yang terdiri atas 6 orang adalah $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$ cara.

2. Ani, Ina, Ita, dan Onik merupakan sahabat sejati yang selalu kompak dalam beraktivitas dan pergi jalan-jalan bersama. Pada hari Minggu, mereka akan menonton film di bioskop. Karena mereka terlambat memesan tiket, hanya tersisa 4 kursi yang tersedia secara berdekatan. Ada berapa cara formasi susunan yang teratur yang dapat mereka gunakan?

Alternatif penyelesaian:

Karena ada 4 orang yang menempati 5 kursi bioskop, maka ada $4!$ cara atau cara

Sehingga $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ cara

atau $P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} \dots \Rightarrow P_4^4 = \frac{4!}{(4-4)!} = \frac{4!}{0!} = \frac{4!}{1} = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ cara

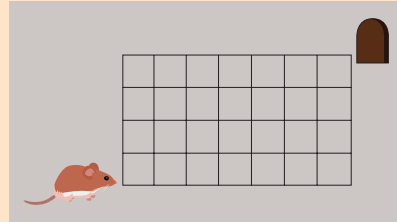
Jadi, banyak cara 4 orang remaja menempati tempat duduknya ada 24 cara.



Ayo Berkomunikasi

Perhatikan gambar berikut!

Seekor tikus akan menuju ke lubang untuk bersembunyi dari kejaran kucing. Diskusikan dengan temanmu, berapa banyak kemungkinan tikus lari dari kejaran kucing menuju lubang persembunyiannya. Presentasikan hasil temuanmu.



2. Permutasi dengan objek yang sama

Jika ada objek yang sama di antara objek yang diatur, prinsip-prinsip berikut dapat menentukan jumlah formasi susunan:

$${}_n P_{r_1, r_2, \dots, r_k} = \frac{n!}{r_1! \times r_2! \times \dots \times r_k!}$$

Keterangan:

r_k = banyak objek ke- k

Contoh Soal 3.6

1. Dalam huruf PALAPA, huruf P terdapat 2 huruf, huruf A terdapat 3 huruf, dan huruf L terdapat 1 huruf. Banyaknya susunan huruf yang berbeda dengan susunan dari huruf P, A, L, P, L, P, dan A adalah $P_{2,3}^6 = \frac{6!}{2! \times 3!} = 60$ susunan huruf.
2. Tentukan banyak susunan sepuluh huruf dari huruf KALIMANTAN!

Alternatif penyelesaian:

Banyaknya susunan 10 huruf yang diambil dari huruf KALIMANTAN, permasalahan ini merupakan permasalahan permutasi berulang

misalkan q_1 = munculnya huruf A, yaitu $q_1 = 3$

q_2 = munculnya huruf N, yaitu $q_2 = 2$

$$\begin{aligned}
 \text{sehingga } P &= \frac{n!}{q_1!q_2!\dots q_k!} \Rightarrow P = \frac{10!}{q_1!q_2!} \\
 &\Rightarrow P = \frac{10!}{3!2!} \\
 &\Rightarrow P = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \\
 &\Rightarrow P = 5.040
 \end{aligned}$$

Jadi, banyaknya susunan huruf KALIMANTAN adalah ada 5.040 cara.

3. Permutasi siklis

Jika 3 orang Abdul (a), Bayu (b), dan Charli (c) duduk berjajar, maka posisi duduk adalah abc , acb , bca , bac , cab , cba . Tetapi jika orang tersebut duduk mengelilingi meja bundar, maka posisi abc , bca , dan cab adalah sama. Juga posisi acb , cba , dan bac sama. Dengan demikian tiga orang a , b , c yang duduk melingkar hanya ada 2 posisi duduk, yaitu abc dan acb . Masalah seperti ini disebut *Permutasi Siklis*.



Gambar 3.4 Posisi Duduk Melingkar pada Meja Bundar

Berdasarkan gambar tiga orang yang duduk di meja bundar, dapat ditunjukkan bahwa

- Banyak permutasi dari 3 objek yang berbeda adalah 3
- Ada tiga jenis permutasi siklis yang sama
- Sehingga banyak susunan 3 objek berbeda dalam permutasi siklis adalah

$$\frac{3!}{3} = \frac{3 \times 2 \times 1}{3} = 2! = (3 - 1)!$$

Secara umum, dapat ditentukan bahwa

- Banyak permutasi dari n objek yang berbeda adalah $n!$
- Ada n jenis permutasi siklis yang sama

- Sehingga banyak susunan n objek berbeda dalam permutasi siklis adalah

$$\frac{n!}{n} = \frac{1 \times 2 \times 3 \dots \times (n-1) \times n}{n} = (n-1)!$$

Apabila n objek disusun secara melingkar (siklis), maka banyak susunan objek dapat ditentukan dengan aturan:

$$P_n = (n-1)!$$



Ayo Berpikir Kritis

Secara matematis, jika terdapat permutasi siklis n objek dari r objek yang berbeda, apa yang dapat kalian temukan dengan menggunakan pemahaman yang sama? Jelaskan pendapatmu!

Contoh Soal 3.7

1. Terdapat lima siswa yang melakukan diskusi dengan duduk secara melingkar. Banyak susunan yang bisa dibentuk dari lima siswa tersebut adalah $P_5 = (5-1)! = 4! = 24$ susunan.
2. Terdapat lima siswa dan tiga siswi duduk mengelilingi suatu meja bundar, tentukan banyaknya cara duduk jika
 - a. Duduk bebas
 - b. Tidak ada siswi duduk berdampingan

Alternatif penyelesaian:

Diketahui:

1. Terdapat lima siswa dan tiga siswi duduk mengelilingi meja bundar, permasalahan ini termasuk permutasi siklis

$$P_{siklis}^n = \frac{n!}{n} = (n-1)$$

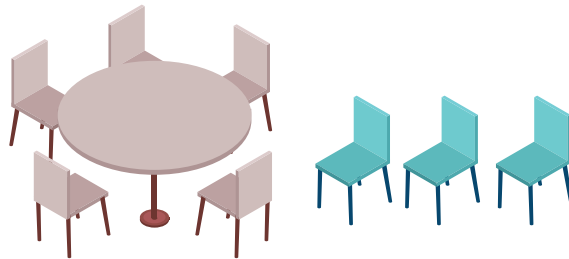
$$P_{siklis}^8 = (8-1)$$

$$= 7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$= 5.040$$

Jadi, banyak cara duduk apabila duduknya bebas adalah ada sebanyak 5.040 cara.

- Setelah siswa duduk, siswi mempunyai pilihan sebanyak lima posisi. Gambar di bawah, Kursi dekat meja menunjukkan kemungkinan posisi yang sudah ditempati siswa.



Jika kursi dekat meja menunjukkan kursi yang dapat ditempati oleh siswa, sedangkan kursi lain akan ditempati oleh siswi dengan mengisi posisi di antara kursi yang diduduki siswa. Karena dua siswi tidak boleh duduk berdampingan, maka siswi kedua mempunyai empat pilihan dan siswi ketiga mempunyai tiga pilihan, sehingga $4! \times 5 \times 4 \times 3 = 4! \times 60 = 24 \times 60 = 1440$

Jadi, banyak cara duduk apabila tidak ada siswi yang duduknya berdampingan adalah sebanyak 1.440 cara.

Latihan 3.2

- Sebuah restoran memiliki 8 juru masak. Dari 8 orang tersebut, 3 orang telah dialokasikan untuk membuat gulai, rendang, dan rawon secara acak. Tentukan berapa banyak cara juru masak dipilih.
- Ada tujuh orang siswa akan membentuk garis lurus. Tentukan banyaknya susunan barisan yang mungkin terjadi.

-  **Ayo Berpikir Kreatif**

Panitia percepatan vaksinasi di Desa Sukatani berencana mencetak nomor antrean peserta vaksin yang terdiri atas 1 huruf dan 3 angka. Apabila nomor antrean tersebut tidak memuat angka dan huruf yang sama, tentukan banyak kemungkinan dan berikan penjelasanmu dengan beberapa syarat berikut.

- Jika angka yang digunakan adalah bilangan prima kurang dari 10 dan huruf yang digunakan adalah huruf vokal
- Jika memuat bilangan genap dan huruf dari kata CORONA

4.  **Ayo Berpikir Kreatif**

Suyoko adalah seorang budayawan yang akan mengadakan pameran karya-karya yang sudah pernah dibuat seperti lukisan, patung, dan lain sebagainya. Terdapat 10 lukisan prioritas yang akan diletakkan di beranda utama galeri pamerannya. *Event Organizer* (EO) sebagai penanggung jawab kegiatan pameran menyarankan kepada Suyoko dengan syarat berikut.

- a. Urutan lukisan tidak diperhitungkan
- b. Terdapat 4 lukisan yang selalu berdampingan

Berdasarkan pernyataan tersebut, tentukan banyak kemungkinan susunan pemasangan lukisan prioritas tersebut.

5. Slogan Bhinneka Tunggal Ika ada pada Garuda Pancasila yang menjadi lambang negara Indonesia. Simbolnya adalah burung dengan kepala Garuda. Tentukan susunan 6 huruf dari huruf "GARUDA".

C. Kombinasi

 **Ayo Bereksplorasi**

Desa Sukatani mengadakan lomba futsal antar-RT dalam rangka memeriahkan peringatan kemerdekaan HUT RI ke-76. Pak Doni adalah ketua RT 02 yang sangat giat dalam mengajak warganya untuk mengikuti perlombaan tersebut. Warga yang bisa dan bersedia mengikuti perlombaan futsal tersebut sebanyak 5 orang dan akan dibuat formasi pemain seperti yang ditunjukkan pada gambar berikut.



Gambar 3.5 Bagan Pemain Futsal

Pak Doni yang sekaligus sebagai manajer tim akan menentukan 2 orang sebagai *flank* dalam melakukan serangan terhadap lawan. Jika warga yang mengikuti futsal adalah Pak Daus, Pak Roni, Pak Agus, Pak Agung, dan Pak Dika, berapa banyak cara yang dapat digunakan Pak Doni dalam memilih dua orang sebagai *flank*?

Berdasarkan kasus di atas, susunan *flank* yang mungkin adalah sebagai berikut.

Daus – Roni

Roni – Agus

Agus – Agung

Agung – Dika

Agung – Agus

dan seterusnya

Pada susunan di atas diketahui bahwa terdapat beberapa pasangan yang akan bertindak sebagai *flank*. Coba perhatikan pasangan Agus – Agung dan Agung – Agus, meskipun tertulis pada pasangan yang berbeda, sesungguhnya pasangan tersebut berisi orang yang sama dalam penunjukan sebagai *flank*. Sehingga, kasus seperti di atas disebut sebagai kombinasi.

Definisi 3.2

Kombinasi adalah susunan dari suatu objek tertentu yang *tidak memperhatikan urutan*.

Misalnya kombinasi kata KAMU akan sama dengan kombinasi kata AMUK karena memiliki huruf-huruf penyusun yang sama yaitu K, A, M, U. Secara formal dituliskan bahwa **kombinasi k objek dari n objek yang diketahui** merupakan susunan k objek dari n objek yang diketahui (dengan $k \leq n$).

Perhatikan ilustrasi kemungkinan susunan 2 pemain *flank* pada pemain futsal dari 5 orang pemain yang ada. Mengingat konsep permutasi sebelumnya, permutasi 2 objek dari 5 objek yang diketahui dituliskan $P(5, 2)$. Banyak susunannya yang sama dari setiap pasangan 2 objek adalah $2!$ (pada kasus di atas, misalkan susunan pasangan Agus – Agung sebenarnya orangnya sama

dengan pasangan Agung – Agus). Sehingga, banyak kombinasi 2 objek dari 5 objek yang dinotasikan $C(5, 2)$ adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} C(5, 2) &= \frac{\text{Banyaknya permutasi 2 objek dari 5 objek}}{\text{Banyak susunan yang sama}} \\ &= \frac{P(5, 2)}{2!} \\ &= \frac{5!}{(5 - 2)! 2!} \end{aligned}$$

Secara umum, pengambilan k objek dari n objek yang berbeda menghasilkan permutasi k objek dari n objek dituliskan $P(n, k)$. Banyaknya susunan yang mungkin dan sama dari pengambilan k objek adalah $k!$, dengan demikian banyaknya kombinasi dari k objek dari n objek berbeda dinotasikan dengan $C(n, k)$ adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} C(n, k) &= \frac{\text{Banyaknya permutasi } k \text{ objek dari } n \text{ objek}}{\text{Banyak susunan yang sama}} \\ &= \frac{P(n, k)}{k!} \\ &= \frac{n!}{(n - k)! k!} \end{aligned}$$

Umumnya, jika k objek diambil dari n objek berbeda, maka k objek dari n objek adalah permutasi yang ditulis $P(n, k)$. Banyak kombinasi k objek dari n objek adalah $k!$ Uraian berikut ini merupakan banyak cara kombinasi k objek dari n objek yang dinotasikan dari $C(n, k)$.

Asumsikan r adalah bilangan bulat non-negatif. Banyaknya himpunan bagian dari B yang merupakan bagian dari objek r harus merupakan kombinasi dari r himpunan B yang terdiri dari n objek yang berbeda. Kombinasi juga digambarkan sebagai susunan r objek tertentu dari n hal yang ada diatur (dipilih).

Petunjuk

Perhatikan bahwa apabila $k > n$, didefinisikan $C(n, k) = 0$. Apabila $n = 0$ dan k bilangan bulat positif, maka $C(0, k) = 0$. Hal tersebut akan berakibat bahwa $C(0, 0) = 1$. Fakta berikutnya untuk bilangan bulat non-negatif n berlaku $C(n, 0) = 1$, $C(n, 1) = n$, dan $C(n, n) = 1$.

Contoh Soal 3.8

Sebuah pesta dihadiri oleh lima pasang pengunjung. Jika semua orang kecuali pasangannya tidak saling mengenal dan berjabat tangan dengan orang yang tidak dikenalnya, berapa kali jabat tangan yang terjadi?

Alternatif penyelesaian:

Perhatikan bahwa ada sepuluh orang di pesta itu karena masing-masing dari mereka adalah pasangan, sehingga dapat diuraikan sebagai berikut.

$$C_2^{10} - 5 = \frac{10!}{(10-2)!2!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{8! \cdot 2!} - 5 = 45 - 5 = 40$$

Jadi, banyak jabat tangan yang terjadi adalah 40 kali.

Contoh Soal 3.9

Pada sebuah kotak tertentu berisi lima bola merah, empat bola putih, tiga bola kuning, dan empat bola hijau. Berapa cara pengambilan secara acak untuk dua bola merah, tiga bola putih, dan satu bola kuning?

Alternatif penyelesaian:

Dalam 5 bola merah, ada $C_2^5 = 10$ cara untuk memilih 2 bola merah.

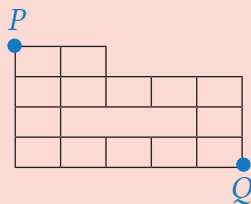
Dalam 4 bola putih, ada $C_3^4 = 4$ cara untuk memilih 3 bola putih.

Dalam 3 bola kuning, ada $C_1^3 = 3$ cara untuk memilih 1 bola kuning

Jadi, banyak cara memilih dua bola merah, tiga bola putih, dan satu bola kuning secara acak sebanyak $10 \times 4 \times 3 = 120$ cara.

**Ayo Berpikir Kritis**

Rino melakukan perhitungan terkait banyaknya jalan terpendek dari P ke Q adalah 126 cara sesuai dengan gambar berikut.



Banyaknya cara tersebut didapatkan dengan menggunakan rumus berikut. $C_r^n = \frac{n!}{(n-r)!r!}$. Setujukah kalian dengan pendapat Rino?



Ayo Menggunakan Teknologi

Kunjungi tautan berikut untuk memahami dan belajar terkait permutasi dan kombinasi.



Tautan 1: <https://tinyurl.com/permutasidankombinasi1>



Tautan 2: <https://tinyurl.com/permutasikombinasi1>

Petunjuk

Pada tautan 1

1. Gunakan tautan 1: <https://tinyurl.com/permutasidankombinasi1> untuk belajar dan memahami lebih lanjut terkait materi permutasi dan kombinasi.
2. Baca dan pahami dengan baik.

Pada tautan 2

1. Gunakan tautan 2: <https://tinyurl.com/permutasikombinasi1> untuk mengetahui hasil dari permutasi dan kombinasi.
2. Pada bagian permutasi di tautan tersebut, kalian dapat menentukan hasil dari permutasi dengan menggerakkan titik (*sleder*) atau mengetikkan nilai n dan nilai r pada kolom yang disediakan.
3. Pada bagian kombinasi di tautan tersebut, kalian dapat menentukan hasil dari kombinasi dengan menggerakkan titik (*sleder*) atau mengetikkan nilai n dan nilai r pada kolom yang disediakan.

Kombinasi Berulang



Ayo Bereksplorasi

Kevin adalah salah satu atlet kebanggaan Indonesia yang selalu menjaga kebugaran jasmani dengan olahraga setiap hari dan menjaga pola makan sebagai asupan nutrisi dalam menjaga stamina tubuhnya. Pada saat mengikuti TC (*training center*) dalam menghadapi kejuaraan tingkat Asia, pihak panitia TC menyiapkan buah-buahan sebagai asupan nutrisi yang mengandung banyak vitamin seperti apel, jeruk, dan pisang pada sebuah keranjang buah. Pelatih mengharuskan Kelvin memakan 4 buah dalam sehari. Jika Keranjang buah setidaknya berisi 4 buah dari setiap jenis buah, maka tentukan banyak cara memilih empat buah dari keranjang yang dapat dilakukan Kelvin untuk dapat dimakan setiap harinya?

Berdasarkan uraian di atas dapat diilustrasikan seperti berikut.



Tabel 3.1 Kemungkinan Cara Mengambil Buah dari Keranjang

Kemungkinan
[4 apel] [4 jeruk] [4 pisang] [3 apel, 1 jeruk]
[3 apel, 1 pisang] [3 jeruk, 1 apel] [3 pisang, 1 jeruk]
[3 jeruk, 1 pisang] [3 pisang, 1 apel] [2 apel, 2 jeruk]
[2 jeruk, 2 pisang] [2 pisang, 2 apel]
[2 apel, 1 jeruk, 1 pisang] [2 jeruk, 1 apel, 1 pisang]
[2 pisang, 1 apel, 1 jeruk]

Tabel di atas merupakan kemungkinan cara mengambil buah dari keranjang. Apa yang dapat kalian temukan dan berapa banyak susunan cara yang mungkin?

Berdasarkan tabel di atas diketahui bahwa terdapat 15 cara, selanjutnya kita perhatikan misalnya, buah apel dan jeruk masing-masing terambil dua kali.

Pada ilustrasi di atas sebenarnya dapat dituliskan jika

n = jenis buah dan

r = pengambilan,

maka $n = 3$ dan $r = 4$. sehingga, kemungkinannya adalah

$${}_{(n+k-1)}C_k = {}_{(3+4-1)}C_4 = {}_6C_4 = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2 \times 1} = 3 \times 5 = 15 \text{ cara}$$

Definisi 3.3

Misalkan r buah bola berwarna sama dan n buah kotak

- i. Maksimal satu bola dapat dimasukkan ke dalam setiap kotak. Banyak cara untuk mendapatkan bola: $C(n, r)$
- ii. Jika lebih dari satu bola yang mungkin ada di setiap kotak (tidak ada batasan jumlah bola), maka jumlah cara mendapatkan bola: $C(n + r - 1, r)$.

$$C(n + r - 1, r) = C(n + r - 1, n - 1).$$

Contoh Soal 3.10

Terdapat 20 apel dan 15 jeruk untuk dibagikan kepada 5 orang anak. Jika lebih dari satu apel atau jeruk atau tidak ada sama sekali yang dapat diperoleh oleh setiap anak, maka berapakah banyak cara yang dapat dibagi terhadap buah tersebut?

Alternatif penyelesaian:

Soal ini termasuk contoh soal kombinasi berulang, untuk itu perhatikan penyelesaian soal berikut ini.

Bentuk umum dari kombinasi pengulangan: $C(n + r - 1, r)$

Diketahui $n = 5$, $r_1 = 20$ (apel) dan $r_2 = 15$ (jeruk)

$C(n + r_1 - 1, r_1) \Rightarrow$ Membagi 20 apel kepada 5 anak: $C(5 + 20 - 1, 20)$ cara,

$C(n + r_1 - 1, r_1) \Rightarrow$ Membagi 15 jeruk kepada 5 anak: $C(5 + 15 - 1, 15)$ cara.

Sehingga cara pembagian dari kedua buah tersebut adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} C(5 + 20 - 1, 20) \times C(5 + 15 - 1, 15) &= C(24, 20) \times C(19, 15) \\ &= \frac{24!}{(24 - 20)! \cdot 20!} \times \frac{19!}{(19 - 15)! \cdot 15!} \times \\ &= 23 \times 22 \times 21 \times 19 \times 6 \times 17 \times 2 \\ &= 10.626 \times 3.876 \\ &= 41.186.376 \end{aligned}$$

Jadi, jumlah cara pembagian yang dapat dilakukan adalah 41.186.376 cara.



Tahukah Kalian

Kombinasi berulang juga dapat mengatasi masalah dalam perhitungan jumlah jawaban persamaan linier. Kita dapat menyatakan bahwa $x_1 + x_2 + \dots + x_r = n$ adalah persamaan. Jika x_1 adalah bilangan bulat non-negatif, berapa banyak cara penyelesaian yang mungkin? Permasalahan ini sesuai dengan pembagian menjadi r lokasi dari n item identik. Banyaknya solusi adalah ${}_{n+r-1}C_n$.

Contoh Soal 3.11

Tentukan banyak solusi bilangan bulat non-negatif dari persamaan $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$!

Alternatif penyelesaian:

Soal ini bisa dikerjakan juga dengan kombinasi berulang, yakni:

Diketahui $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$, artinya adalah $n = 7$ dan $r = 4$

$$\begin{aligned} {}_{n+r-1}C_n &= {}_{7+4-1}C_7 \\ &= {}_{10}C_7 \\ &= 120 \end{aligned}$$

Jadi, banyak solusi bilangan bulat non-negatif dari persamaan tersebut adalah 120 cara.



Ayo Berpikir Kritis

Aysha dibelikan koper oleh ayahnya yang dilengkapi dengan kode kunci pengaman (*password*) tiga angka.

1. Setujukah kalian bahwa kode 012 sama dengan 021?
2. Ada berapa banyak kemungkinan kode kunci yang dapat dibuat?
3. Mengapa kode kunci pengaman dengan tiga angka lebih aman dibanding dengan dua angka?

Latihan 3.3

1. Suatu kelas terdiri atas 15 putra dan 10 putri.
 - a. Tentukan banyak kemungkinan pengiriman wakil kelas yang terdiri 5 orang.
 - b. Tentukan banyak kemungkinan pengiriman wakil kelas yang terdiri 3 putra dan 2 putri.
2. Dari 52 kartu diambil 5 sembarang. Hitung banyaknya kemungkinan bila semuanya sejenis dan hitung juga bila harus ada tepat tiga AS.



3.



Ayo Berpikir Kreatif

Ada 8 dari 10 pertanyaan tes yang harus dijawab oleh siswa dengan 5 jawaban pertama. Berapa banyak pilihan yang ada bagi siswa untuk memilih pertanyaan untuk dikerjakan?

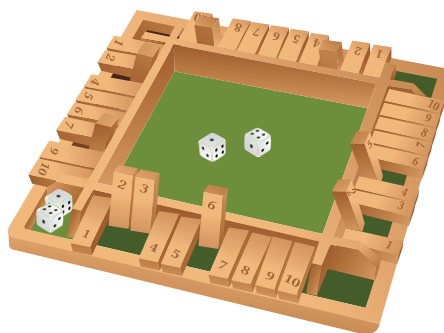
4. Diketahui 7 titik A, B, C, D, E, ..., G dan tidak ada titik yang segaris. Tentukan
 - a. Banyaknya segitiga yang dapat dibuat
 - b. Banyaknya segitiga yang mempunyai titik A sebagai titik sudut
5. Yanti adalah desainer pakaian yang akan memadukan pernak-pernik dengan gaya kekinian. Terdapat 5 jenis pernak-pernik berwarna merah, kuning, biru, hijau, dan putih. Jika Yanti hanya memadukan tiga warna pernak-pernik dengan desainnya yang sekarang, berapa banyak jenis pernak-pernik yang bisa dihasilkan?

D. Peluang Suatu Kejadian



Ayo Bereksplorasi

Pada suatu permainan *shut the box* terdapat dua buah dadu dilempar secara bersama-sama untuk mendapatkan total angka yang nantinya akan disusun berdasarkan angka-angka yang terdapat pada kepingan angka. Rudi berkeinginan memenangkan permainan sehingga dia memiliki strategi dengan menghitung kemungkinan dadu yang akan dilempar berjumlah 9 atau 10. Coba bantu Rudi menghitung peluangnya.



Gambar 3.6 Papan Permainan *Shut the Box*

Dalam rangka membantu Rudi memenangkan permainan, kita dapat menghitung peluang dari pelemparan dua dadu yang muncul dengan jumlah 9 atau 10. Akan lebih mudah menghitungnya apabila menggunakan cara sebagai berikut

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)

	1	2	3	4	5	6
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Berdasarkan perhitungan di atas dapat diketahui bahwa banyaknya kemungkinan yang terjadi adalah 36, kemudian peluang munculnya mata dadu berjumlah 9 disebut A dan peluang muncul mata dadu 10 disebut B.

Secara matematis dituliskan bahwa

Banyaknya anggota $n(S) = 36$

Peluang munculnya mata dadu berjumlah 9 (A) = (6,3), (5,4), (4,5), (3,6)

$$n(A) = 4$$

Peluang munculnya mata dadu berjumlah 10 (B) = (6,4), (5,5), (4,6)

$$n(B) = 3$$

Peluang muncul jumlah mata dadu 9 atau 10

Peluang (A atau B) = $P(A) + P(B)$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} \\
 &= \frac{4}{36} + \frac{3}{36} \\
 &= \frac{7}{36}
 \end{aligned}$$

Berdasarkan ilustrasi di atas dapat diketahui bahwa peluang muncul mata dadu 9 atau 10 adalah $\frac{7}{36}$.

Peluang

Diketahui bahwa A adalah himpunan bagian dari ruang Sampel (S), kejadian A disebut kejadian yang diinginkan atau hasil yang diinginkan. Peluang 1 dalam ruang sampel sama dengan total semua bobot. Untuk menentukan peluang kejadian A , semua bobot titik sampel di A digabung. Angka ini disebut peluang A ditulis $P(A)$. Rentang probabilitas untuk A atau $P(A)$ dimulai dari 0 hingga 1 atau

$$0 \leq P(A) \leq 1 \text{ dan } P(A) + P(A^c) = 1$$

Jika n adalah banyak titik pada daerah sampel S dari percobaan, dan A adalah kejadian dengan banyaknya x dalam percobaan, maka peluang kejadian A dapat dituliskan. Jika hasil percobaan terjadi n kali dan x kejadian A (hasil yang diinginkan) dari hasil potensial, maka

$$P(A) = \frac{x}{n}$$

Selanjutnya, konsep peluang dapat digambarkan sebagai berikut.

Misalkan S adalah ruang sampel untuk sebuah eksperimen di mana setiap anggota S memiliki peluang yang sama untuk terlibat. Apabila A adalah kejadian di mana A adalah himpunan bagian dari S , peluang terjadinya A sama dengan:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$n(A)$ adalah jumlah elemen dalam himpunan A

$n(S)$ adalah jumlah elemen dalam himpunan ruang sample S



Tahukah Kalian

Permainan *Shut the box* adalah sebuah permainan yang dapat dimainkan oleh 4 orang pemain yang permainannya terdiri atas dua dadu dan kepingan angka.

Cara bermain:

1. Sebuah permainan dimainkan dalam 10 putaran. Dalam setiap putaran, setiap pemain memiliki satu giliran.
2. Para pemain bergiliran dan melempar dadu sampai mereka tidak bisa menurunkan angka lagi.
3. Pemain pertama melempar kedua dadu: pemain kemudian memiliki beberapa kemungkinan solusi dan dapat menurunkan satu atau lebih angka selama jumlahnya sesuai dengan jumlah yang ditampilkan pada dua dadu.

Misalnya: Anda melempar dua dadu dan muncul angka 2 dan 5.

Jadi, total kedua dadu menjadi 7 dan Anda dapat menutup kepingan angka:

- entah 7,
- atau 2 dan 5,
- atau 6 dan 1,
- atau 3 dan 4,
- atau 4, 2, dan 1.

Selanjutnya, Anda melempar kedua dadu itu berulang-ulang, sampai habis, yaitu sampai tidak ada kombinasi angka yang dapat diturunkan untuk mencapai total pada dadu. Ini mengakhiri giliran Anda. Tambahkan jumlah total yang tersisa dan catat poin.

Pemenangnya adalah pemain dengan jumlah poin terendah di akhir dari 10 putaran.

Contoh Soal 3.12

Empat kali berturut-turut dua koin dilempar. Tentukan peluang muncul angka pertama kali pada lemparan keempat.



Gambar 3.7 Dua Mata Uang Logam

Alternatif penyelesaian:

Langkah awal: tentukan semua hasil yang mungkin (ruang sampel) dari pelemparan dua koin tersebut.

Pada pelemparan pertama, semua hasil yang mungkin $\{AA, AG, GA, GG\}$ ada sebanyak 4 kemungkinan. (dapat dilihat pada tabel berikut)

		Mata Uang II		
		A/G	A	G
Mata Uang I	A	AA	AG	
	G	GA	GG	

Begitupun pada pelemparan kedua, ada 4 kemungkinan

- Pada pelemparan ketiga ada 4 kemungkinan, dan
- Pada pelemparan keempat ada 4 kemungkinan

Jadi, banyaknya semua hasil yang mungkin dari empat kali pelemparan sebanyak

$$4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^4$$

Misalkan N adalah kejadian munculnya *angka* (A) pertama kali pada pelemparan keempat.

Maka $N = \{AA, AG, GA\}$, maka $P(N) = \frac{3}{4^4}$

Jadi, peluang munculnya angka pertama kali pada pelemparan ke-4 adalah $\frac{3}{4^4}$.

Contoh Soal 3.13

Sebuah perusahaan minuman mengadakan program promo hadiah dalam rangka merayakan HUT perusahaan serta sebagai strategi pemasaran untuk meningkatkan penjualan. Promo hadiah dapat ditemukan konsumen pada setiap kotak susu yang terjual, satu dari empat kriteria hadiah. Jika Desi membeli empat kotak susu, tentukan peluang Desi mendapatkan semua kriteria hadiah.

Alternatif penyelesaian:

Karena setiap hadiah yang dimuat dalam setiap kotak susu diambil secara acak, maka dalam setiap kotak susu terdapat 4 kemungkinan kriteria hadiah yang dimuat, sehingga banyaknya semua hasil yang mungkin dari 4 kotak susu atau banyaknya anggota Ruang Sampel adalah $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$.

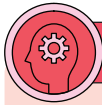
Sedangkan banyaknya hasil mungkin agar Desi mendapatkan semua kriteria hadiah (4 kriteria) adalah **Permutasi dari 4 unsur yang berbeda** yaitu $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.

Sehingga peluang Desi mendapatkan semua kriteria hadiah dalam empat kotak susu adalah:

Diketahui: $n(S) = 256$ dan $n(A) = 24$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \Rightarrow P(A) = \frac{24}{256} = \frac{3}{32}$$

Jadi, peluang Desi mendapatkan semua seri buku hadiah adalah $\frac{3}{32}$.



Ayo Berpikir Kritis

Seorang pembudi daya ikan baru saja menambahkan 60 ekor ikan ke dalam kolamnya. Akibat hujan deras dua hari sebelumnya, kolam ikan kebanjiran; pembudi daya ikan berusaha memperkirakan jumlah ikan di kolam saat ini dengan cara menangkap dan menghitungnya. Awalnya, ia menangkap hingga 30 ekor ikan dan memberi tanda pada masing-masing ikan sebelum melepaskannya kembali ke kolam. Keesokan harinya, ia menangkap 40 ikan, termasuk dua ikan bertanda. Pembudi daya ikan yakin hasil tangkapannya tidak akan berkurang. Apakah Anda setuju dengan pendapat pembudi daya ikan tersebut?



Penguatan Karakter

Seorang siswa SMA kelas XII rajin berpuasa. Dia melaksanakan puasa Daud (sehari puasa dan sehari tidak, demikian seterusnya) dan puasa Senin-Kamis sehingga kadang ada 3 hari berturut-turut dia berpuasa, misalkan hari Minggu, Senin, dan Selasa. Hari Minggu dan Selasa puasa Daud dan Seninnya puasa Senin-Kamis. Kejadian ini bisa menggunakan materi peluang untuk mengetahui ada berapa banyak kemungkinan dia berpuasa 3 hari berturut-turut dalam satu tahun.

Latihan 3.4

1. Terdapat satu keluarga, yaitu ayah, ibu, dan tiga anak. Pada bulan April, ibu lahir. Seberapa besar kemungkinan anggota keluarga lainnya juga lahir di bulan April juga?



Ayo Berpikir Kreatif

2.

Rombongan Indonesia pada tahun 2022 akan mengirim delegasi untuk tingkat SMA di *International Mathematical Olympiad* (IMO). Terdapat siswa sekolah menengah yang disiapkan terdiri dari enam siswa bidang Aljabar dan empat siswa bidang Komputasi selanjutnya harus dipilih secara acak dari sepuluh kandidat yang ada. Berapa kemungkinan peluang terpilih dari delegasi IMO tersebut terdiri dari dua siswa Aljabar atau satu siswa Komputasi?

3. Pada suatu daerah terdapat 400 lansia. Peluang seorang lansia terserang Covid-19 di suatu daerah tersebut adalah 0,3. Berapa banyaknya lansia yang diperkirakan terserang Covid-19?
4. Nomor baru di setiap sisi dialokasikan ke dua dadu bersisi enam. Jumlah dadu pertama adalah 1, 1, 2, 3, 3, 3. Angka pada mata dadu kedua adalah $-1, -1, -2, -2, -3$. Berapa peluang munculnya jumlah angka positif pada kedua sisi dadu ketika dilempar secara bersamaan?
5. Ada tiga kelereng merah, empat hijau, dan lima biru. Berapakah kemungkinan peluang dari ketiga kelereng yang akan dikeluarkan dari kotak tersebut?
 - a. Semua kelereng merah
 - b. Semua kelereng biru
 - c. Dua merah dan satu hijau
 - d. Satu berwarna merah, satu berwarna hijau, dan satu berwarna biru

E. Peluang Kejadian Majemuk

Pada setiap pertandingan sepak bola ketika akan dimulai, wasit selalu memulai dengan pelantunan koin untuk posisi lawan main. Begitu juga pelantunan dadu ketika kegiatan acara peringatan Hari Kemerdekaan 17 Agustus di tingkat RT/RW.























Gambar 3.8 Dadu dan Koin



Ayo Bereksplorasi

Perhatikan dengan cermat Gambar 3.8 di atas, kemudian coba kalian lakukan aktivitas pelantunan sebuah koin dan dadu secara bersamaan, Apabila hasil percobaan pelantunan kalian dilakukan dengan benar, maka hasil pelantunan yang mungkin terjadi dapat diuraikan pada Tabel 3.2 berikut.

Tabel 3.2 Pelanturan Satu Koin dan Dadu

Dadu \ Koin						
 (A)						
 (G)						

Sehingga kemungkinan yang akan terjadi di antaranya yaitu $\{(A, 1); (A, 2); (A, 3); (A, 4); (A, 5); (A, 6); (G, 1); (G, 2); (G, 3); (G, 4); (G, 5); (G, 6)\}$. Selanjutnya tuliskan istilah matematisnya berdasarkan hasil eksplorasi yang kalian diskusikan.

Definisi 3.4

Kejadian majemuk adalah kombinasi dari dua atau lebih kejadian yang terpisah dan berbeda. Kejadian majemuk juga bisa dikatakan merupakan suatu kejadian yang menggabungkan dua atau lebih kejadian sederhana. Akan ditentukan kemungkinan kejadian majemuk menggunakan prosedur antar-set. Irisan himpunan ini adalah hubungan dua himpunan dengan dua himpunan.



Ayo Berpikir Kritis

Setelah kalian melakukan kegiatan Ayo Bereksplorasi di atas, coba kalian pikirkan jawaban dari 2 permasalahan berikut:

1. Rudi bertanya kepada Anwar tentang apa yang mungkin terjadi pada kegiatan tersebut, yaitu paling sedikit ada berapa banyakkah dalam suatu kejadian yang dapat membentuk

kejadian majemuk? Coba kalian bantu Anwar untuk menjawab pertanyaan tersebut.

2. Setelah Anwar menjawab pertanyaan dari Rudi, Anwar bertanya balik kepada Rudi, yaitu hubungan apa sajakah yang dapat memungkinkan terjadi pada kejadian majemuk? Coba kalian bantu juga Rudi untuk menjawab pertanyaan tersebut.

Agar pemahaman kalian terhadap materi kejadian majemuk lebih luas pengetahuannya, maka diskusikan dan pelajarilah uraian pada contoh dan alternatif penyelesaian yang disajikan.

Contoh Soal 3.14

Sebuah wadah yang dimiliki oleh Ridwan berisi bola dengan tiga warna yang berbeda, yaitu bola warna merah, bola warna putih, dan bola warna hijau. Apabila dua bola diambil secara acak, maka tentukan kejadian yang mungkin dalam pengambilan bola pada wadah tersebut.

Alternatif penyelesaian:

Misalkan: M = Kejadian pengambilan bola merah

P = Kejadian pengambilan bola putih

H = Kejadian pengambilan bola hijau

Kejadian Pertama

Kejadian pengambilan bola merah dan putih, dapat dinotasikan dengan $M \cap P$

Kejadian Kedua

Kejadian pengambilan bola merah dan hijau, dapat dinotasikan dengan $M \cap H$

Kejadian Ketiga

Kejadian pengambilan bola putih dan hijau, dapat dinotasikan dengan $P \cap H$



Gambar 3.9 Mengambil Bola secara Acak

Contoh Soal 3.15

Sebuah toko elektronik telah mengklasifikasikan pengunjung berdasarkan usia antara pria dan wanita di bawah usia 35 dan di atas usia 35. Tentukan kemungkinan kejadian majemuk.

Alternatif penyelesaian:

Misalkan: P = Kejadian pengunjung pria

Q = Kejadian pengunjung wanita

R = Kejadian pengunjung di bawah usia 35 tahun

S = Kejadian pengunjung di atas usia 35 tahun

Kejadian Pertama

Kejadian pengunjung toko pria atau wanita, dapat dinotasikan dengan $P \cup Q$

Kejadian Kedua

Kejadian pengunjung toko di bawah 35 tahun atau di atas 35 tahun, dapat dinotasikan dengan $R \cup S$

Kejadian Ketiga

Kejadian pengunjung toko pria dan usianya di bawah 35 tahun, dapat dinotasikan dengan $P \cap R$

Kejadian Keempat

Kejadian pengunjung toko pria dan usianya di atas 35 tahun, dapat dinotasikan dengan $P \cap S$

Kejadian Kelima

Kejadian pengunjung toko wanita dan usianya di bawah 35 tahun, dapat dinotasikan dengan $Q \cap R$

Kejadian Keenam

Kejadian pengunjung toko wanita dan usianya di atas 35 tahun, dapat dinotasikan dengan $Q \cap S$

Contoh Soal 3.16

Ada dua jenis literatur di Perpustakaan Sekolah Spirit 45, yaitu buku pelajaran dan buku bacaan. Maksimal ada 2 buku dapat dipinjam oleh setiap siswa. Apabila Rini akan meminjam kedua jenis buku di perpustakaan tersebut, maka cobalah kalian tentukan kejadian majemuk tersebut yang mungkin akan terjadi.

Alternatif penyelesaian:

Misalkan: A = Kejadian peminjaman buku pelajaran

B = Kejadian peminjaman buku bacaan

Kejadian Pertama

Kejadian peminjaman buku pelajaran atau buku bacaan, dapat dinotasikan dengan $A \cup B$

Kejadian Kedua

Kejadian meminjam buku mata pelajaran dan buku bacaan, dapat dinotasikan dengan $A \cap B$



Ayo Berpikir Kreatif

Berdasarkan uraian pada Contoh 3.16, 3.17, dan 3.18, coba buatlah kesimpulan yang dapat kalian tulis tentang peluang suatu kejadian majemuk.



Ayo Berkomunikasi

Sajikan jawaban kalian terhadap hasil diskusi pada kegiatan *Ayo Berpikir Kreatif* di depan kelas. Kemudian, diskusikan dengan teman kelompok kalian yang difasilitasi oleh guru untuk mendapatkan jawaban yang benar.



Ayo Mencoba

Jumlah siswa Sekolah Menengah Atas kelas XII adalah 34, ada 23 siswa di antaranya suka pelajaran Matematika, ada 19 siswa suka pelajaran Biologi, dan ada 12 siswa suka kedua pelajaran tersebut. Ketika seorang siswa dipilih secara acak, maka bagaimana cara menentukan kemungkinan seorang siswa tersebut yang menyukai pelajaran Matematika atau Biologi.

Alternatif penyelesaian:

Misalkan:

$$n(S) = 34$$

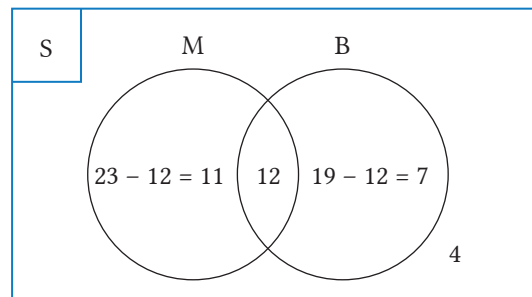
Sejumlah siswa menyukai pelajaran Matematika, $n(M) = 23$

Sejumlah siswa menyukai pelajaran Biologi, $n(B) = 19$

Sejumlah siswa menyukai pelajaran Matematika dan Biologi,

$$n(M \cap B) = 12$$

Perhatikan ilustrasi gambar berikut:



Peluang terpilihnya siswa yang menyukai pelajaran Matematika atau Biologi dapat diuraikan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} P(M \cup B) &= P(M) + P(B) - P(M \cap B) \\ &= \frac{23}{34} + \frac{19}{34} - \frac{12}{34} \\ &= \frac{23 + 19 - 12}{34} \\ &= \frac{26}{34} \\ &= \frac{13}{17} \end{aligned}$$

Definisi 3.5

Peluang kejadian majemuk adalah peluang suatu kejadian dengan dua atau lebih kejadian yang terjadi. Kejadian majemuk dinotasikan dengan “dan” dengan lambang \cap dan “atau” dengan lambang \cup . Apabila ada dua kejadian A dan kejadian B, maka rumus umumnya adalah sebagai berikut:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



Ayo Menggunakan Teknologi

Coba tambahkan pengetahuan kalian terkait dengan Peluang Kejadian Majemuk dengan mengunjungi tautan di samping, karena ada sesuatu yang menarik.

Coba tulislah hasil penelusuranmu.

1. Pada bagian pendahuluan, apa yang kalian ketahui tentang Peluang Kejadian Majemuk?
2. Apakah yang dimaksud dengan suatu kejadian pasti dan tidak pasti terjadi, serta berapakah peluangnya?
3. Pada bagian Peluang Kejadian Gabungan, apa yang kalian ketahui tentang Peluang Kejadian Gabungan?
4. Sebutkan ada berapa jenis kejadian majemuk dan sebutkan simbolnya.



[https://s.id/
PeluangKejadianMajemuk](https://s.id/PeluangKejadianMajemuk)

1. Peluang Kejadian Majemuk Saling Lepas



Ayo Mengingat Kembali

Pada kegiatan acara peringatan Hari Kemerdekaan 17 Agustus dilakukan pelantunan dua mata dadu sebanyak satu kali secara bersamaan. Hal ini untuk menentukan peserta yang akan mendapatkan tim dalam suatu perlombaan tertentu. Ketua tim ditentukan oleh individu yang menerima jumlah mata dadu terbanyak. Pada Gambar 3.6 dan Tabel 3.2 merupakan ilustrasi dari pelantunannya.



Gambar 3.10 Pelantunan Mata Dadu

Tabel 3.2 Pelantunan Dua Dadu

Dadu 1 \ Dadu 2	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)



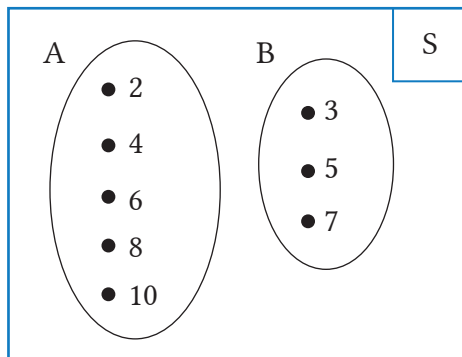
Ayo Bereksplorasi

Cobalah kalian buat kartu bernomor sebanyak 10 kartu, kemudian taruhlah pada sebuah kantong. Lakukan percobaan dengan mengambil sebuah kartu di dalam kantong tersebut secara acak. Apabila ditentukan bahwa kejadian yang pertama (A) terambilnya kartu bernomor genap dan kejadian kedua (B) terambilnya kartu yang bernomor prima ganjil, maka:

- bagaimana kalian dapat menyelidiki bahwa kejadian A dan B saling lepas?
- bagaimana besar peluang dari kejadian A atau B?

Apabila kalian melakukan percobaan tersebut dengan benar, maka coba kalian bandingkan cara berikut dengan cara yang kalian temukan.

Perhatikan ilustrasi gambar berikut.



a. Dikarenakan kejadian A dengan kejadian B tidak memiliki irisan, maka $(A \cap B) = \{ \}$, sehingga kejadian A dan B saling lepas

b. $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, dengan $n(S) = 10$

$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, dengan $n(A) = 5$

$B = \{3, 5, 7\}$, dengan $n(B) = 3$

Sehingga:

$$P(A) = \frac{5}{10}, P(B) = \frac{3}{10}, P(A \cap B) = 0$$

Jadi, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$$\begin{aligned} &= \frac{5}{10} + \frac{3}{10} \\ &= \frac{8}{10} \end{aligned}$$

Selanjutnya, kalian tuliskan istilah-istilah matematika pada kegiatan eksplorasi ini, kemudian diskusikanlah pertanyaan berikut:

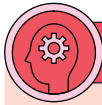
1. Suatu kejadian apakah yang dapat membentuk kejadian majemuk saling lepas?
2. Apa yang dapat kalian ketahui tentang kejadian majemuk saling lepas?
3. Apakah ciri-ciri suatu kejadian dapat dikatakan sebagai kejadian majemuk saling lepas?
4. Bagaimanakah menentukan peluang dari kejadian majemuk saling lepas?

Definisi 3.6

Dua kejadian A dan B disebut kejadian saling lepas satu sama lainnya apabila keduanya tidak dapat terjadi pada waktu yang bersamaan atau tidak saling berhubungan antara keduanya, dengan kata lain dua kejadian yang tidak memiliki irisan. Sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$P(A \cap B) = 0$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$



Ayo Berpikir Kritis

Jalal mengatakan bahwa apabila ada sebuah keranjang yang berisi 4 buah apel berwarna merah dan 4 buah apel berwarna hijau, maka peluang yang mungkin terjadi adalah nol (0) untuk terpilihnya 2 apel merah dan 2 apel hijau, apabila di dalam keranjang tersebut diambil tiga buah apel secara acak. Setujukah kalian dengan pernyataan Jalal? Jelaskan.

Contoh Soal 3.17

Apabila dua buah dadu dilantunkan sebanyak satu kali secara bersamaan, maka bagaimana cara menentukan peluang munculnya mata dadu yang berjumlah 5 atau berjumlah 7?

Alternatif penyelesaian:

Misalkan: A = Kejadian munculnya mata dadu yang berjumlah 5

B = Kejadian munculnya mata dadu yang berjumlah 7

Kejadian ini merupakan peristiwa kombinasi yang saling mengecualikan atau kejadian saling lepas, karena munculnya mata dadu berjumlah 7 tidak mungkin didapat secara bersamaan dengan mata dadu berjumlah 5.

Peluang muncul mata dadu yang berjumlah 5 atau 7 dapat diuraikan seperti berikut ini.

Sedangkan banyak sampel seluruhnya adalah 36, sehingga ditulis menjadi $n(S) = 36$

Sampel mata dadu yang berjumlah 5 ada sebanyak 4 atau $n(A) = 4$, yaitu $A = \{(1,4); (4,1); (2,3); (3,2)\}$

Sampel mata dadu berjumlah 7 ada sebanyak 6 atau $n(B) = 6$, yaitu $B = \{(1,6); (2,5); (3,4); (4,3); (5,2); (6,1)\}$

Sehingga peluang muncul mata dadu yang berjumlah 5 atau berjumlah 7 adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) \\ &= \frac{4}{36} + \frac{6}{36} \end{aligned}$$

$$= \frac{10}{36}$$

$$= \frac{5}{18}$$

Jadi, peluang munculnya mata dadu yang berjumlah 5 atau 7 adalah $\frac{5}{18}$.

Contoh Soal 3.18

Seorang manajer perusahaan Z secara acak mengambil sebuah berkas lamaran pekerjaan di antara 15 berkas yang diajukan oleh 10 lulusan di perguruan tinggi X dan 5 orang yang lulus di perguruan tinggi Y. Tiga kandidat telah diketahui bahwa mereka telah memiliki pengalaman kerja pada suatu perusahaan/organisasi tertentu yang kurang dari dua tahun, akan tetapi 7 di antaranya telah memiliki pengalaman kerja dengan pengalaman lebih dari 2 tahun, dan 5 tanpa pengalaman kerja. Bagaimana cara menentukan kejadian saling lepas dari kasus tersebut dan tentukan juga peluang kejadiannya.

Alternatif penyelesaian:

Misalkan: A = Kejadian pelamar dari lulusan perguruan tinggi X

B = Kejadian pelamar dari lulusan perguruan tinggi Y

C = Kejadian pelamar yang memiliki pengalaman kerja kurang dari dua tahun

D = Kejadian pelamar yang memiliki pengalaman kerja lebih dari dua tahun

E = Kejadian pelamar yang belum memiliki pengalaman kerja

Kejadian Pertama

Kejadian pelamar dari lulusan perguruan tinggi X atau perguruan tinggi Y, dapat dinotasikan dengan $A \cup B$

Kejadian ini merupakan kejadian saling lepas karena tidak dapat terjadi secara bersamaan dalam memilih berkas pelamar untuk lulusan perguruan tinggi X dan lulusan perguruan tinggi Y. Peluang kejadian akan terpilihnya berkas pelamar dari lulusan perguruan tinggi X atau perguruan tinggi Y dapat diuraikan berikut ini.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$= \frac{10}{15} + \frac{5}{15}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{15}{15} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Kejadian Kedua

Pelamar memiliki pengalaman kerja kurang dari dua tahun atau lebih dari dua tahun, dapat dinotasikan dengan $C \cup D$.

Kejadian ini adalah kejadian saling lepas, hal ini karena pelamar dengan pengalaman kurang dari dua tahun dan di atas dua tahun tidak dapat dipilih secara bersamaan. Memilih kandidat dengan pengalaman kerja kurang dari dua tahun dan kandidat dengan pengalaman kerja lebih dari dua tahun akan memberikan peluang berikut.

$$\begin{aligned} P(C \cup D) &= P(C) + P(D) \\ &= \frac{3}{15} + \frac{7}{15} \\ &= \frac{10}{15} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Kejadian Ketiga

Pelamar dengan pengalaman kerja kurang dari 2 tahun dan tidak ada pengalaman kerja,, dapat dinotasikan dengan $C \cup E$.

Kejadian ini merupakan kejadian majemuk saling lepas, karena penyaringan kandidat dengan pengalaman profesional kurang dari dua tahun dan mereka yang tidak memiliki pengalaman kerja tidak dapat dilakukan secara bersamaan. Peluang kemungkinan terpilihnya berkas kandidat dengan pengalaman kerja kurang dari dua tahun atau tidak sama sekali adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} P(C \cup E) &= P(C) + P(E) \\ &= \frac{3}{15} + \frac{5}{15} \\ &= \frac{8}{15} \end{aligned}$$

Kejadian Keempat

Pelamar berpengalaman lebih dari dua tahun dan tidak memiliki pengalaman kerja, dapat dinotasikan dengan $D \cup E$.

Kejadian ini merupakan kejadian saling lepas, karena pemilihan kandidat dengan pengalaman lebih dari dua tahun dan mereka yang tidak memiliki pengalaman kerja tidak dapat dilakukan secara bersamaan. Berikut ini adalah peluang untuk menyeleksi pelamar yang memiliki pengalaman kerja lebih dari dua tahun atau tidak.

$$\begin{aligned}
 P(D \cup E) &= P(D) + P(E) \\
 &= \frac{7}{15} + \frac{5}{15} \\
 &= \frac{12}{15} \\
 &= \frac{4}{5}
 \end{aligned}$$



Ayo Berpikir Kreatif

Berdasarkan uraian pada Contoh 3.17 dan 3.18, coba buatlah kesimpulan yang dapat kalian tulis tentang peluang majemuk saling lepas.



Ayo Berkomunikasi

Sajikan jawaban kalian terhadap hasil diskusi pada kegiatan Ayo Berpikir Kreatif di depan kelas. Kemudian, untuk mendapatkan jawaban yang tepat dan lengkap, silakan diskusikan dengan teman dan guru.



Ayo Menggunakan Teknologi

Coba tambahkan pengetahuan kalian terkait dengan Peluang Kejadian Saling Lepas dengan mengunjungi tautan di samping, karena ada sesuatu yang menarik.

Coba tulislah hasil penelusuranmu.

1. Pada bagian pendahuluan, apa yang kalian ketahui tentang peluang kejadian majemuk saling lepas?



[https://s.id/
PeluangKejadianSalingLepas](https://s.id/PeluangKejadianSalingLepas)

2. Temukan, ada berapa banyak bentuk diagram venn untuk kejadian majemuk saling lepas?
3. Bagaimanakah cara menemukan rumus peluang kejadian majemuk saling lepas?
4. Sebutkan ada berapa jenis kejadian majemuk saling lepas dan sebutkan simbolnya.

2. Peluang Kejadian Majemuk Saling Bebas



Ayo Bereksplorasi

Coba kalian lakukan seperti yang dilakukan Rudi berikut.

Jika Andi melantunkan dua dadu merah dan putih secara bersamaan, maka peluang munculnya angka 2 pada dadu merah dan angka 5 pada dadu putih adalah sebagai berikut.

Misalkan: A = Kejadian sebuah dadu muncul 2 pada dadu merah

B = Kejadian sebuah dadu muncul 5 pada dadu putih

Kejadian ini merupakan kejadian majemuk yang berdiri sendiri atau saling bebas karena tidak memengaruhi munculnya dadu pada dadu merah dan dadu putih.

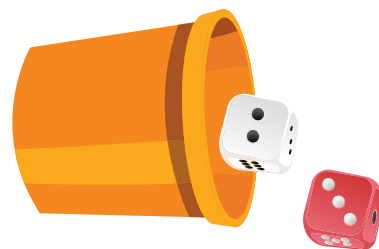
Peluang munculnya 2 pada dadu merah dan 5 pada dadu putih adalah sebagai berikut.

Banyak sampel keseluruhannya, $n(S) = 36$

Sampel muncul mata dadu pada dadu warna merah ada 6 atau $n(A) = 6$, yaitu $A = \{(2,1); (2,2); (2,3); (2,4); (2,5); (2,6)\}$

Sampel muncul mata dadu 5 pada dadu warna putih ada 6 atau $n(B) = 6$, yaitu $B = \{(1,5); (2,5); (3,5); (4,5); (5,5); (6,5)\}$

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) \times P(B) \\ &= \frac{6}{36} \times \frac{6}{36} \end{aligned}$$



Gambar 3.11 Dua Dadu

$$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{36}$$

Jadi, peluang munculnya 2 pada dadu merah dan 5 pada dadu putih adalah $\frac{1}{36}$.

Coba kalian tuliskan istilah-istilah matematika pada kegiatan eksplorasi ini, kemudian diskusikanlah pertanyaan berikut:

1. Kejadian seperti apa yang dapat membentuk kejadian majemuk saling bebas?
2. Bagaimanakah cara menentukan peluang kejadian majemuk saling bebas?
3. Apakah ada syarat tertentu suatu kejadian dikatakan sebagai kejadian majemuk saling bebas?

Definisi 3.7

Dua kejadian A dan B dapat dikatakan kejadian majemuk saling bebas, apabila kejadian A tidak memengaruhi kejadian B, begitu juga sebaliknya. Dengan kata lain, kejadian A dan B terhubung tetapi tidak saling mengecualikan. Secara matematis kejadian A dan B disebut sebagai kejadian saling bebas dengan rumus sebagai berikut:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Contoh Soal 3.19

Satu kendaraan pemadam kebakaran dan satu ambulans tersedia di kota dalam keadaan darurat. Peluang mobil pemadam kebakaran dapat diakses berdasarkan permintaan adalah 0,98, tetapi peluang ambulans siap saat dibutuhkan adalah 0,92. Seberapa besar kemungkinan kedua mobil akan bekerja jika terjadi kebakaran di gedung kota?

Alternatif penyelesaian:

Misalkan:

A: peluang bahwa mobil pemadam kebakaran siap apabila diperlukan

B: peluang bahwa mobil ambulans siap apabila diperlukan

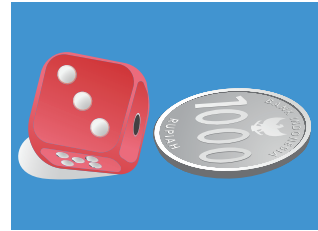
Peluang mobil pemadam kebakaran tersedia jika diperlukan diketahui, demikian juga kemungkinan mobil ambulans siap jika diperlukan:

$$\begin{aligned}
 P(A \cap B) &= P(A) \times P(B) \\
 &= 0,98 \times 0,92 \\
 &= 0,9016
 \end{aligned}$$

Akibatnya, jika sebuah bangunan di kota terbakar, kemungkinan kedua mobil tersebut siap berfungsi adalah 0,9016.

Contoh Soal 3.20

Secara bersamaan dilantunkan sebuah mata dadu dan sebuah koin sebanyak satu kali, berapakah peluang muncul angka genap pada dadu dan muncul gambar (G) pada koin?



Gambar 3.12 Mata Dadu dan Uang Koin

Alternatif penyelesaian:

Misalkan: A = Kejadian munculnya angka genap pada dadu

B = Kejadian munculnya gambar (G) pada koin

Kejadian ini merupakan kejadian yang berdiri sendiri, hal ini dikarenakan munculnya dadu genap pada dadu tidak mengubah gambar (G) pada uang logam tersebut.

Peluang munculnya dadu dan gambar (G) dari uang logam bernomor genap adalah sebagai berikut.

Banyak sampel keseluruhannya, $n(S) = 12$

Banyak sampel terhadap munculnya mata dadu genap pada dadu ada 6 atau $n(A) = 6$, yaitu $A = \{(2,A); (2,G); (4,A); (4,G); (6,A); (6,G)\}$

Sampel dari munculnya gambar (G) ada 6 atau $n(B) = 6$, yaitu $B = \{(1,G); (2,G); (3,G); (4,G); (5,G); (6,G)\}$

$$\begin{aligned}
 P(A \cap B) &= P(A) \times P(B) \\
 &= \frac{6}{12} \times \frac{6}{12} \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\
 &= \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

Jadi, peluang muncul angka genap pada dadu dan muncul gambar (G) pada koin tersebut adalah $\frac{1}{4}$.

Contoh Soal 3.21

Apabila dua dadu dilantunkan dua kali, berapa peluang munculnya dadu berjumlah 7 dan 11?

Alternatif penyelesaian:

Misalkan: Y_1 = Kejadian munculnya berjumlah 7 pada lantunan pertama

Y_2 = Kejadian munculnya berjumlah 7 pada lantunan kedua

Z_1 = Kejadian munculnya berjumlah 11 pada lantunan pertama

Z_2 = Kejadian munculnya berjumlah 11 pada lantunan kedua



Gambar 3.13 Dadu Dilantunkan

Kejadian ini disebut kejadian yang berdiri sendiri atau saling bebas, seperti kemunculan pada lantunan pertama angka 7, kemunculan pada lantunan kedua angka 11 adalah saling bebas, begitu juga kemunculan pada lantunan pertama angka 11 dan kemunculan pada lantunan kedua angka 7 adalah saling bebas. Peluang kemungkinan muncul berjumlah 7 dan 11 terjadi pada dua kali lantunan dapat diuraikan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} P[(Y_1 \cup Z_2) \cup (Z_1 \cup Y_2)] &= P(Y_1) \times P(Z_2) + P(Y_2) \times P(Z_1) \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{18} + \frac{1}{18} \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{108} + \frac{1}{108} \\ &= \frac{2}{108} \\ &= \frac{1}{54} \end{aligned}$$

Jadi, peluang muncul berjumlah 7 dan 11 pada dua kali lantunan adalah $\frac{1}{54}$.

**Ayo Berpikir Kreatif**

Berdasarkan uraian pada Contoh 3.19, 3.20, dan 3.21, coba buatlah kesimpulan yang dapat kalian tulis tentang peluang majemuk saling bebas.



Ayo Berkomunikasi

Sajikan jawaban kalian terhadap hasil diskusi pada kegiatan Ayo Berpikir Kreatif di depan kelas. Kemudian, diskusikan dengan guru dan teman untuk mendapatkan jawaban yang benar dan lengkap.



Ayo Menggunakan Teknologi

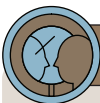
Coba tambahkan pengetahuan kalian terkait dengan Peluang Kejadian Saling Bebas dengan mengunjungi tautan disamping, karena ada sesuatu yang menarik.

Coba tulislah hasil penelusuranmu.

1. Apa yang kalian ketahui tentang peluang kejadian majemuk saling bebas?
2. Temukan, ada berapa banyak bentuk diagram venn untuk kejadian majemuk saling bebas?
3. Bagaimana cara menemukan rumus peluang kejadian majemuk saling bebas?
4. Sebutkan ada berapa jenis kejadian majemuk saling bebas dan sebutkan simbolnya.



[https://s.id/
PeluangKejadianSalingBebas](https://s.id/PeluangKejadianSalingBebas)



Ayo Berefleksi

Tuliskan apa yang Anda pelajari melalui mempelajari konten untuk kejadian majemuk saling lepas dan saling bebas.

1. Apa yang dimaksud dengan kejadian majemuk, kejadian majemuk saling lepas, kejadian majemuk saling bebas?
2. Bagaimana cara menentukan peluang dari kejadian majemuk?
3. Bagaimana cara menentukan peluang dari kejadian majemuk saling lepas?
4. Bagaimana cara menentukan peluang dari kejadian majemuk saling bebas?

5. Apakah ada hubungannya antara kejadian majemuk saling lepas dengan kejadian majemuk saling bebas?

Latihan 3.5

1.  **Ayo Berpikir Kreatif**

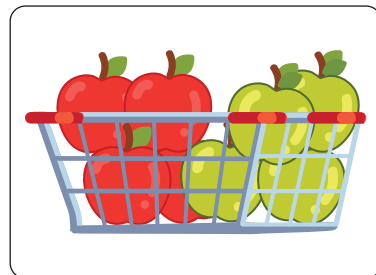
Sekelompok ilmuwan ingin melakukan penelitian serangga berbahaya di Sulawesi Tenggara. Misalkan A mewakili kemungkinan cuaca buruk, B mewakili kemungkinan masalah dengan instansi pemerintah daerah, dan C mewakili kemungkinan masalah dengan peralatan fotografi mereka. Tentukan minimal setidaknya tiga kejadian majemuk yang mungkin terjadi.

2. Apabila kejadian A adalah kejadian muncul dua mata dadu habis dibagi 6 dan kejadian B adalah kejadian dua mata dadu habis dibagi 5, maka tentukan peluang dari $P(A \cap B)$ dan $P(A \cup B)$.

3.  **Ayo Berpikir Kritis**


Rudi melakukan pelantunan dua dadu merah dan putih secara bersamaan. Eko yang melihatnya mengatakan bahwa peluang munculnya angka 2 pada dadu merah atau angka 4 pada dadu putih adalah satu per tiga. Sedangkan Anita tidak setuju dengan pendapat Eko yang juga sedang melihatnya, karena Anita memiliki pendapat sendiri terhadap peluang yang dimaksud, yaitu sebesar sebelas per tiga puluh enam. Bagaimana dengan pendapat kalian, kalian lebih setuju pendapat siapa? Jelaskan.

4. Diketahui dalam sebuah keranjang berisi 4 buah apel berwarna merah dan 4 buah apel berwarna hijau. Jika kalian mengambil 3 buah apel dari keranjang tersebut, tentukan peluang terpilih 2 buah apel merah dan 2 buah apel hijau.

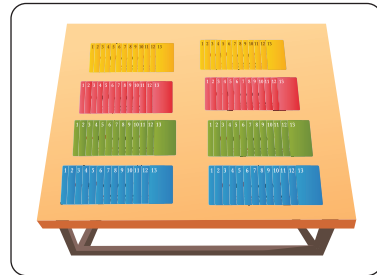


5. Dalam sebuah tas terdapat 5 bola merah dan 2 bola biru. Tas lain berisi tiga bola merah dan satu bola biru. Tentukan peluang terambilnya bola biru secara acak dari salah satu kantong.



6.  **Ayo Berpikir Kritis**

Dua set kartu ada di atas meja, setiap set kartu berisi 52 lembar dengan empat warna; yaitu merah, kuning, hijau, dan biru. Ada 13 kartu dalam setiap warna, bernomor 1 sampai 13. Satu kartu dari dua set kartu akan dipilih secara acak. Tentukan peluang kemungkinan mendapat kartu merah atau angka 13.

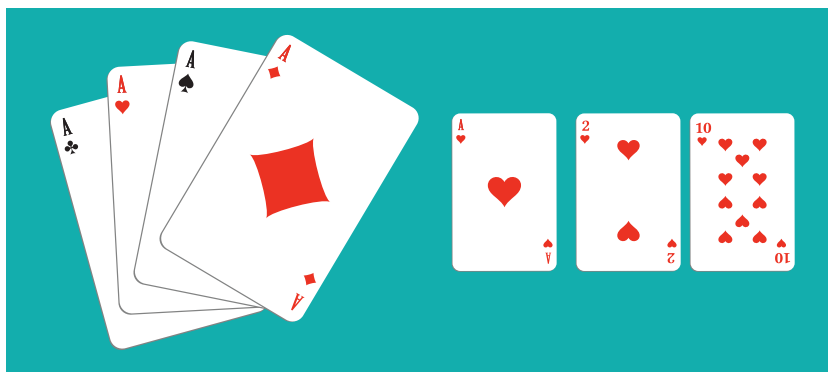


F. Peluang Kejadian Majemuk Saling Bebas Bersyarat

 **Ayo Bereksplorasi**

Kartu remi terdapat sebanyak 52 kartu, Peluang untuk mendapatkan kartu Heart adalah sebagai berikut. Apabila dua kartu diambil secara acak satu per satu tanpa pengembalian, maka cobalah kalian lakukan percobaan berikut ini.

Perhatikan ilustrasi gambar berikut.



Gambar 3.14 Kartu Remi dan Kartu Heart

Banyak sampel keseluruhannya, $n(S) = 52$

Banyak sampel dari munculnya kartu Heart, $n(A) = 13$,

Misalkan: $A =$ Kejadian terambil kartu Heart pada pengambilan pertama

$B =$ Kejadian terambil kartu Heart pada pengambilan kedua

Pengambilan pertama banyak kartu Heart ada sebanyak 13 kartu, sedangkan banyak kartu Heart pada pengambilan yang kedua sudah berkurang satu kartu, sehingga banyak kartu Heart menjadi 12. Hal ini terjadi karena kejadian pengambilan kartu Heart pertama berdampak pada kejadian pengambilan kartu Heart kedua, peluang terambilnya kedua Heart adalah sebagai berikut.

$P(A) = \frac{13}{52}$ dan $P(B|A) = \frac{12}{51}$, sehingga peluang seluruhnya adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) \times P(B|A) \\ &= \frac{13}{52} \times \frac{12}{51} \\ &= \frac{156}{2.652} \\ &= \frac{3}{51} \end{aligned}$$

Coba kalian tuliskan istilah-istilah matematika pada kegiatan eksplorasi ini, kemudian diskusikanlah pertanyaan berikut:

1. Kejadian seperti apa yang dapat dikatakan sebagai kejadian majemuk saling bebas bersyarat?
2. Bagaimanakah cara menentukan peluang dari kejadian majemuk saling bebas bersyarat?

Definisi 3.8

Dua kejadian A dan B dapat dikatakan sebagai kejadian majemuk saling bebas bersyarat apabila memenuhi persyaratan saling bebas dan terjadinya secara urutan.

Kejadian A dan B dikatakan kejadian majemuk bebas bersyarat yang secara matematis didefinisikan sebagai berikut:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$$

Dari rumus ini dapat pula diturunkan ke rumus berikut, di mana: $P(B|A)$ dibaca peluang kejadian B setelah A:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(A)}{n(S)}} = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} \quad \text{Jadi, } P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$$

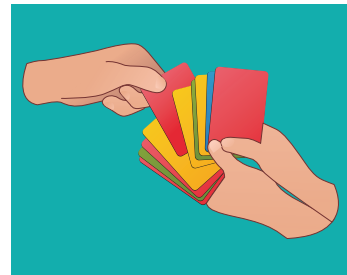
Contoh Soal 3.22

Sebuah kartu dari sejumlah kartu remi dipilih secara acak. Berapa peluang terambilnya kartu berwarna merah jika lebih dari dua dan kurang dari sepuluh?

Alternatif penyelesaian:

Misalkan: C = Kejadian terambil kartu berwarna merah

D = Kejadian terambil kartu yang lebih besar dari dua dan lebih kecil dari sepuluh



Gambar 3.15 Kartu Remi

Kejadian ini merupakan kejadian majemuk bebas bersyarat karena kartu yang diambil adalah kartu merah dengan nilai lebih dari dua dan kurang dari sepuluh. Peluang kemungkinan terambilnya kartu merah lebih dari dua tetapi kurang dari sepuluh adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} P(C \cap D) &= P(C) \times P(D|C) \\ &= \frac{26}{52} \times \frac{14}{26} \\ &= \frac{14}{52} \\ &= \frac{7}{26} \end{aligned}$$

Contoh Soal 3.23

Formasi manajemen 200 manajer pada suatu perusahaan ditunjukkan tabel berikut.

Manajer	Laki-Laki (L)	Perempuan (P)
Manajer Senior (S)	18	2
Manajer Menengah (M)	36	24
Manajer Bawah (B)	24	96

- Berapa kemungkinan bahwa salah satu dari 200 manajer dipilih secara acak untuk manajer laki-laki atau manajer senior?
- Dua manajer dipilih secara acak, berapa kemungkinan pilihan manajer laki-laki dan manajer perempuan?
- Berapa peluang pilihan pertama dipilih oleh manajer laki-laki dan pilihan kedua oleh manajer laki-laki yang lain?

Alternatif penyelesaian:

- Prosedur penyelesaian berikut digunakan untuk memilih peluang bagi manajer laki-laki atau senior:

$$\begin{aligned}
 P(L \cup S) &= P(L) + P(S) - P(L \cap S) \\
 &= \frac{78}{200} + \frac{20}{200} - \frac{18}{200} \\
 &= \frac{80}{200} \\
 &= \frac{2}{5}
 \end{aligned}$$

Jadi, terpilih manajer laki-laki atau manajer senior adalah $\frac{2}{5}$.

- Peluang untuk seorang manajer laki-laki dan perempuan dari sampel acak dua manajer didapat dengan cara sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 P(1L, 1W) &= \frac{C_1^{78} \times C_1^{122}}{C_2^{200}} \\
 &= \frac{78 \times 122}{200 \times 199} \\
 &= \frac{2.379}{19.900}
 \end{aligned}$$

Jadi, terpilih manajer seorang laki-laki dan perempuan dari pemilihan secara acak dua orang manajer adalah $\frac{2.379}{19.900}$.

- Peluang terpilih manajer laki-laki dari dua kali pemilihan secara berturut-turut didapat dengan cara sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 P(L_1 \cap L_2) &= P(L_1) \times P(L_2|L_1) \\
 &= \frac{78}{200} \times \frac{77}{199} \\
 &= \frac{3.003}{19.900}
 \end{aligned}$$

Jadi, terpilih manajer laki-laki dari dua kali pemilihan berturut-turut adalah $\frac{3.003}{19.900}$.



Ayo Berpikir Kreatif

Berdasarkan uraian pada Contoh 3.22 dan 3.23, coba buatlah kesimpulan yang dapat kalian tulis tentang peluang majemuk saling bebas bersyarat.



Ayo Berkomunikasi

Sajikan jawaban kalian terhadap hasil diskusi pada kegiatan Ayo Berpikir Kreatif di depan kelas. Kemudian, diskusikan dengan sesama siswa dan guru untuk mendapatkan jawaban yang benar dan lengkap.



Ayo Menggunakan Teknologi

Coba tambahkan pengetahuan kalian terkait Peluang Kejadian Bersyarat dengan mengunjungi tautan di samping, karena ada sesuatu yang menarik.

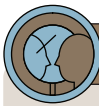
Coba tulislah hasil penelusuranmu.

1. Apa yang kalian ketahui tentang peluang kejadian majemuk saling bebas bersyarat?
2. Temukan, adakah bentuk diagram venn untuk kejadian majemuk saling bebas bersyarat?
3. Bagaimana cara menemukan rumus peluang kejadian majemuk saling bebas bersyarat?



[https://s.id/
PeluangKejadianBersyarat](https://s.id/PeluangKejadianBersyarat)

4. Sebutkan ada berapa jenis kejadian majemuk saling bebas bersyarat dan sebutkan simbolnya.



Ayo Berefleksi

Tuliskan apa yang telah kalian pelajari melalui materi tentang kejadian majemuk saling lepas dan saling bebas.

1. Apa saja syarat suatu kejadian termasuk dalam kategori kejadian majemuk saling bebas bersyarat?
2. Apa yang dimaksud dengan kejadian majemuk saling bebas bersyarat?
3. Bagaimana cara menentukan peluang kejadian majemuk saling bebas bersyarat?
4. Apakah ada hubungannya antara kejadian majemuk saling lepas, kejadian majemuk saling bebas dengan kejadian majemuk saling bebas bersyarat?

Latihan 3.6

1. Dalam waktu yang bersamaan dua dadu dilantunkan. Jika A adalah kejadian muncul dua dadu yang hasil kalinya 12, dan B adalah kejadian muncul dua mata dadu berjumlah 8, tentukanlah $P(A|B)$ dan $P(B|A)$.
2. Dua kartu dipilih secara acak satu per satu dari tumpukan kartu bridge tanpa pengembalian. Tentukan peluang terpilihnya kartu pertama adalah kartu As dan kartu kedua adalah kartu King?



Ayo Berpikir Kreatif

3.

Dalam satu kelas terdapat 40 siswa, 34 siswa suka Matematika dan 22 siswa tidak menyukai keduanya. Ketika seorang siswa dipilih secara acak, maka temukan minimal sebanyak tiga cara berbeda untuk menentukan berapa banyak peluang siswa tersebut menyukai Matematika setelah mengetahui dia menyukai Fisika.

4. Diketahui sebuah kotak berisi empat bola hijau dan enam bola kuning. Apabila diambil empat bola satu per satu dari dalam kotak tersebut, tentukanlah peluang bahwa pada pengambilan pertama dan kedua terambil bola hijau serta pada pengambilan ketiga dan keempat terambil bola kuning. Di mana pengambilan itu disyaratkan bahwa:

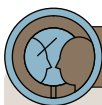


- a) tanpa pengembalian
- b) dengan pengembalian

5. Lima bola hitam dan lima bola putih berada dalam satu kantong. Jika ada dua bola yang dipilih secara acak tiga kali berturut-turut, tentukanlah peluang kemungkinan akan terambilnya dua bola hitam, dua bola hitam dan dua bola putih pada pengambilan pertama, kedua, dan ketiga. Di mana pengambilan tersebut disyaratkan:



- a) tanpa pengembalian
- b) dengan pengembalian



Ayo Berefleksi

1. Bagaimana menentukan kaidah suatu kejadian?
2. Apa yang dapat kalian ketahui tentang permutasi?
3. Bagaimana cara menemukan rumus permutasi?
4. Apa yang dapat kalian ketahui tentang kombinasi?
5. Bagaimana cara menemukan rumus kombinasi?
6. Bagaimana menentukan peluang suatu kejadian majemuk?
7. Bagaimana menentukan kejadian majemuk saling lepas?

8. Bagaimana menentukan kejadian majemuk saling bebas?
9. Bagaimana menentukan kejadian majemuk saling bebas bersyarat?
10. Bagaimana membedakan antara kejadian majemuk saling lepas dengan saling bebas?

Pengayaan Bab 3

Binom Newton

Binom Newton adalah cara untuk penjabaran bentuk $(x + y)^n$ dengan n adalah bilangan asli sehingga kita bisa mengetahui koefisien dari setiap sukunya.

$$(x + y)^0 = 1$$

$$(x + y)^1 = x + y$$

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

$$(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

Secara umum, dapat diperoleh rumusnya sebagai berikut.

$$(x + y)^n = {}_n C_0 x^n + {}_n C_1 x^{n-1} y^1 + \dots + {}_n C_k x^{n-k} y^k + \dots + {}_n C_n y^n$$

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n {}_n C_k x^{n-k} y^k$$

Bilangan ${}_n C_k$ merupakan koefisien untuk $x^{n-k} y^k$ dinamakan **koefisien binomial**.

Contoh Soal 3.24

Tentukan koefisien dari x^2 dari $(1 - x)^{2014}$.

Alternatif penyelesaian:

Soal ini termasuk contoh soal Binom Newton, untuk itu perhatikan berikut ini.

Rumus Binom Newton:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n {}_n C_k x^{n-k} y^k$$

Diketahui dari soal $(1 - x)^{2014}$

Sehingga didapat: $x = 1, y = -x, n = 2014$

Koefisien dari x^2 didapat ketika $k = 2$

$$\begin{aligned} \text{Dengan demikian: } \sum_{k=0}^n C_k x^{n-k} y^k &\Rightarrow {}_{2014}C_2 (1)^{2014-2} (-x)^2 \\ &\Rightarrow 2027091x^2 \end{aligned}$$

Jadi, koefisien dari x^2 dari $(1 - x)^{2014}$ adalah 2027091.

Contoh Soal 3.25

Tentukan konstanta dari $\left(3x^3 - \frac{2}{x}\right)^8$.

Alternatif penyelesaian:

Soal ini termasuk contoh soal Binom Newton, untuk itu perhatikan rumus berikut ini.

Rumus Binom Newton:

$$\begin{aligned} (x + y)^n &= {}_n C_0 x^n + {}_n C_1 x^{n-1} y^1 + \dots + {}_n C_k x^{n-k} y^k + \dots + {}_n C_n y^n \\ (x + y)^n &= \sum_{k=0}^n C_k x^{n-k} y^k \end{aligned}$$

Konstanta pada bentuk $\left(3x^3 - \frac{2}{x}\right)^8$ adalah suku pada deret binomial sedemikian hingga hasil kali x^3 dengan $\frac{2}{x}$ saling meniadakan, dengan memperhatikan deret binomialnya, maka dapat ditentukan hal tersebut terjadi pada suku ke-7, sehingga $n = 8$ dan $k = 6$

$$\begin{aligned} \left(3x^3 - \frac{2}{x}\right)^8 &= {}_n C_k x^{n-k} y^k = {}_8 C_6 \cdot (3x^3)^{8-6} \cdot \left(-\frac{2}{x}\right)^6 = {}_8 C_6 \cdot (3x^3)^2 \cdot \left(-\frac{2}{x}\right)^6 \\ &= 28 \cdot 3^6 \cdot x^6 \cdot \left(\frac{2^6}{x^6}\right) \\ &= 28 \cdot 3^6 \cdot 2^6 \\ &= 16.128 \end{aligned}$$

Jadi, konstanta dari  adalah 16.128.



Ayo Berpikir Kreatif

Tentukan banyak cara dalam menyusun kata KEMENDIKBUD berdasarkan pola susunan yang ditunjukkan susunan berikut ini mulai dari baris bagian atas ke baris bagian bawah apabila huruf yang diambil harus berdekatan.

```

      K
    E  E
  M  M  M
E  E  E  E
  N  N  N  N  N
    D  D  D  D  D  D
      I  I  I  I  I  I  I
        K  K  K  K  K  K  K  K
          B  B  B  B  B  B  B  B  B
            U  U  U  U  U  U  U  U  U  U
              D  D  D  D  D  D  D  D  D  D  D

```



Uji Kompetensi 3

A. Soal Pilihan Ganda

1. Seseorang mempunyai 5 model baju dan 3 model celana. Banyaknya cara (pasangan baju-celana) yang dapat dikenakan orang tersebut dalam berpakaian adalah ... cara.
 - a. 8
 - b. 10
 - c. 12
 - d. 14
 - e. 15

2. Andi, Budi, dan Citra adalah calon ketua. Mona dan Lisa adalah calon sekretaris. Sedangkan Fitri dan Fina adalah calon bendahara. Banyaknya cara yang mungkin dibentuk dalam menyusun pengurus Karang Taruna yang terdiri atas seorang ketua, sekretaris, dan bendahara adalah
 - a. 12 cara
 - b. 18 cara
 - c. 20 cara
 - d. 24 cara
 - e. 30 cara

3. Banyaknya susunan huruf yang terdiri atas tiga huruf berbeda yang dapat disusun dari huruf-huruf K, E, C, I, L jika huruf pertama harus konsonan adalah
 - a. 60 susunan
 - b. 36 susunan
 - c. 38 susunan
 - d. 42 susunan
 - e. 44 susunan

4. Banyaknya bilangan asli yang terdiri atas empat angka berbeda dan dapat disusun berdasarkan angka 0, 1, 2, 3, 4, dan 5, apabila bilangan tersebut nilainya lebih dari 3000 adalah
 - a. 96 bilangan
 - b. 122 bilangan
 - c. 164 bilangan
 - d. 180 bilangan
 - e. 196 bilangan

5. Dua buah mata dadu dan sebuah koin akan dilantunkan secara bersamaan dan sisi dadu yang muncul akan dicatat. Jika kemunculan masing-masing dadu diyakini seimbang dan kemunculan masing-masing koin seimbang, maka peluang muncul sisi angka pada koin dan kedua mata dadu yang berjumlah 5 adalah
 - a. $\frac{1}{16}$
 - b. $\frac{1}{18}$
 - c. $\frac{1}{36}$
 - d. $\frac{1}{72}$
 - e. $\frac{1}{144}$

B. Soal Uraian

6. Dalam suatu pertemuan kecil dihadiri tiga pria dan tiga wanita. Mereka duduk mengelilingi meja bundar.
 - a. Ada berapa banyak cara yang mungkin terjadi ketika mereka duduk?
 - b. Ada berapa banyak cara yang mungkin terjadi apabila mereka duduk dengan semua wanita duduk berdekatan?
 - c. Apabila dua wanita tidak duduk berdekatan, berapa banyak cara mereka bisa duduk?
7. Sebuah dompet berisi 4 keping uang logam seribu rupiah dan 3 keping uang logam lima ratus rupiah. Dompet yang kedua berisi 3 keping uang logam seribu rupiah dan 5 keping uang logam lima ratus rupiah. Sekeping uang logam diambil dari dompet pertama dan dimasukkan ke dompet kedua. Jika kemudian diambil sekeping uang logam dari dompet kedua, berapakah peluang bahwa uang logam yang diambil dari dompet kedua tersebut adalah logam lima ratus rupiah?
8. Setiap huruf adalah kombinasi dari kata "MUDAH" dan "SANGAT". Berapa peluang yang mungkin terjadi bahwa kedua huruf tersebut mengandung satu huruf vokal dan konsonan?
9. Jika sebuah kantong berisi enam bola merah dan empat bola biru, akan diambil dua bola berturut-turut, berapa peluang terambilnya dua bola biru:
 - a) apabila dengan pengembalian
 - b) apabila tanpa pengembalian

10.



Ayo Berpikir Kreatif

Empat orang siswa makan siang di sebuah kantin. Di kantin tersebut masih tersedia 3 porsi nasi goreng, 20 porsi nasi pecel, dan 25 porsi nasi rawon, serta 19 gelas jus alpukat, 17 gelas jeruk panas, dan 15 gelas jus sirsak. Mereka ingin memesan 4 porsi makanan dan 3 gelas minuman. Tentukan banyak pilihan komposisi makanan dan minuman yang mungkin mereka pesan.

Glosarium

anggota himpunan: suatu objek dalam suatu himpunan.

apotema: ruas garis yang tegak lurus terhadap tali busur dari titik pusat lingkaran.

busur: garis yang terletak pada lingkaran dan menghubungkan dua titik sebarang di lingkungan tersebut.

data: ukuran dari suatu nilai. Data biasanya dalam bentuk bilangan, dikumpulkan dalam bentuk tabel, diolah dalam bentuk diagram.

data kontinu: data yang dihubungkan oleh garis pada grafik. Misalnya, grafik hubungan tinggi badan dengan usia.

datum: satu ukuran dari suatu nilai.

data berkelompok: data yang sudah dikelompokkan dalam kelas-kelas.

data tunggal: data mentah yang belum diolah atau dikelompokkan.

desil: nilai yang membagi data menjadi 10 kelompok sama banyak.

deviasi standar: akar dari jumlah kuadrat deviasi dibagi banyaknya data.

diameter: garis lurus yang menghubungkan dua titik pada lengkungan dua titik sebarang di lengkungan tersebut.

diagram: suatu representasi simbolis dari suatu informasi dalam bentuk geometri dua dimensi.

diagram Venn: suatu representasi grafis dari suatu himpunan atau himpunan-himpunan.

diagram batang: gambar yang menggunakan batang secara horizontal atau vertikal untuk menunjukkan suatu data.

dilatasi: transformasi yang mengubah jarak dari titik-titik dengan faktor pengali tertentu terhadap suatu titik tertentu.

dilatasi vertikal: transformasi dilatasi yang sejajar sumbu x .

dilatasi horizontal: transformasi dilatasi yang sejajar sumbu y .

fungsi linear: sebuah fungsi yang mana variabelnya berpangkat satu atau suatu fungsi yang grafiknya adalah garis lurus.

fungsi kuadrat: sebuah fungsi polinom yang memiliki peubah/variabel dengan pangkat tertingginya adalah 2 (dua).

fungsi eksponen: pemetaan bilangan real x ke ax dengan $a > 0$ dan $a \neq 1$.
Jika $a > 0$ dan $a \neq 1$, $x \in R$ maka $f(x) = ax$.

grafik: suatu kerangka atau gambar yang digunakan untuk membuat objek visualisasi dari data-data pada tabel.

himpunan: unit yang terdiri beberapa anggota.

himpunan berhingga: suatu himpunan dengan n elemen di mana n adalah suatu bilangan bulat tak negatif.

himpunan tak berhingga: suatu himpunan yang anggotanya tak berhingga.

himpunan semesta: himpunan yang memuat semua objek di bawah pertimbangan.

jari-jari: ruas garis yang ditarik dari pusat lingkaran ke sebarang titik pada lingkaran; sama dengan setengah diameter.

juring: luas daerah dalam lingkaran yang dibatasi oleh dua buah jari-jari lingkaran dan sebuah busur yang diapit oleh kedua jari-jari lingkaran tersebut.

keliling lingkaran: panjang kurva lengkung tertutup yang berhimpit pada suatu lingkaran.

kejadian: himpunan bagian dari ruang sampel.

kejadian majemuk: dua atau lebih kejadian yang terjadi secara bersamaan.

kelas: kelompok data berdasarkan kategori kuantitatif atau kualitatif.

kombinasi: susunan yang mungkin dari unsur-unsur yang berbeda dengan tidak memperhatikan urutannya.

kombinasi berulang: pengambilan objek dengan urutan tidak diperhitungkan (pengulangan/pengembalian diperbolehkan).

linear: posisi yang terletak pada suatu garis lurus.

lingkaran: tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama terhadap sebuah titik tertentu.

notasi: lambang/symbol.

peluang: kemungkinan munculnya suatu kejadian.

peluang saling bebas: peluang dua atau lebih kejadian yang tidak saling memengaruhi.

peluang saling bersyarat: peluang dua kejadian yang saling bergantung apabila terjadi atau tidak terjadinya kejadian A akan memengaruhi terjadi atau tidak terjadinya kejadian B.

peluang saling lepas: peluang dua atau lebih kejadian yang tidak mungkin terjadi bersama-sama.

permutasi: jumlah kemungkinan urutan objek-objek yang dipilih dengan memperhatikan urutan objek.

permutasi siklis: permutasi yang susunannya melingkar (urutan melingkar).

persentil: membagi data yang telah diurutkan menjadi 100 bagian yang sama.

pi (π): perbandingan keliling lingkaran dengan diameternya; nilainya mendekati 3,141592654...

persamaan: dua ekspresi aljabar yang dihubungkan dengan sama dengan.

persamaan linear: persamaan disebut persamaan linear apabila grafik semua penyelesaiannya terletak pada sebuah garis. Contoh: $y = x + 3$ adalah linear karena grafik semua penyelesaiannya terletak pada satu garis.

persegi: suatu persegi panjang dengan empat sisi kongruen (sama panjang).

persegi panjang: suatu jajargenjang dengan dua sisi yang sejajar sama panjang dan besar keempat titik sudutnya 90° .

proporsi: suatu persamaan dalam bentuk $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ yang menyatakan bahwa dua rasio adalah ekuivalen.

refleksi: transformasi yang memindahkan tiap titik dengan menggunakan sifat bayangan oleh suatu cermin (pencerminan).

refleksi vertikal: transformasi refleksi terhadap sumbu x .

refleksi horizontal: transformasi refleksi terhadap sumbu y .

rotasi: transformasi yang memindahkan titik-titik pada suatu daerah dengan cara memutar titik-titik tersebut sejauh α terhadap suatu titik tertentu.

ruang sampel: himpunan semua hasil yang mungkin dalam suatu eksperimen (dalam materi peluang). Misalnya, ruang sampel dua koin yang ditos adalah (A, A) , (A, G) , (G, A) , (G, G) .

statistik: hasil analisis atau pengolahan data.

statistika: (1) cabang dari matematika terapan yang mempunyai cara-cara mengumpulkan dan menyusun data, mengolah dan menganalisis data serta menyajikan data dalam bentuk kurva atau diagram, menarik kesimpulan, menafsirkan parameter dan menguji hipotesis yang didasarkan pada hasil pengolahan data. (2) ukuran atau karakteristik yang didapatkan menggunakan data dari sampel.

sifat kesamaan pengurangan: apabila suatu bilangan dikurangkan dengan bilangan yang sama pada masing-masing ruas persamaan, maka kedua ruas tetap sama. Untuk setiap bilangan a , b , dan c , jika $a = b$, maka $a - c = b - c$. Contoh: jika $x = 3$, maka $x - 2 = 3 - 2$.

sifat kesamaan penjumlahan: apabila suatu bilangan ditambahkan dengan bilangan yang sama pada masing-masing ruas persamaan, maka kedua ruas tetap sama. Untuk setiap bilangan a , b , dan c , jika $a = b$, maka $a + c = b + c$.

sifat kesamaan perkalian: apabila kita menambahkan bilangan yang sama pada masing-masing ruas persamaan, kedua ruas tetap sama. Untuk setiap bilangan a , b , dan c , jika $a = b$, maka $a \times c = b \times c$.

sudut: gabungan dua sinar berbeda yang tidak terletak pada satu garis dengan satu titik pangkal.

sudut keliling: sudut yang titik sudutnya terletak pada lingkaran.

sudut pusat: sudut yang titik sudutnya berupa titik pusat lingkaran dan kaki-kakinya adalah jari-jari lingkaran itu.

tali busur: garis lurus dalam lingkaran yang menghubungkan dua titik pada lengkungan dan tidak melalui titik pusat lingkaran.

tembereng: luas daerah dalam lingkaran yang dibatasi oleh busur dan tali busur.

teorema: kesimpulan umum yang dikemukakan untuk dibuktikan berdasarkan hipotesis tertentu yang diberikan.

translasi: transformasi yang memindahkan titik-titik dengan arah dan jarak tertentu atau biasa disebut pergeseran.

translasi vertikal: transformasi yang memindahkan titik-titik dengan arah dan jarak ke arah atas dan bawah.

translasi horizontal: transformasi yang memindahkan titik-titik dengan arah dan jarak ke arah kanan dan kiri.

titik sampel: setiap hasil yang mungkin terjadi pada suatu percobaan.

variabel: huruf atau simbol lain yang digunakan untuk mewakili bilangan atau nilai yang tidak ditentukan.

Daftar Pustaka

- As'ari, A. R., Tohir, M., Valentino, E., Imron, Z., & Taufiq, I. 2017. *Buku Guru Matematika Revisi*. Jakarta: Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Balitbang, Kemendikbud.
- As'ari, A. R., Tohir, M., Valentino, E., Imron, Z., Taufiq, I., Hariarti, N. S., & Lukmana, D. A. 2017. *Matematika SMP/MTs Kelas VIII Semester 2. Edisi Revisi*. Jakarta: Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Balitbang, Kemendikbud.
- As'ari, A.R., Chandra, T.D., Yuwono, I., Anwar, L., Nasution, S. H., Hasanah, D., Muksar, M., Sari, V. K., & Atikah, N. 2018. *Buku Siswa Matematika SMA/MA Kelas XII*. Jakarta: Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Balitbang, Kemendikbud.
- As'ari, A.R., Chandra, T.D., Yuwono, I., Anwar, L., Nasution, S. H., Hasanah, D., Muksar, M., Sari, V. K., & Atikah, N. 2018. *Buku Guru Matematika SMA/MA Kelas XII*. Jakarta: Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Balitbang, Kemendikbud.
- Beswick, K., Chapman, O., Jaworski, B., & Wood, T. 2008. *The Handbook of Mathematics Teacher Education: Volume 4: The Mathematics Teacher Educator as a Developing Professional*. BRILL.
- Bishop, A., Clements, M. K., Keitel-Kreidt, C., Kilpatrick, J., & Leung, F. K. S. (Eds.). 2012. *Second International Handbook of Mathematics Education (Vol. 10)*. Springer Science & Business Media.
- Defantri, D. 2017. *Modul Matematika SMA Kurikulum 2013*. in Lintongnihuta, IDN.
- Fernandes, A., Koehler, J., & Reiter, H. 2011. Mathematics teachers circle around problem solving. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 17(2), 108-115.
- James, M. 2018. *Cambridge International AS & A Level Mathematics: Pure Mathematics 1 Worked Solutions Manual*. UK: Cambridge University Press.

- Jeffery, R. 2019. *Chapter x. Rolle's theorem, mean value theorem, parametric equations, arc length, surface of revolution, curvature, second order differential equations, l'hospital's rule.* In *Calculus (Third Edition)* (pp. 157-188). University of Toronto Press.
- Linsky, J., & Nicholson J., & Western B. 2018. *Complete Pure Mathematics 1 for Cambridge International AS & A Level (second edition).* UK: Oxford University Press.
- Mahmudi, A. 2019. *Kombinatorika.* Yogyakarta: Yogyakarta: Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY.
- Pemberton, S. 2018. *Cambridge International AS & A Level Mathematics: Pure Mathematics 1 Coursebook.* UK: Cambridge University Press.
- Pemberton, S. 2018. *Cambridge International AS & A Level Mathematics: Pure Mathematics 1 Practice book.* UK: Cambridge University Press.
- Rosen, K. H., & Krithivasan, K. 2012. *Discrete Mathematics and Its Applications: with Combinatorics and Graph Theory.* NY: Tata McGraw-Hill Education.
- Schoen, H. L., & Hirsch, C. R. 2020. The Core-Plus mathematics project: Perspectives and student achievement. *In Standards-Based School Mathematics Curricula* (pp. 311-344). UK: Routledge.
- Tohir, M. 2018. *Pembinaan Olimpiade Matematika SMP/MTs.* Jember: Matematohir Scientific Publishing.

Indeks

A

Aturan pengisian tempat 92

B

Busur iv, v, xi, xii, xiv, 49, 51, 52, 57, 58, 59, 64, 70, 76, 77, 78

D

Data 150

Diagram 92

Diameter 54, 56

E

Eksponen xii, 4, 21

Elemen 97

F

Fungsi iv, xi, xii, xiv, 1, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 20, 21, 22, 24, 28, 29, 34, 36, 37, 39, 47

Fungsi eksponen 15, 22

Fungsi kuadrat 11

G

Garis 5, 8, 54, 57, 77, 159

Grafik xii, 8, 10, 11, 14, 15, 16, 20, 21, 22, 24, 28, 29, 30, 32, 34, 37

H

Himpunan 151

Horizontal 4, 13, 16, 23, 29, 36, 37

J

Jari-jari 56, 64, 67, 74

Juring iv, v, xi, xiii, 49, 51, 67, 68, 69, 70, 72, 73, 74, 76, 77, 78

K

Kejadian v, xi, 90, 91, 112, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 124, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 137, 138, 139, 141

Keliling 54, 58, 69, 70

Koefisien 146

Kombinasi iv, v, xi, 4, 36, 38, 90, 91, 103, 104, 105, 108, 110

Kombinasi berulang 110

Konstanta xii, 8, 146

Kuadrat xii, 4, 10, 13, 34, 37, 39

L

Linear xii, 4, 8

Luas juring 68, 80, 82, 83, 86

M

Majemuk v, xi, 90, 91, 118, 124, 131, 137

P

Panjang busur 57, 59, 60, 73, 78, 80, 82, 86

Parabola 13

Peluang v, xi, 90, 91, 112, 113, 118,
123, 124, 127, 128, 129, 130, 131,
132, 133, 134, 135, 137, 139, 140,
141

Pergeseran 3

Permutasi v, xi, 90, 91, 95, 97, 98, 99,
100, 116

R

Refleksi iv, xi, xii, 4, 5, 19, 20, 21, 22,
23, 25, 37, 42

Rotasi iv, xi, 4, 6, 34

S

Sampel 113, 116, 127, 131, 133

Sudut pusat 59, 63

Sumbu x xii, 8, 20, 21, 28

Sumbu y xii, 24, 29

Susunan 96

T

Tali busur 56, 63

Tembereng v, xiii, 51, 81

Titik 5, 6, 22, 25, 55, 67, 68

Transformasi iv, xi, xiv, 1, 4, 5, 36, 37

Translasi iv, xi, xii, 4, 5, 7, 9, 10, 11,
13, 14, 15, 16, 17, 36, 41, 42, 43

V

Variabel xii, 8

Vertikal 4, 9, 11, 21, 27, 36, 37

Biodata Pelaku Perbukuan

Biodata Penulis

Nama Lengkap : Mohammad Tohir, S.Pd., M.Pd.
E-mail : matematohir@ibrahimy.ac.id
Alamat Kantor : Universitas Ibrahimy, Situbondo,
Jl. KHR. Syamsul Arifin No.1-3,
Sukorejo, Situbondo, Jawa Timur 68374
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika



Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. 2019–sekarang: Dosen Tadris Matematika Universitas Ibrahimy, Situbondo
2. 2015–sekarang: Guru Matematika di MTs Raudlatul Hasanah, Pamekasan
3. 2016–2019: Guru Matematika di SMPN 2 Jember
4. 2005–2015: Guru Matematika di SMP Islam Sabilillah Malang

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S2: Program Studi Pascasarjana Pendidikan Matematika, Universitas Jember (UNEJ) (2016–2017)
2. S1: Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Islam Malang (UNISMA) (2000–2004)

Judul Buku dan Tahun Terbit (dalam 10 Tahun Terakhir):

1. Model Buku Teks Mata Pelajaran Matematika SMP/MTs Kelas VII (2019)
2. Model Buku Panduan Guru Matematika SMP/MTs Kelas VII (2019)
3. Pembinaan Olimpiade Matematika SMP/MTs (2018)
4. Buku Siswa Matematika SMP/MTs Kelas VIII Semester 1 dan 2 (2017)
5. Buku Guru Matematika SMP/MTs Kelas VIII (2017)
6. Buku Pembinaan Olimpiade Matematika SMP/MTs (2017)
7. Penguatan Konsep Garis dan Sudut Mata Pelajaran Matematika SMP/MTs (2017)
8. Buku Pengayaan UN Matematika SMP/MTs Kelas IX (2016)
9. Pembinaan Olimpiade Guru Matematika SMP/MTs (2016)

10. Buku Siswa Matematika SMP/MTs Kelas VII Semester 1 dan 2 (2016)
11. Buku Guru Matematika SMP/MTs Kelas VII (2016)
12. Buku Siswa Matematika SMP/MTs Kelas VII Semester 1 dan 2 (2014)
13. Buku Guru Matematika SMP/MTs Kelas VII (2014)
14. Buku Siswa Matematika SMP/MTs Kelas VIII Semester 1 dan 2 (2014)
15. Buku Guru Matematika SMP/MTs Kelas VIII (2014)
16. Teknologi Informasi dan Komunikasi untuk SMP Kelas VII (2011)
17. Teknologi Informasi dan Komunikasi untuk SMP Kelas IX (2011)
18. Teknologi Informasi dan Komunikasi untuk SMP Kelas VIII (2011)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (dalam 10 Tahun Terakhir):

1. Building a caring community in problem based learning to improve students' mathematical connection capabilities (2021)
2. Prospective teacher's expectation of students' critical thinking process in solving mathematical problems based on Facione stages (2021)
3. Students' creative thinking skills in solving mathematics higher order thinking skills (HOTS) problems based on online trading arithmetic (2021)
4. Analysis of reflective student analogy reasoning in solving geometry problems (2021)
5. Prospective Teachers' Expectations of Students' Mathematical Thinking Processes in Solving Problems (2020)

Selengkapnya, kunjungi Akun Profil Penulis:

1. **Scopus ID:** 57204202856
<https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=57204202856>
2. **ORCID iD:** 0000-0001-8342-0972
<https://orcid.org/0000-0001-8342-0972>
3. **WoS ResearcherID:** AAE-8527-2019
<https://publons.com/researcher/3226066/mohammad-tohir/>
4. **Sinta ID:** 6734675
<https://sinta.ristekbrin.go.id/authors/detail?id=6734675&view=overview>
5. **Google Scholar ID:** c0s6OxUAAAAJ
<https://scholar.google.co.id/citations?user=c0s6OxUAAAAJ&hl=id>

Nama Lengkap : Ahmad Choirul Anam, M.Pd.
E-mail : choirulanam@ibrahimy.ac.id
Alamat Kantor : Universitas Ibrahimy, Situbondo,
Jl. KHR. Syamsul Arifin No.1-3,
Sukorejo, Situbondo, Jawa Timur 68374
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika



Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

- 2020–sekarang: Dosen Tadris Matematika Universitas Ibrahimy, Situbondo
- 2021-sekarang: Guru SMAN 1 Purwoharjo Banyuwangi

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S2: Program Studi Pascasarjana Pendidikan Matematika, Universitas Negeri Surabaya (2017–2019)
2. S1: Program Studi Pendidikan Matematika, UIN Sunan Ampel Surabaya (2012–2016)

Judul Buku dan Tahun Terbit (dalam 10 Tahun Terakhir):

-

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (dalam 10 Tahun Terakhir):

1. Abstraksi Reflektif Siswa Sekolah Menengah Pertama Pada Materi Segiempat dan Segitiga (2021)
2. Students' Mental Construction in Cube and Cuboid Concept Based on Mathematical Ability Differences (2020)
3. Understanding the quadrilateral concept of junior high school students based on APOS theory in terms of differences in cognitive styles (2019)
4. Integration of Ethnomathematics with probing-prompting learning Models to train students' mathematical communication (2019)
5. Pengembangan perangkat pembelajaran model probing-prompting berbasis etnomatematika untuk melatih kemampuan komunikasi matematika (2016)

Nama Lengkap : Ibnu Taufiq, S.Pd., M.Pd.
E-mail : taufiqibnu13@gmail.com
Alamat Kantor : SMA Bahrul Maghfiroh Malang,
Jl. Joyo Agung Atas No. 2 Kota Malang
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika



Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. 2009–Sekarang: Dosen PGSD Universitas Terbuka UPBJJ Malang
2. 2013–Sekarang: Guru Matematika di SMA Bahrul Maghfiroh Malang
3. 2014–Sekarang: Guru Matematika di SMP Bahrul Maghfiroh Malang
4. 2003–2014: Guru Matematika di SMP Islam Sabilillah Malang
5. 1997–2003: Guru Kelas di SD Islam Sabilillah Malang

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S2: Program Studi Pascasarjana Pendidikan Matematika, Universitas Negeri Malang (2003–2006)
2. S1: Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Negeri Malang (1991–1995)

Judul Buku dan Tahun Terbit (dalam 10 Tahun Terakhir):

1. Model Buku Teks Mata Pelajaran Matematika SMP/MTs Kelas VII (2019)
2. Model Buku Panduan Guru Matematika SMP/MTs Kelas VII (2019)
3. Buku Pengayaan UN Matematika SMP/MTs Kelas IX (2018)
4. Buku Siswa Matematika SMP/MTs Kelas VIII Semester 1 dan 2 (2017)
5. Buku Guru Matematika SMP/MTs Kelas VIII (2017)
6. Buku Pembinaan Olimpiade Matematika SMP/MTs (2017)
7. Buku Siswa Matematika SMP/MTs Kelas VII Semester 1 dan 2 (2016)
8. Buku Guru Matematika SMP/MTs Kelas VII (2016)
9. Buku Siswa Matematika SMP/MTs Kelas VII Semester 1 dan 2 (2014)
10. Buku Guru Matematika SMP/MTs Kelas VII (2014)
11. Buku Siswa Matematika SMP/MTs Kelas VIII Semester 1 dan 2 (2014)
12. Buku Guru Matematika SMP/MTs Kelas VIII (2014)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (dalam 10 Tahun Terakhir):

-

Biodata Penelaah

Nama Lengkap : Prof. Dr. Widowati, S.Si., M.Si.
E-mail : widowati.math@gmail.com
Alamat Kantor : FSM, Universitas Diponegoro,
Jl. Prof. H. Soedharto, SH, Tembalang,
Semarang
Bidang Keahlian : Matematika



Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. 1994–sekarang: Dosen Tetap Jurusan Matematika, Universitas Diponegoro, Semarang.
2. 2008–2011: Ketua Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Diponegoro Semarang
3. 2011–2015: Pembantu Dekan II Fakultas Sains dan Matematika (FSM), Universitas Diponegoro Semarang
4. 2015–sekarang: Dekan Fakultas Sains dan Matematika (FSM), Universitas Diponegoro Semarang

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S3: Program Studi Pascasarjana Pendidikan Matematika, Institut Teknologi Bandung (2005)
2. S2: Program Studi Pascasarjana Pendidikan Matematika, Institut Teknologi Bandung (2000)
3. S1: Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Diponegoro, Semarang (1993)

Judul Buku dan Tahun Terbit (dalam 10 Tahun Terakhir):

1. Sistem Kendali Optimal: Teori dan Aplikasinya Dibidang Inventory (2020)
2. Penerapan Teknologi dan Proses Produksi Kjabbb-Imta (2019)
3. Modul Teknik Budidaya Sistem Integrated Multi-Thropic Aquaculture (Imta) (2019)
4. Metode Kendali Diskret: Teori dan Simulasinya (2017)
5. Pemodelan Matematika: Analisis dan Aplikasinya (2013)

6. Kalkulus (2012)
7. Pemodelan Matematika Berbasis Maple (2011)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (dalam 10 Tahun Terakhir):

1. Implementation of an optimal control for reducing individuals infected by hepatitis B virus (2021)
2. Mathematical modeling and analysis of COVID-19 transmission dynamics in Central Java Province, Indonesia (2021)
3. Investigating the features of Indonesia stock price during covid-19 pandemic: An application of merton jump diffusion model (2021)
4. 1d-2d numerical model for wave attenuation by mangroves as a porous structure (2021)
5. Piecewise objective optimisation model for inventory control integrated with supplier selection considering discount (2021)

Selengkapnya, kunjungi Akun Profil Penulis:

1. **Scopus ID:** 8255360300
<https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=8255360300>
2. **ORCID iD:** 0000-0002-4372-6501
<https://orcid.org/0000-0002-4372-6501>
3. **Sinta ID:** 6007839
<https://sinta.ristekbrin.go.id/authors/detail?id=6007839&view=overview>
4. **Google Scholar ID:** CczqHJ4AAAAJ <https://scholar.google.co.id/citations?user=CczqHJ4AAAAJ&hl=id>

Nama Lengkap : Dr. Ali Mahmudi, M.Pd.

E-mail : alimahmudi@uny.ac.id

Alamat Kantor : Kampus FMIPA UNY Jl. Colombo 1. Karangmalang
Yogyakarta

Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika

Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

- Dosen FMIPA UNY Yogyakarta sejak 1999

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

- S3 Pendidikan Matematika UPI Bandung (2007–2010)

Judul Buku dan Tahun Terbit (dalam 10 Tahun Terakhir):

1. Matematika untuk SMK Kelas X Tahun 2016
2. Buku Teks Mata Pelajaran Matematika SMP Kurikulum 2013

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (dalam 10 Tahun Terakhir):

1. Enhancing students' self-efficacy through metacognitive strategies in learning mathematics (2020)
2. Reflective pedagogical paradigm approach in mathematics learning (2020)
3. Pre-service teacher's pedagogical content knowledge: What teachers know about students' errors? (2020)

Selengkapnya, kunjungi Akun Profil Penulis:

1. **Scopus ID:** 57204364666
<https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=57204364666>
2. **ORCID iD:** 0000-0001-7787-7036
<https://orcid.org/0000-0001-7787-7036>
3. **Sinta ID:** 5993352
<https://sinta.ristekbrin.go.id/authors/detail?id=5993352&view=overview>
4. **Google Scholar ID:** DF_u5VYAAAAJ
https://scholar.google.com/citations?user=DF_u5VYAAAAJ&hl=id

Biodata Ilustrator

Nama Lengkap : Ahmad Saad Ibrahim, S.Ds.

E-mail : baimsaadkv10@gmail.com

Bidang Keahlian : Desain Grafis & Ilustrasi



Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. Creative Director, Kakatu (2014-2018)
2. Motion Grapher (Internship), Sindo TV (2013)
3. Motion grapher video sosialisasi bahaya pornografi pada anak, Kemensos (2015-2016)
4. Trainer - Parenting Era Digital bersama Kementerian Pemberdayaan Perempuan & Perlindungan Anak (KPPPA) untuk Orangtua dan Anak di kota Banda Aceh, Manado, Denpasar, Padang & Tanjung Pinang
5. Pembicara - Internet Baik, mengasuh anak di era digital dalam program CSR Telkomsel : Internet Baik di 17 Kota selama 2016 & 2017
6. Ilustrator buku 'Aku lihat layar secukupnya' (2017)
7. Kordinator, Gerakan Selamatkan Generasi Emas Anak Indonesia 2045 (Semai 2045) 2015 - 2017
8. Senior Graphic Designer, Alami Inter Media (2018 - 2020)
9. Desainer & Ilustrator Modul Pembelajaran Jarak Jauh Kemdikbud (2020 - 2021)
10. Freelance desain grafis & Konsultan branding (2014 - Sekarang)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

- S1: Desain Komunikasi Visual, Institut Teknologi Bandung (2010 - 2015)

Biodata Editor

Nama Lengkap : Cicilia Erni Setyowati, S.S.

E-mail : ernisetowati2009@gmail.com

Alamat Kantor : -

Bidang Keahlian : Linguistik, Editing Naskah, Proof Read



Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. Editor buku Anak
2. Editor buku Pelajaran SD-SMP, PT, dan buku umum
3. Kepala Bagian Redaksi Buku Kependidikan dan Umum
4. Kepala Bagian Redaksi Kanisius Exclusive Publishing (KEP)
5. Kepala Bagian Kanisius Exclusive Publishing (KEP) dan Buku Digital

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

- Universitas Gadjah Mada, Fakultas Sastra/Ilmu Budaya, Jurusan Sastra Indonesia, spesialisasi di bidang Linguistik 1992-1998

Judul Buku dan Tahun Terbit (dalam 10 Tahun Terakhir):

1. Buku Doa Anak diterbitkan oleh Penerbit Kanisius
2. Buku Seri Orang Kudus diterbitkan oleh Penerbit Kanisius
3. Editor buku pelajaran Tematik (tingkat SD), bahasa Jawa (tingkat SD dan SMP), bahasa Inggris (tingkat SD), Pendidikan Agama Katolik (tingkat SD)
4. Editor buku Perguruan Tinggi
5. Editor dan penerjemah buku anak serial Franklin yang diterbitkan Penerbit Kanisius
6. Editor banyak buku anak, buku Perguruan Tinggi, buku humaniora, dan umum lainnya

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (dalam 10 Tahun Terakhir):

-

Biodata Desainer

Nama Lengkap : Erwin

E-mail : wienk1241@gmail.com

Bidang Keahlian : Layout/Settting

Riwayat Pekerjaan/Profesi (10 Tahun Terakhir):

2016 – sekarang : Freelancer CV. Eka Prima Mandiri

2015 – 2017 : Freelancer Yudhistira

2014 – sekarang : Frelancer CV Bukit Mas Mulia

2013 – sekarang : Freelancer Pusat Kurikulum dan Perbukuan

2013 – 2019 : Freelancer Agro Media Group

2012 – 2014 : Layouter CV Bintang Anaway Bogor

2004 – 2012 : Layouter CV Regina Bogor

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir)

1. Buku Teks Matematika kelas 9 Kemendikbud
2. Buku Teks Matematika kelas 10 Kemendikbud
3. SBMPTN 2014
4. TPA Perguruan Tinggi Negeri & Swasta
5. Matematika Kelas 7 CV Bintang Anaway
6. Siap USBN PAI dan Budi Pekerti untuk SMP CV Eka Prima Mandiri
7. Buku Teks Matematika Peminatan Kelas X SMA/MAK Kemendikbud



“

Matematika seperti berolahraga bagi otakmu. Hal itu
mempertajam pikiranmu.

Danica Mckellar

”

Catatan