



KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET, DAN TEKNOLOGI
BADAN STANDAR, KURIKULUM, DAN ASESMEN PENDIDIKAN
PUSAT PERBUKUAN

Buku Panduan Guru **Matematika** Tingkat Lanjut

Wikan Budi Utami, dkk.

2022

SMA/MA Kelas XII

Hak Cipta pada Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi Republik Indonesia.

Dilindungi Undang-Undang.

Disclaimer: Buku ini disiapkan oleh Pemerintah dalam rangka pemenuhan kebutuhan buku pendidikan yang bermutu, murah, dan merata sesuai dengan amanat dalam UU No. 3 Tahun 2017. Buku ini disusun dan ditelaah oleh berbagai pihak di bawah koordinasi Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi. Buku ini merupakan dokumen hidup yang senantiasa diperbaiki, diperbarui, dan dimutakhirkan sesuai dengan dinamika kebutuhan dan perubahan zaman. Masukan dari berbagai kalangan yang dialamatkan kepada penulis atau melalui alamat surel buku@kemdikbud.go.id diharapkan dapat meningkatkan kualitas buku ini.

Buku Panduan Guru Matematika Tingkat Lanjut untuk SMA/MA Kelas XII

Penulis

Wikan Budi Utami

Sri Adi Widodo

Fitria Sulistyowati

Penelaah

Sunardi

Kiki Ariyanti Sugeng

Penyelia/Penyelaras

Supriyatno

E. Oos M. Anwas

Arifah Dinda Lestari

Ilustrator

Fatoni Budi Darmojo

Editor

Lgina Aditya

Desainer

Hasbi Yusuf

Penerbit

Pusat Perbukuan

Badan Standar, Kurikulum, dan Asesmen Pendidikan

Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi

Kompleks Kemdikbudristek, Jalan RS. Fatmawati, Cipete, Jakarta Selatan

<https://buku.kemdikbud.go.id>

Cetakan pertama, 2022

ISBN 978-602-244-772-6 (no.jil.lengkap)

ISBN 978-602-244-774-0 (jil.2)

Isi buku ini menggunakan huruf EB Garamond, 12/18pt., Robert Granjon x, 246 hlm., 17.6 x 25 cm.

Kata Pengantar

Pusat Perbukuan; Badan Standar, Kurikulum, dan Asesmen Pendidikan; Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi memiliki tugas dan fungsi mengembangkan buku pendidikan pada satuan Pendidikan Anak Usia Dini, Pendidikan Dasar, dan Pendidikan Menengah. Buku yang dikembangkan saat ini mengacu pada Kurikulum Merdeka, dimana kurikulum ini memberikan keleluasaan bagi satuan/program pendidikan dalam mengembangkan potensi dan karakteristik yang dimiliki oleh peserta didik. Pemerintah dalam hal ini Pusat Perbukuan mendukung implementasi Kurikulum Merdeka di satuan pendidikan Pendidikan Anak Usia Dini, Pendidikan Dasar, dan Pendidikan Menengah dengan mengembangkan Buku Teks Utama.

Buku teks utama merupakan salah satu sumber belajar utama untuk digunakan pada satuan pendidikan. Adapun acuan penyusunan buku teks utama adalah Capaian Pembelajaran PAUD, SD, SMP, SMA, SDLB, SMPLB, dan SMALB pada Program Sekolah Penggerak yang ditetapkan melalui Keputusan Kepala Badan Penelitian dan Pengembangan dan Perbukuan Nomor 028/H/KU/2021 Tanggal 9 Juli 2021. Sajian buku dirancang dalam bentuk berbagai aktivitas pembelajaran untuk mencapai kompetensi dalam Capaian Pembelajaran tersebut. Buku ini digunakan pada satuan pendidikan pelaksana implementasi Kurikulum Merdeka.

Sebagai dokumen hidup, buku ini tentu dapat diperbaiki dan disesuaikan dengan kebutuhan serta perkembangan keilmuan dan teknologi. Oleh karena itu, saran dan masukan dari para guru, peserta didik, orang tua, dan masyarakat sangat dibutuhkan untuk pengembangan buku ini di masa yang akan datang. Pada kesempatan ini, Pusat Perbukuan menyampaikan terima kasih kepada semua pihak yang telah terlibat dalam penyusunan buku ini, mulai dari penulis, penelaah, editor, ilustrator, desainer, dan kontributor terkait lainnya. Semoga buku ini dapat bermanfaat khususnya bagi peserta didik dan guru dalam meningkatkan mutu pembelajaran.

Jakarta, Juni 2022

Kepala Pusat,

Supriyatno

NIP 19680405 198812 1 001

Prakata

Puji syukur kami panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa atas berkat dan rahmat-Nya, kami dapat menyelesaikan penulisan buku siswa Matematika Tingkat Lanjut. Buku ini disusun untuk memenuhi Capaian Pembelajaran Fase F+ bagi siswa SMA Kelas XII sesuai dengan Keputusan Menteri Pendidikan dan Kebudayaan Republik Indonesia Nomor 958/P/2020 dan Keputusan kepala badan penelitian dan pengembangan dan perbukuan No 028/H/KU/2021 tentang Capaian Pembelajaran pada Pendidikan Anak Usia Dini, Pendidikan Dasar, dan Pendidikan Menengah.

Matematika sering dipandang sebagai mata pelajaran yang abstrak, sulit, dan tidak relevan dalam kehidupan. Namun, banyak konsep dan prinsip matematika muncul di alam dan relevan dengan kehidupan sehari-hari.

Tim penyusun berusaha untuk merancang buku teks Matematika Tingkat Lanjut Kelas XII semenarik mungkin, agar siswa memiliki minat dan motivasi untuk mempelajari matematika. Pada buku ini, siswa diajak untuk mengingat kembali materi matematika pada jenjang sebelumnya dengan tahap remembering dan diajak untuk menggunakan teknologi seperti *Photomath*, *GeoGebra*, dan *Youtube*. Selain menggunakan teknologi, siswa diberikan kesempatan untuk berdiskusi, berkomunikasi, dan bekerjasama untuk menyelesaikan masalah matematis yang aplikatif di kehidupan sehari-hari. Pengembangan karakter Profil Pelajar Pancasila diharapkan dapat tercapai pada beberapa kegiatan pembelajaran yang ada pada buku ini seperti Ayo Bereksplorasi, Ayo Mencoba, Ayo Berpikir Kritis, dan Ayo Berpikir Kreatif. Pada beberapa masalah pada latihan soal, kami mengupayakan agar kemampuan siswa dalam berpikir tingkat tinggi semakin berkembang dengan memberikan soal berpikir kreatif. Kami berharap karakter Profil Pelajar Pancasila dan keterampilan abad ke-21 pada siswa semakin berkembang.

Kami mengucapkan terima kasih kepada berbagai pihak yang telah membantu mewujudkan buku teks Matematika Tingkat Lanjut Kelas XII, yaitu para penelaah, yaitu Prof. Dr. Sunardi, M.Pd., Dr. Kiki Ariyanti Sugeng, M.Si., dan Pusat Kurikulum dan Perbukuan yang telah memfasilitasi tim penulis dan para penelaah sehingga buku ini dapat terselesaikan. Kami berharap buku teks Matematika Tingkat Lanjut Kelas XII dapat bermanfaat bagi siswa agar capaian pembelajaran fase F+ dapat terpenuhi diakhir fase, dan siswa SMA semakin menyenangi matematika dan merasakan manfaat belajar matematika.

Yogyakarta & Malang, Juli 2021

Tim Penulis

Daftar Isi

Kata Pengantar	iii
Prakata	iv
Daftar Isi	v
Daftar Gambar	viii
Daftar Tabel	x
Panduan Umum	1
A. Pendahuluan.....	2
B. Capaian Pembelajaran	4
C. Strategi Umum	5
D. Penjelasan Bagian-Bagian Buku Peserta didik	6
E. Alternatif Pembelajaran	12
F. Sistem Penilaian Hasil Belajar	13
G. Kegiatan Tindak Lanjut.....	13
H. Interaksi Guru dengan Orang Tua.....	14
Bab 1 Geometri Analitik	15
Alternatif Skema Pembelajaran	16
Panduan Pembelajaran.....	18
A. Lingkaran dan Garis Singgung	19
1. Definisi Lingkaran.....	19
2. Persamaan Lingkaran	19
3. Kedudukan Suatu Titik Terhadap Lingkaran.....	25
4. Kedudukan Garis Terhadap Lingkaran.....	29
5. Persamaan Garis Singgung Lingkaran	35
B. Irisan Kerucut.....	46
1. Parabola.....	46
2. Elips.....	51
3. Hiperbola.....	59

C. Pengayaan Geometri Analitik	68
1. Kedudukan Dua Lingkaran	68
2. Persamaan Garis Singgung Irisan Kerucut	72
D. Uji Kompetensi	74
Bab 2 Limit	77
Alternatif Skema Pembelajaran	78
Panduan Pembelajaran	79
A. Definisi Limit Fungsi	80
B. Sifat-Sifat Limit Fungsi	84
C. Limit Fungsi Aljabar	88
D. Limit Fungsi Trigonometri	95
E. Aplikasi Limit Fungsi	102
F. Uji Kompetensi	107
Bab 3 Turunan Fungsi	111
Alternatif Skema Pembelajaran	112
Panduan Pembelajaran	113
A. Definisi Turunan Fungsi	114
1. Konsep Turunan Fungsi	114
2. Penulisan Turunan Fungsi	115
B. Sifat-Sifat Turunan Fungsi	116
1. Turunan Fungsi Aljabar	119
2. Turunan Fungsi Trigonometri	121
3. Aturan Rantai pada Turunan	124
C. Aplikasi Turunan	128
1. Persamaan Garis Singgung pada Kurva	128
2. Fungsi Naik, Fungsi Turun, dan Diam (Stasioner)	134
3. Titik Ekstrim, Nilai Balik Minimum, dan Nilai Balik Maksimum	140
D. Aplikasi Turunan Diberbagai Bidang Ilmu	147
E. Uji Kompetensi	153
Bab 4 Integral	157
Alternatif Skema Pembelajaran	158
Panduan Pembelajaran	159

A. Integral Tak Tentu.....	160
1. Definisi Integral Tak Tentu.....	161
2. Sifat-Sifat Integral Tak Tentu.....	162
B. Integral Tentu.....	169
1. Jumlahan Riemann	169
2. Integral Tentu.....	176
3. Sifat-Sifat Integral Tentu.....	181
4. Teorema Dasar Kalkulus	183
C. Penerapan Integral.....	192
1. Luas Bidang datar.....	193
2. Dalam bidang Ekonomi dan Bisnis	194
3. Dalam Fisika	195
D. Uji Kompetensi	199
Bab 5 Analisis Data Dan Peluang.....	203
Alternatif Skema Pembelajaran.....	204
Panduan Pembelajaran.....	205
A. Distribusi Seragam	206
B. Distribusi Binomial.....	210
1. Fungsi Distribusi Binomial.....	212
2. Nilai Harapan Distribusi Binomial	221
C. Distribusi Normal.....	219
1. Fungsi Distribusi Normal.....	220
2. Nilai Harapan Distribusi Normal	223
D. Uji Kompetensi	230
Lampiran Tabel Distribusi Normal Z.....	234
Glosarium.....	235
Daftar Pustaka	237
Indeks	239
Profil	240

Daftar Gambar

Gambar 1.1.	Bentuk Kurva Irisan Kerucut	18
Gambar 1.2.	Lingkaran dengan Pusat $O(0,0)$ dan Jari Jari r	19
Gambar 1.3.	Lingkaran dengan Pusat $P(a,b)$ dan Jari Jari	20
Gambar 1.4.	Kedudukan Titik $A(x,y)$ Terhadap Lingkaran	25
Gambar 1.5.	Kedudukan Garis g Terhadap Lingkaran	29
Gambar 1.6.	Proses Menentukan Garis Singgung	35
Gambar 1.7.	Lingkaran, Garis Singgung Lingkaran, dan Titik Singgung	41
Gambar 1.8.	Irisan Kerucut Berbentuk Parabola	46
Gambar 1.9.	Parabola dengan Puncak $O(0,0)$ dan Sumbu Simetris adalah Sumbu Y	47
Gambar 1.10.	Kurva Parabola dengan Puncak $O(0,0)$ dan Sumbu Simetris adalah Sumbu X	47
Gambar 1.11.	Kurva Lintasan Kembang Api	50
Gambar 1.12.	Gambar Unsur Unsur Elips	51
Gambar 1.13.	Elips dengan Pusat $O(0,0)$ dan Sumbu Mayor Adalah Sumbu X	52
Gambar 1.14.	Elips Dengan Pusat $O(0,0)$ dan Sumbu Mayor Sumbu Y	54
Gambar 1.15.	Unsur-Unsur Pada Hiperbola	59
Gambar 1.16.	Hiperbola Dengan Pusat $O(0,0)$ dengan fokus pada sumbu X	60
Gambar 1.17.	Kurva Hiperbola Untuk Bahan Diskusi	61
Gambar 1.18.	Kedudukan Dua Lingkaran yang Saling Berpotongan	68
Gambar 1.19.	Kedudukan Dua Lingkaran yang Saling bersinggungan	68
Gambar 1.20.	Kedudukan Dua Lingkaran yang Saling Lepas	69
Gambar 2.1.	Grafik Fungsi f Kontinu	89
Gambar 2.2.	Kurva Laju Produksi Sepatu	90
Gambar 2.3.	Bentuk Lain Kurva Laju Produksi Sepatu	95
Gambar 2.4.	Interpretasi Geometri Sudut Pusat Lingkaran	96
Gambar 2.5.	Tenaga medis dan masyarakat yang menyukseskan program vaksin Covid-19	102

Gambar 3.1.	Kurva $f(x)$	116
Gambar 3.2.	Garis Singgung Kurva $f(x)$	129
Gambar 3.3.	Kemonotonan Grafik Fungsi $f(x)$	134
Gambar 3.4.	Nilai Balik dari Kurva $f(x)$	141
Gambar 3.5.	Kurva Titik Belok Horizontal pada c dengan Titik Belok $(c, f(c))$	144
Gambar 3.6.	Jumlah Orang Terkonfirmasi Covid di DKI Jakarta sejak 16 Maret 2020 hingga 20 Agustus 2020	148
Gambar 4.1.	Grafik Fungsi $f(x) = x^2$	171
Gambar 4.2.	Grafik Fungsi $x = f(x)$	172
Gambar 4.3.	Grafik fungsi $f(x) = x^2 - 4x + 3$	172
Gambar 4.4.	Grafik fungsi $f(x) = 2x + 4x$	173
Gambar 4.5.	Grafik fungsi $y = (2-x)^2$	174
Gambar 4.6.	Grafik fungsi $y = x^2 + x$	174
Gambar 4.7.	Grafik fungsi $y = -2x + 4$	175
Gambar 4.8.	Grafik fungsi $y = f(x)$	183
Gambar 4.9.	Grafik fungsi $y = f(x)$	184
Gambar 4.10.	Grafik fungsi $y = 2x - x^3$	189
Gambar 4.11.	Grafik fungsi $y = x^3 - 9x$	189
Gambar 4.12.	Grafik fungsi $f(x) = x^2 - 4x$	193
Gambar 4.13.	Grafik fungsi $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$	193
Gambar 4.14.	Grafik fungsi $f(x) = 4000x + 1000$	194
Gambar 4.15.	Grafik fungsi $f(x) = x^2 + x - 12$	196
Gambar 4.16.	Grafik Fungsi $y = x^2$ dan $y = -x^2 + 4x$	197
Gambar 4.17.	Kerucut Terbalik	201
Gambar 4.18.	Sketsa Partisi Kerucut Terbalik	202
Gambar 5.1.	Kurva Normal	220
Gambar 5.2.	Dua Kurva Normal	220
Gambar 5.3.	Dua Kurva Normal	220
Gambar 5.4.	Dua Kurva Normal	220
Gambar 5.5.	Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(0,5 < Z < 1,75)$	221
Gambar 5.6.	Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(-1,33 < Z < 2,22)$	222
Gambar 5.7.	Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(-1,5 < Z < 0)$	224
Gambar 5.8.	Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(Z < -1,4)$	225

Gambar 5.9.	Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(-0,55 < Z < 0,85)$	225
Gambar 5.10.	Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(Z > 1,34)$	226
Gambar 5.11.	Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(Z > z)$	226
Gambar 5.12.	Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(Z > 1,6)$	227
Gambar 5.13.	Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(-0,56 < Z < 0,6)$	227
Gambar 5.14.	Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(Z > 2z)$	228
Gambar 5.15.	Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(Z < -0,67)$	228
Gambar 5.16.	Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(Z < -1,67)$	229
Gambar 5.17.	Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(Z \geq 2)$	231
Gambar 5.18.	Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(-0,4 < Z < 0,8)$	231
Gambar 5.19.	Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(Z < -1,5)$	232
Gambar 5.20.	Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(Z > 2,50)$	232
Gambar 5.21.	Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(0,63 < Z < 2,50)$	233
Gambar 5.22.	Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(Z < 0,63)$	233

Daftar Tabel

Tabel 1.1.	Ringkasan Jawaban Nomor 1 Pada Latihan Soal 1.2	27
Tabel 1.2.	Persamaan Lingkaran dan Persamaan Garis Polar	42
Tabel 2.1.	Kecepatan Sapi dalam Pacu Jawi	80
Tabel 2.2.	Nilai $f(x) = 3x - 1$ untuk x mendekati 6.....	81
Tabel 2.3.	Nilai $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ untuk x mendekati 3.....	82
Tabel 2.4.	Nilai $f(x) = (x-2)(x^2+2)$ untuk x mendekati 2.....	82
Tabel 4.1.	Tabel fungsi $F(x)$ dan $f(x)$	160
Tabel 4.2.	Alternatif Jawaban Untuk Kegiatan Eksplorasi 4.2.....	169
Tabel 5.1.	Alternatif Jawaban Untuk Kegiatan Eksplorasi 5.2 Untuk Satu koin	210
Tabel 5.2.	Alternatif Jawaban Untuk Kegiatan Eksplorasi 5.2 Untuk Dua koin	211
Tabel 5.3.	Peluang Kegagalan Mencanting.....	216
Tabel 5.4.	Alternatif Jawaban Kegiatan Eksplorasi 5.3.....	220
Tabel 5.5.	Lampiran Tabel Distribusi Normal Z	234

A. Pendahuluan

1. Tujuan Penyusunan Buku Panduan Guru

Peraturan Menteri Pendidikan dan Kebudayaan Nomor 71 Tahun 2013 mengatur bahwa buku pelajaran meliputi buku untuk peserta didik dan buku untuk guru. Buku Panduan Guru Matematika Tingkat Lanjut Kelas XII SMA memiliki empat fitur utama. Pertama, buku panduan guru digunakan sebagai panduan penggunaan dan cara membelajarkan materi pada buku peserta didik matematika tingkat lanjut SMA kelas XII. Guru dapat terlebih dahulu membaca petunjuk yang ada di buku guru sebelum memulai setiap kegiatan pembelajaran di Buku Siswa. Buku panduan guru ini memiliki penjelasan yang lebih detail untuk setiap bagian dari Buku Siswa, sehingga guru dapat melakukan kegiatan pembelajaran sesuai dengan tujuan yang telah ditetapkan.

Kedua, buku ini digunakan guru sebagai acuan aktifitas atau kegiatan pembelajaran. Buku ini berisi tujuan pembelajaran yang dikemas dalam pengalaman belajar, tahapan kegiatan pembelajaran, latihan soal terbimbing, latihan soal, dan alternatif jawaban di setiap subbab. Uji kompetensi dan alternatif jawabannya diberikan di setiap akhir bab. Oleh karena itu, buku ini diharapkan dapat memudahkan guru untuk mengidentifikasi kegiatan pembelajaran untuk mencapai pengalaman belajar yang diinginkan.

Ketiga, buku panduan guru digunakan untuk memberikan gambaran tentang metode atau pendekatan pembelajaran yang dapat diterapkan dalam pembelajaran di kelas. Dalam Buku Siswa, setiap materi di setiap bab dimulai dengan apersepsi yang dekat dengan kehidupan sehari-hari. Buku peserta didik dilengkapi berbagai kegiatan eksplorasi yang dapat membantu peserta didik memahami konsep yang disajikan, memberikan alternatif metode pembelajaran yang dapat digunakan untuk berdiskusi, bertanya, dan menjawab pertanyaan dan penemuan. Selain itu, pada Buku Siswa terdapat alternatif metode pembelajaran yang dapat diterapkan di kelas, seperti pendekatan kontekstual dan penemuan terbimbing. Berkaitan dengan hal tersebut, pada Buku Panduan Guru ini terdapat alternatif proses pembelajaran dengan pendekatan kontekstual.

Keempat, di dalam buku ini, guru diberikan alternatif untuk melakukan tes diagnostik, baik diagnosik kognitif maupun non kognitif. Tes diagnostik kognitif bertujuan untuk mengetahui kemampuan peserta didik terhadap ketercapaian kompetensi peserta didik, sedangkan tes diagnostik non kognitif bertujuan untuk mengetahui kondisi psikologis peserta didik sebelum menerima materi. Kedua tes diagnostik ini diperlukan oleh guru untuk mempersiapkan strategi pembelajaran yang akan dilakukan di kelas.

Guru juga diharapkan dapat mengembangkan metode dan pendekatan pembelajaran yang meningkatkan keterampilan abad 21. Kegiatan pembelajaran memungkinkan guru untuk mengajak peserta didik memperdalam keterampilan berpikir kritis, kreatif, bekerja sama, dan berkomunikasi. Penerapan keterampilan belajar di abad 21 juga erat kaitannya dengan mendorong peserta didik untuk mengembangkan keterampilan berpikir tingkat tinggi (HOTS). Oleh karena itu, guru diharapkan mampu memberikan ruang, kesempatan, dan pengalaman belajar kepada peserta didik, agar mereka tidak hanya memiliki keterampilan berpikir yang sederhana, tetapi juga terbiasa untuk berpikir tingkat tinggi.

Dengan adanya Buku Panduan Guru ini, diharapkan Capaian Pembelajaran dapat tercapai. Peserta didik diharapkan dapat (1) memahami konsep terkait dengan sifat-sifat geometri dengan persamaan (titik, garis, lingkaran, elips, parabola, parabola.), (2) menerapkan konsep dasar kalkulus (limit, turunan dan integral) di dalam konteks pemecahan masalah aplikasi dalam berbagai bidang, dan (3) mengevaluasi hasil keputusan dengan menggunakan distribusi probabilitas dengan menghitung nilai yang diharapkan.

2. Profil Pelajar Pancasila

Salah satu visi dari Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi, yaitu pembelajaran yang mengedepankan Profil Pelajar Pancasila. Profil Pelajar Pancasila mewujudkan peserta didik Indonesia yang memiliki kemampuan global dan bertindak sesuai dengan nilai-nilai Pancasila, serta memiliki enam karakteristik utama, yaitu: (1) beriman, bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa dan berakhlak mulia, (2) berkebinekaan global, (3) gotong royong, (4) mandiri, (5) bernalar kritis, dan (6) kreatif.

Beberapa fitur pada Buku Siswa merujuk pada pengembangan Profil Pelajar Pancasila, seperti Ayo Mengomunikasikan, Ayo Mencoba, Ayo Bereksplorasi, Ayo Berpikir Kreatif, Ayo Berpikir Kritis, Ayo Berdiskusi. Dalam membelajarkan materi pada Buku Siswa, guru dapat berpedoman pada Buku Panduan Guru ini, sehingga capaian pembelajaran dapat tercapai dan memperkuat karakter Profil Pelajar Pancasila.

3. Karakteristik Matematika Tingkat Lanjut untuk SMA Kelas XII

Buku Panduan Guru ini mencakup tiga elemen konten dan lima elemen kecakapan. Elemen konten dalam Buku Pelajaran Matematika ini terkait dengan pandangan bahwa matematika sebagai materi pembelajaran (*subject matter*) dan yang harus dipahami peserta didik antara lain:

1. Geometri, membahas tentang sifat-sifat geometri dari persamaan (garis singgung, lingkaran, elips, parabola, hiperbola), serta menggunakan sistem koordinat untuk membuktikan sifat geometri sederhana secara aljabar,
2. Kalkulus, membahas tentang limit, turunan, dan integral dalam penyelesaian masalah, dan
3. Analisis data dan peluang, pada materi ini membahas tentang parameter distribusi data secara statistik (seragam, binomial, dan normal), menghitung nilai harapan distribusi binomial dan normal dan menggunakannya dalam penyelesaian masalah.

Cakupan elemen kecakapan dalam buku guru antara lain Pemahaman Matematis, Penalaran dan Pembuktian Matematis, Pemecahan Masalah Matematis, Komunikasi dan Representasi Matematis Koneksi Matematis. Elemen kecakapan tersebut terkait dengan pandangan bahwa matematika sebagai alat konseptual untuk mengonstruksi dan merekonstruksi materi pembelajaran matematika berupa aktivitas mental yang membentuk alur berpikir dan alur pemahaman yang dapat mengembangkan kecakapan-kecakapan.

B. Capaian Pembelajaran

1. Deskripsi capaian pembelajaran fase F+ kelas XII SMA

Pada akhir fase F+ untuk kelas XII SMA, peserta didik dapat menyatakan sifat-sifat geometri dengan persamaan (titik, garis, lingkaran, elips, parabola, dsb.). Peserta didik dapat mengevaluasi hasil keputusan dengan menggunakan distribusi probabilitik dengan menghitung nilai yang diharapkan. Peserta didik juga dapat menerapkan konsep dasar kalkulus di dalam konteks pemecahan masalah aplikasi dalam berbagai bidang.

2. Capaian pembelajaran berdasarkan domain untuk Matematika Tingkat Lanjut fase F+ kelas XII SMA

Elemen	Capaian Pembelajaran
Geometri	Di akhir fase F+, peserta didik dapat menyatakan sifat-sifat geometri dari persamaan (garis singgung, lingkaran, elips, parabola, hiperbola). Mereka menggunakan sistem koordinat untuk membuktikan sifat geometri sederhana secara aljabar.

Elemen	Capaian Pembelajaran
Analisa Data dan Peluang	Di akhir fase F+, peserta didik dapat menginterpretasi parameter distribusi data secara statistik (seragam, binomial dan normal). menghitung nilai harapan distribusi binomial dan normal dan menggunakannya dalam penyelesaian masalah,
Kalkulus	Di akhir fase F+, peserta didik menerapkan konsep dasar kalkulus, yaitu limit, turunan dan integral dalam penyelesaian masalah.

C. Strategi Umum

Buku Siswa dirancang dengan pendekatan Pembelajaran Berbasis Masalah (*Problem Based Learning*) dimana peserta didik dihadapkan pada masalah matematis dan peserta didik diberikan kesempatan untuk menyelesaikan masalah tersebut. Selain itu, guru dapat menggunakan pendekatan lain seperti penemuan terbimbing (*discovery learning*). Dengan pendekatan ini, peserta didik memiliki kesempatan untuk melakukan pra-eksplorasi dan dibimbing melalui pertanyaan pemandu terstruktur (*scaffolding question*) untuk mengeksplorasi konsep-konsep kunci yang menjadi tujuan belajar mereka. Namun, guru dapat menggunakan berbagai pendekatan lain tergantung pada situasi lokal.

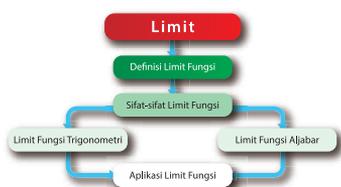
Proses pembelajaran memungkinkan peserta didik untuk melakukan kegiatan eksploratif secara individu atau kelompok. Interaksi antar murid dan antara guru dan murid adalah dasar dari pemahaman yang lebih dalam. Guru berperan sangat penting dalam memimpin kegiatan pembelajaran, membimbing proses berpikir peserta didik, memfasilitasi diskusi kelas untuk mencapai tujuan pembelajaran yang diinginkan. Dengan posisi guru dalam aktivitas pembelajaran tersebut, guru menjadi ujung tombak agar pembelajaran yang dilakukan tidak melenceng dari arah Capaian Pembelajaran yang sudah ditetapkan.

Guru dapat menggunakan pendekatan *flipped classroom* sebagai salah satu alternatif pembelajaran jarak jauh, seperti saat pandemi Covid-19. Pendekatan ini menekankan pada proses pembelajaran yang dibalik dari yang konvensional. Urutan pembelajaran yang biasanya/konvensional adalah guru menyampaikan materi, kemudian peserta didik mengerjakan tugas atau latihan untuk penguatan. Namun, pada metode *flipped classroom*, peserta didik mengerjakan soal tutorial secara asinkronous (melalui *Google Classroom*, atau yang sejenisnya) dan melakukan

komunikasi virtual menggunakan *Google Meet* atau *Zoom* dalam sesi sinkronous (*online session*). Peserta didik bisa mencari buku, berdiskusi, dan bertanya, dengan tetap melalui pembimbingan dari seorang guru. Guru dapat juga merekam penjelasan materi sehingga peserta didik dapat menonton pembahasan dan penjelasan konsep dari soal eksplorasi, setelah sebelumnya melakukan eksplorasi secara mandiri. Kegiatan di sesi sinkronous lebih banyak digunakan untuk diskusi, tanya-jawab, dan memberikan umpan balik kepada peserta didik.

D. Penjelasan Bagian-Bagian Buku Peserta didik

1 Peta Konsep



Peta konsep yang terdapat pada awal bab merupakan diagram yang menunjukkan hubungan antarkonsep yang terdapat pada setiap bab. Peserta didik perlu mencermati peta konsep ini untuk mendapatkan gambaran yang luas tentang isi bab tersebut.

2



Peserta didik diminta untuk mengingat kembali materi sebelumnya sebagai materi prasyarat untuk mempelajari materi baru.

3



Peserta didik mengomunikasikan pendapat atau hasil diskusi di dalam kelompok. Dengan mengomunikasikan hasil diskusi ini, peserta didik dapat mempresentasikan gagasan yang sudah disepakati di dalam kelompok. Seperti pada etika dalam presentasi, peserta didik diminta untuk menghargai teman yang sedang presentasi. Dengan sikap saling menghargai ini, karakter berakhak mulia pada elemen Profil Pelajar Pancasila yang pertama yaitu beriman, bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa dan berakhak mulia dapat berkembang menjadi lebih baik.

<p>4</p>  <p>Ayo Mencoba</p>	<p>Peserta didik diharapkan dapat mengerjakan soal atau kegiatan sejenis setelah diberikan penjelasan penyelesaian satu soal atau lebih. Pada kegiatan Ayo Mencoba, peserta didik dapat melakukan kegiatan ini secara mandiri atau berkolaborasi dengan teman sekelompok. Peserta didik diharapkan memiliki rasa tanggung jawab atas proses dan hasil belajar yang telah diperoleh. Diharapkan karakter gotong royong dan mandiri pada Profil Pelajar Pancasila dapat berkembang menjadi lebih baik.</p>
<p>5</p>  <p>Ayo Berpikir Kreatif</p>	<p>Peserta didik berpikir kreatif jika dapat membuat ide atau alternatif solusi yang baru dan berbeda dari hal umum. Pada kegiatan Ayo Berpikir kreatif ini, peserta didik dapat menghasilkan gagasan, karya, atau tindakan yang orisinal, sehingga karakter kreatif dalam Profil Pelajar Pancasila dapat berkembang.</p>
<p>6</p>  <p>Ayo Berpikir Kritis</p>	<p>Pada kegiatan Ayo Berpikir Kritis, peserta didik diharapkan memiliki pengalaman untuk memproses informasi dan gagasan, menganalisis, dan mengevaluasi penalaran, merefleksikan pemikiran dan proses berpikir, serta mengambil suatu keputusan dengan cermat. Dengan melatih kemampuan berpikir kritis ini, secara tidak langsung peserta didik telah mengembangkan keterampilan abad 21 serta mengembangkan karakter Profil Pelajar Pancasila.</p>

7



Ayo Berdiskusi

Bertukar pikiran antar peserta didik dan menyatakan gagasan merupakan kegiatan yang bermanfaat untuk memperdalam pengetahuan, sehingga dapat menyelesaikan masalah atau menjawab pertanyaan. Selain bermanfaat untuk memperdalam pengetahuan, pada kegiatan Ayo Berdiskusi diharapkan peserta didik dapat berlatih untuk berkolaborasi, peduli, dan berbagi kepada sesama, sehingga karakter Profil Pelajar Pancasila dapat berkembang menjadi lebih baik.

8



Ayo Bereksplorasi

Peserta didik melakukan kegiatan ini untuk menyelidiki konsep matematika yang berkaitan dengan pembahasan materi. Eksplorasi selalu dilakukan sebelum peserta didik mendalami konsep matematika beserta aplikasinya. Kegiatan Ayo Bereksplorasi dapat dilakukan secara mandiri atau secara kolaborasi. Dengan kegiatan ini, peserta didik diharapkan memiliki rasa tanggung jawab atas proses dan hasil belajar yang diperoleh. Harapannya elemen gotong royong dan mandiri pada Profil Pelajar Pancasila dapat berkembang menjadi lebih baik.

9



Definisi

Bagian ini memberikan definisi untuk membantu pemahaman peserta didik atas konsep yang dipelajari. Peserta didik diminta untuk memperhatikan definisi dari suatu konsep agar dapat digunakan untuk membuktikan suatu sifat atau masalah matematis

10



Tahukah Kalian?

Bagian ini diberikan pengetahuan umum meliputi tokoh-tokoh matematika terkait materi yang akan dipelajari.

<p>11</p>  <p>Sifat-sifat</p>	<p>Bagian ini memberikan sifat-sifat konsep di matematika, sehingga membantu pemahaman peserta didik atas konsep yang dipelajari. Peserta didik diminta untuk memperhatikan sifat-sifat dari suatu konsep agar dapat digunakan untuk menyelesaikan suatu masalah matematis yang dipelajari.</p>
<p>12</p>  <p>Miskonsepsi</p>	<p>Merupakan suatu peluang kejadian yang dapat terjadi jika peserta didik melakukan percobaan tidak sesuai dengan petunjuk guru. Guru perlu memperhatikan kejadian miskonsepsi agar peserta didik melakukan kegiatan seperti perintah atau petunjuk yang diberikan.</p>
<p>13</p>  <p>Ayo Gunakan Teknologi</p>	<p>Teknologi memudahkan peserta didik untuk menyelesaikan masalah atau pekerjaan matematika. Peserta didik dapat memanfaatkan kalkulator dan berbagai aplikasi untuk mengerjakan tugas. Peserta didik memilih teknologi yang sesuai dengan kebutuhan dan kemampuan mereka.</p>
<p>14</p>  <p>Cek Dengan <i>Photomath</i></p>	<p><i>Photomath</i> merupakan salah satu aplikasi yang dapat digunakan untuk pembelajaran matematika. Pada kegiatan ini peserta didik dan guru dapat melakukan pemeriksaan ulang terhadap hasil yang diperoleh apakah sudah benar atau belum. Apabila hasil yang diperoleh belum benar, maka perlu dilihat kembali jawaban untuk melihat apakah ada langkah yang keliru dalam proses menyelesaikan masalah matematis</p>

16



Soal Berpikir Kreatif

Pada bagian ini, peserta didik diharapkan dapat mengkreasikan alternatif solusi dari soal yang dihadapi, menghasilkan alternatif gagasan, karya atau tindakan. Selain itu pada jenis soal ini, peserta didik juga harus memproses informasi dan gagasan, menganalisis dan mengevaluasi penalaran, merefleksikan pemikiran dan proses berpikir serta mengambil suatu keputusan dengan cermat.

17 Contoh Soal

Contoh Soal 1.14

Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = 4$, jika

- mempunyai kemiringan 2.
- membentuk sudut 45° terhadap sumbu X positif.
- sejajar garis $l: 2x - 3y + 4 = 0$.

Bagian ini diberikan untuk membantu pemahaman peserta didik atas konsep yang dipelajari. Perhatikan contoh soal dan kaitkan dengan penjelasan sebelumnya agar peserta didik merasakan manfaat bagian tersebut.

18 Alternatif Penyelesaian

Alternatif Penyelesaian:

Bagian a

Dari penjelasan sebelumnya, nilai m dapat dicari sebagai berikut.

$$m = \pm \sqrt{r^2(m^2 + 1)} = \pm \sqrt{2^2(m^2 + 1)} = \pm 2m$$

Maka diperoleh bahwa $m_1 = 20$ dan $m_2 = -20$.

Jadi, persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = 4$ dengan kemiringan 2 adalah $y = 2x + 20$ dan $y = 2x - 20$.

Bagian b

Diketahui bahwa garis singgung membentuk sudut 45° terhadap sumbu X positif. Misalkan persamaan garis singgung lingkaran yang akan kalian cari adalah $y = mx + n$, di mana m merupakan kemiringan garis yang dapat diperoleh dari tangen sudut 45° yaitu $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, sehingga

$$y = mx \pm r\sqrt{m^2 + 1} = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)x \pm 2\sqrt{\left(\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 + 1\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{2}x \pm 2\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Jadi, persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = 4$ yang membentuk sudut 45° terhadap sumbu X positif adalah

Alternatif penyelesaian merupakan suatu alternatif untuk menyelesaikan contoh soal, latihan soal terbimbing dan latihan soal. Seperti pengertian alternatif yaitu beberapa kemungkinan, guru dipersilahkan menggunakan bentuk atau model jawaban yang lain dalam menyelesaikan contoh soal, latihan soal terbimbing dan latihan soal.

19 Latihan Soal Terbimbing

Latihan Soal Terbimbing 1.12

Tentukan persamaan garis singgung lingkaran yang melalui titik $Q(1, -3)$, jika persamaan lingkarannya adalah

- $L \equiv x^2 + y^2 = 16$
- $L \equiv x^2 + y^2 - 8x - 2y + 12 = 0$.

Alternatif Penyelesaian:

Untuk bagian 1, dengan menggunakan prinsip bagi adil, diperoleh bahwa persamaan garis singgung lingkaran yang melalui titik $Q(1, -3)$ adalah sebagai berikut

Jadi, persamaan garis singgung $L \equiv x^2 + y^2 = 16$ yang melalui titik $Q(1, -3)$ adalah

Pertanya Untuk menyelesaikan contoh soal ini, kalian harus dapat menggunakan hasil diskusi pada materi persamaan garis singgung lingkaran yang diketahui titik singgungnya. Hampir sama dengan Contoh Soal 1.24, langkah pertama yang harus diperhatikan adalah bentuk persamaan lingkarannya.

Peserta didik diharapkan lebih memahami konsep yang dipelajari. Peserta didik harus memperhatikan arahan dalam setiap langkah pada latihan soal terbimbing dan mengaitkan dengan contoh soal pada bagian sebelumnya agar mereka merasakan manfaat bagian tersebut.

19 Pengayaan

4. Pengayaan: Garis Singgung Pada Irisan Kerucut (Parabola, Elips dan Hiperbola).

Setelah kalian mempelajari tentang bentuk umum irisan kerucut (dalam hal ini adalah parabola, elips dan hiperbola), pada bagian pengayaan ini kalian akan mempelajari tentang garis singgung terhadap irisan kerucut. Hampir sama dengan konsep menentukan persamaan garis singgung terhadap lingkaran. Untuk menentukan persamaan garis singgung terhadap irisan kerucut, dapat digunakan tiga konsep, yaitu (1) menentukan persamaan garis singgung melalui titik pada irisan kerucut, (2) menentukan persamaan garis singgung dengan kemiringan m pada irisan kerucut, dan (3) menentukan persamaan garis singgung melalui titik di luar irisan kerucut.

a. Menentukan Persamaan Garis Singgung Melalui Titik $T(x_1, y_1)$ pada Irisan Kerucut

Untuk menentukan persamaan garis singgung melalui titik pada lingkaran, kalian dapat menggunakan prinsip "bagi adil" untuk menyelesaikan permasalahan tersebut. Begitu pula untuk menentukan persamaan garis singgung melalui titik $T(x_1, y_1)$ pada irisan kerucut, kalian dapat menggunakan konsep bagi adil seperti Tabel 1.2.

Pengayaan digunakan untuk memperluas atau memperdalam wawasan dan pemahaman atas konsep matematika yang sedang dipelajari. Materi pengayaan dapat bersifat sebagai pendalaman materi, penerapan dalam bidang teknologi/informatika, atau kegiatan eksplorasi/proyek.

20 Latihan Soal

Latihan Soal 1.5

1. Tentukan titik potong dua lingkaran berikut.
 - a. $L_1 \equiv x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ dan $L_2 \equiv x^2 + y^2 - 2x - 8y + 9 = 0$.
 - b. $L_1 \equiv x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ dan $L_2 \equiv x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$.
2. Tunjukkan bahwa dua lingkaran berikut saling bersinggungan. Kemudian tentukan titik singgungnya!
 - a. $L_1 \equiv x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ dan $L_2 \equiv x^2 + y^2 - 8x - 12y + 43 = 0$.
 - b. $L_1 \equiv x^2 + y^2 + 6x - 4y - 23 = 0$ dan $L_2 \equiv x^2 + y^2 - 12x + 20y + 55 = 0$.
3. Tunjukkan bahwa kedudukan dua lingkaran berikut ini tidak berpotongan dan tidak bersinggungan!
 - a. $L_1 \equiv x^2 + y^2 + 4y + 3 = 0$ dan $L_2 \equiv x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$.
 - b. $L_1 \equiv x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0$ dan $L_2 \equiv x^2 + y^2 + 2x + 8y - 8 = 0$.

Latihan soal memiliki tiga jenis tingkat kesulitan, yaitu dasar, menengah, dan tinggi. Pertanyaan pada tingkat dasar berupa jawaban pendek yang menguji pemahaman konsep dan keterampilan dasar. Pertanyaan tingkat menengah berupa permasalahan yang lebih terstruktur, sedangkan tingkat tinggi merupakan permasalahan aplikasi dan keterampilan tingkat tinggi (HOTS).

21 Uji Kompetensi

Uji Kompetensi

1. Diketahui lingkaran $L \equiv (x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 16$ memotong garis $y = 4$. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran yang melalui titik potong lingkaran dan garis tersebut!
2. Tentukan persamaan garis sejajar dengan $x + 2y - 5 = 0$ yang membagi lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 + 10x - 6y - 2 = 0$ menjadi dua bagian yang sama!
3. Jika kuasa titik $M(a, 4) = 0$ terhadap lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 25 = 0$, tentukanlah nilai dari a !
4. Jika titik A dan B berada pada lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 6x - 2y + k = 0$, maka garis singgung lingkaran yang melalui titik A dan B berpotongan di titik $C(8, 1)$. Jika luas persegi panjang yang melalui titik A, B , dan C serta pusat lingkaran adalah 12, tentukanlah nilai dari k !

Terdapat pada setiap akhir bab dan merupakan sarana bagi guru untuk mengukur pencapaian peserta didik dalam topik bab. Peserta didik dapat mengerjakan sejumlah soal yang bervariasi, mulai dari yang sederhana hingga yang kompleks. Selain itu, soal dapat berupa hitungan ataupun pemahaman konsep.

21 Refleksi

Ringkasan dan Refleksi



Setelah kalian mempelajari materi geometri ini, apa simpulan terkait materi ini? Untuk membantu menyimpulkan, kalian bisa uraikan dengan kalimat sendiri mengenai hal berikut.

1. Apa yang membedakan persamaan lingkaran, parabola, elips, dan hiperbola?
2. Bagaimana cara menemukan unsur-unsur pada lingkaran, parabola, elips, dan hiperbola?
3. Bagaimana cara menentukan persamaan lingkaran, parabola, elips, dan hiperbola, jika diketahui unsur unsurnya?
4. Bagaimana menentukan persamaan garis singgung terhadap lingkaran, parabola, elips dan hiperbola?

Pada akhir bab atau subbab, peserta didik akan diajak memikirkan kembali apa yang sudah dipelajari dan seberapa dalam/tepat pemahaman mereka atas pembelajaran pada bagian tersebut.

E. Alternatif Pembelajaran

Guru dapat melaksanakan beberapa alternatif pembelajaran yang sesuai dengan situasi, kondisi dan kebutuhan peserta didik. Dalam buku ini disediakan beberapa video pembelajaran yang dapat membantu peserta didik dalam belajar mandiri seperti video pembelajaran yang terdapat pada <https://belajar.kemdikbud.go.id/> dan yang terdapat pada *Youtube WBU Math Chanel* dengan *link* <https://www.youtube.com/channel/UCtmq577WXnRDIEb2ApsaIAw>. Video pembelajaran tersebut dapat membantu guru ketika menerapkan pembelajaran dengan pendekatan *flipped classroom*. Guru dapat memberikan kegiatan eksplorasi kepada peserta didik dengan memanfaatkan video pembelajaran yang diberikan kemudian ketika sesi tatap maya menggunakan *Google Meet* atau *Zoom*. Selain itu, dengan bimbingan guru, peserta didik dapat berdiskusi dan mengerjakan latihan soal yang ada pada Buku Siswa.

Buku Panduan Guru ini berisi tentang kiat-kiat pemisahan (*distinctive teaching*) untuk peserta didik berprestasi dan peserta didik dengan kecepatan belajar tinggi (*advanced learning*). Penggunaan alternatif teknologi juga ditawarkan di lingkungan sekolah, di mana peserta didik tidak memiliki akses ke teknologi yang dibutuhkan.

Penggunaan Teknologi

Teknologi membantu dalam proses pembelajaran matematika. Ada beberapa teknologi alternatif yang tersedia, seperti Kalkulaor saintifik, *Geogebra*, *Photomath* dan *Mathway*. Selain yang disebutkan di atas, guru dapat menggunakan teknologi atau aplikasi lainnya. Guru perlu mengetahui tentang teknologi terbaru agar pengetahuan selalu terbarukan dan mengikuti perkembangan zaman.

1. Kalkulator Saintifik

Kalkulator jenis ini selain dapat dimanfaatkan untuk menghitung operasi dasar matematika juga dapat dimanfaatkan untuk fungsi-fungsi matematika yang lain, seperti menghitung limit, turunan dan analisis data. Setiap tipe kalkulator memiliki instruksi spesifik yang dapat dipelajari pada buku manualnya.

2. *GeoGebra*

GeoGebra memiliki versi berbasis daring, versi yang dapat digunakan secara luring pada laptop dan juga ada versi Android. *GeoGebra* dapat digunakan untuk menghitung seperti kalkulator, juga dapat digunakan untuk membuat grafik, bangun datar maupun bangun ruang. Perbedaan utama penggunaan aplikasi dengan kalkulator terletak pada tombol-tombolnya yang merupakan tombol virtual.

3. *Mathway*

Mathway merupakan aplikasi berbasis *windows* dan *android*, sehingga aplikasi ini dapat diaplikasikan pada komputer maupun pada gawai. Cara menggunakan *Mathway* hampir menyerupai kalkulator yang didesain secara daring, sehingga dapat digunakan oleh peserta didik untuk membantu proses perhitungan matematis, beserta dengan langkah-langkah untuk menyelesaikannya.

4. *Photomath*

Photomath adalah aplikasi yang menggunakan kamera ponsel peserta didik untuk menemukan jawaban atas pertanyaan matematika. *Photomath* sangat mudah digunakan. Artinya, saat peserta didik membuka aplikasi, arahkan kamera ke polling, lalu ambil foto. *Photomath* akan segera menjelaskan detailnya tanpa campur tangan pengguna yang rumit.

F. Sistem Penilaian Hasil Belajar

Untuk mencapai tujuan pembelajaran yang diinginkan oleh semua peserta didik, proses monitoring dan evaluasi pembelajaran berlangsung terus menerus sepanjang proses pembelajaran (penilaian formatif atau *assessment for learning*) dan pada akhir proses pembelajaran (penilaian sumatif atau *assessment of learning*). Peserta didik juga terlibat dalam penilaian diri (*assessment as learning*) untuk mengembangkan keterampilan metakognitif (*self-learning monitoring*).

Guru dapat melakukan penilaian formatif dan memberikan umpan balik kepada peserta didik melalui kegiatan Ayo Mencoba, Latihan Soal Terbimbing, dan Latihan Soal. Penilaian sumatif dapat dilakukan melalui tes atau uji kompetensi di akhir bab. Peserta didik memiliki banyak kesempatan untuk menilai diri sendiri melalui aktifitas Refleksi pada berbagai tahapan proses pembelajaran dan kegiatan refleksi di akhir bab. Materi perbaikan proyek juga merupakan kesempatan bagi guru untuk menilai pengetahuan, keterampilan, dan aspek lain seperti kerja tim dan keterampilan komunikasi.

G. Kegiatan Tindak Lanjut

Guru dapat melacak proses dan hasil belajar peserta didik dengan berbagai cara, termasuk perbaikan dan peningkatan. Bagian ini menjelaskan secara singkat implementasi perbaikan dan penyempurnaan.

1. Kegiatan Remedial

Peserta didik yang belum mencapai kriteria ketuntasan belajar berkesempatan untuk memperbaiki hasil belajar melalui kegiatan remedial. Setelah menganalisis hasil

penilaian sumatif untuk mengidentifikasi permasalahan kesulitan yang dihadapi oleh peserta didik, guru dapat dengan tepat menyusun kegiatan pembelajaran dan remedial sesuai dengan kebutuhan peserta didik. Kegiatan remedial dapat dilakukan dengan cara penugasan, tutorial sebaya, ataupun pengerjaan ulang soal-soal Latihan Terbimbing, Latihan Soal dan Uji Kompetensi yang telah tersedia di Buku Siswa.

2. Pengayaan

Untuk peserta didik dengan kecepatan belajar tinggi (*advanced learner*) kegiatan pengayaan dapat diberikan untuk memperdalam dan memperluas kompetensi yang telah dimiliki oleh peserta didik tersebut. Kegiatan ini dilakukan ketika guru masih memiliki waktu untuk melaksanakan pembelajaran, sehingga peserta didik yang masuk dalam kategori cepat dapat belajar secara optimal. Kegiatan pengayaan dapat dilakukan dengan berbagai cara, misalnya penugasan, tutorial sebaya, proyek, dan pemecahan masalah. Fitur-fitur dalam Buku Siswa yang dapat digunakan untuk keperluan kegiatan pengayaan antara lain Ayo Mengomunikasikan, Ayo Bekerja Sama, Ayo Berdiskusi, Ayo Berpikir Kritis, dan Ayo Berpikir Kreatif.

H. Interaksi Guru dengan Orang Tua

Prestasi akademik seorang peserta didik tidak hanya tergantung pada peran guru, tetapi juga pada peran orang tua atau wali murid. Guru harus menjalin kerjasama yang baik dengan orang tua atau wali murid sebagai mitra untuk menyampaikan pentingnya matematika dan fakta bahwa semua peserta didik dapat belajar matematika bersama orang tua mereka. Kegiatan ini dapat menumbuhkan sikap dan persepsi positif terhadap matematika berkesinambungan baik di sekolah maupun di rumah. Guru perlu menerima umpan balik orangtua dan wali murid, terutama mengenai kepentingan dan tantangan yang dihadapi peserta didik. Dengan demikian, Anda dapat membedakan belajar berdasarkan kebutuhan peserta didik. Guru dapat memberikan ide-ide untuk mendukung pembelajaran anak mereka. Misalnya, bagaimana orang tua mempersiapkan lingkungan belajar yang mendukung, bagaimana mendorong anak mereka ketika mereka sedang malas belajar, dan bagaimana memuji prestasi minimal anak mereka. Selain itu, guru perlu menginformasikan orang tua dari sistem pembelajaran matematika atau metode yang digunakan di sekolah, terutama untuk pendekatan baru untuk orang tua, seperti metode kelas terbalik. Hal ini harus dilakukan untuk menghindari miskonsepsi bahwa guru “tidak mengajar”, karena peserta didik belajar di rumah atau sendirian. Keseimbangan kognitif penting agar proses belajar juga dapat didukung oleh orang tua.

Bab 1 Geometri Analitik

Pengalaman Belajar

Setelah mempelajari bab Geometri Analitik, diharapkan peserta didik:

1. Mampu menentukan persamaan lingkaran, elips, parabola, dan hiperbola.
2. Mampu menentukan elemen-elemen lingkaran seperti pusat dan jari-jari lingkaran dari persamaan lingkaran.
3. Dapat menentukan kedudukan (posisi) garis terhadap lingkaran.
4. Dapat menentukan persamaan garis singgung lingkaran.
5. Mampu menentukan unsur-unsur elips, parabola, dan hiperbola seperti titik fokus, titik pusat, dan asimtot.
6. Mampu memecahkan masalah kontekstual yang berkaitan dengan lingkaran, elips, parabola dan hiperbola.
7. Mampu memecahkan masalah kontekstual yang berhubungan dengan garis singgung elips, parabola, dan hiperbola.

Peta Konsep

Irisan Kerucut



Alternatif Skema Pembelajaran

Subbab	Waktu (JP)	Tujuan	Pokok Materi	Kosakata	Bentuk metode dan aktivitas	Sumber utama	Sumber lain (Daftar Pustaka)
Lingkaran	4	<ol style="list-style-type: none"> Menentukan persamaan lingkaran Menentukan pusat dan jari-jari lingkaran Menentukan posisi garis terhadap lingkaran Menentukan persamaan garis singgung Menyelesaikan masalah kontekstual yang berhubungan dengan garis singgung lingkaran 	<ul style="list-style-type: none"> Persamaan Lingkaran Kedudukan Titik Terhadap Lingkaran Kedudukan Garis Terhadap Lingkaran Persamaan Garis Singgung Lingkaran 	<ul style="list-style-type: none"> Lingkaran Titik di Dalam Lingkaran Titik Pada Lingkaran Titik di Luar Lingkaran Garis Memotong Lingkaran Garis Menyinggung Lingkaran Garis di Luar Lingkaran 	Eksplorasi, Diskusi Pemaparan, Latihan Soal Terbimbing, Pemanfaatan Teknologi (opsional)	Buku Siswa	[1] [7] [16] [22] [25] [32] [33] [34]
Irisan kerucut	6	<ol style="list-style-type: none"> Menentukan persamaan, elips, parabola, dan hiperbola Menentukan unsur-unsur irisan kerucut. Menyelesaikan masalah kontekstual yang berhubungan dengan elips, parabola, dan hiperbola 	<ul style="list-style-type: none"> Persamaan parabola Persamaan elips Persamaan hiperbola 	<ul style="list-style-type: none"> Parabola Elips Hiperbola Garis singgung 	Eksplorasi, Diskusi Pemaparan, Latihan Soal Terbimbing, Pemanfaatan Teknologi (opsional)	Buku Siswa	[39] [41]

Catatan:

- Waktu (JP) adalah jumlah atau rentang jam yang disarankan untuk pelajaran. Guru dapat beradaptasi dengan kondisi pembelajaran yang sebenarnya.
- Untuk melakukan pemeriksaan ulang jawaban yang dituliskan oleh peserta didik, guru dapat menyarankan untuk menggunakan GeoGebra. GeoGebra memiliki versi daring yang dapat digunakan secara offline di laptop dan Android. GeoGebra dapat digunakan untuk perhitungan seperti kalkulator. Hal ini juga dapat digunakan untuk menghasilkan grafik.

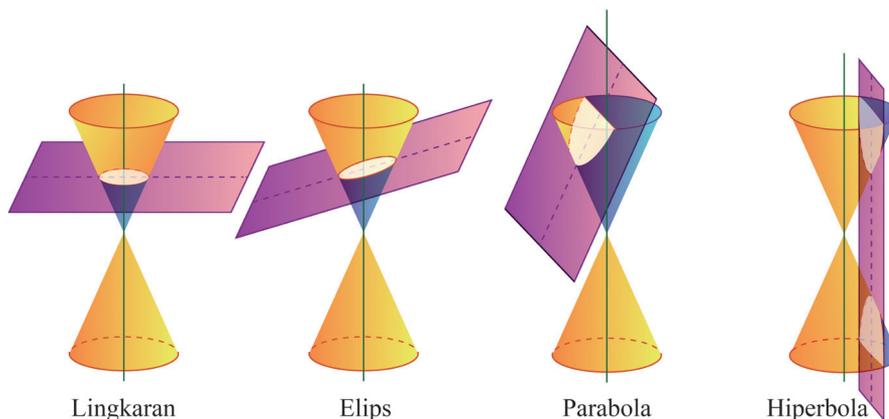
Elemen Geometri pada Matematika Tingkat Lanjut untuk SMA kelas XII membahas tentang geometri analitik bidang. Materi ini bertujuan untuk mengembangkan kemampuan peserta didik untuk memahami dan bernalar untuk menentukan persamaan irisan kerucut, menentukan kedudukan titik dan garis terhadap irisan kerucut, serta menentukan persamaan garis singgung terhadap irisan kerucut. Karena irisan kerucut merupakan bagian dari geometri analitik, maka dalam memecahkan masalah yang berkaitan dengan irisan kerucut ini diharapkan peserta didik dapat melakukan secara aljabar. Peserta didik diharapkan tidak menggunakan gambar geometri untuk menyelesaikan permasalahannya.

Pada bagian pertama, peserta didik akan mempelajari tentang lingkaran. Pada Subbab ini, mengulas tentang persamaan lingkaran, baik persamaan lingkaran dengan titik pusat $(0,0)$, maupun pusat lingkaran disebarang titik selain $(0,0)$. Selanjutnya, peserta didik mempelajari kedudukan titik dan garis terhadap lingkaran. Ada 3 kedudukan titik terhadap lingkaran yang dibahas pada materi ini, yaitu titik di dalam lingkaran, titik pada lingkaran, dan titik di luar lingkaran. Pada garis terhadap lingkaran juga ada 3 kedudukan, yaitu garis memotong lingkaran, menyinggung lingkaran, dan garis tidak memotong dan tidak menyinggung lingkaran. Pada bagian akhir subbab lingkaran, peserta didik diharapkan dapat menentukan persamaan garis singgung lingkaran. Untuk subbab kedua buku ini membahas tentang irisan kerucut berbentuk parabola, elips dan hiperbola. Pada subbab ini, peserta didik mempelajari materi tentang persamaan irisan kerucut berbentuk parabola, elips, dan hiperbola, termasuk mengidentifikasi unsur-unsur irisan kerucut berbentuk parabola, elips, dan hiperbola.

Materi pengayaan pada bab geometri analitik terdiri dari kedudukan dua lingkaran dan persamaan garis singgung irisan kerucut berbentuk parabola, elips, dan hiperbola. Materi pengayaan dirancang untuk dapat diberikan kepada peserta didik atau dalam kelompok, agar mereka dapat mengembangkan potensi secara optimal dengan sisa waktu yang relatif lebih singkat. Berkaitan dengan hal ini, materi pengayaan irisan kerucut dibahas pada bagian akhir bab di buku ini.

Panduan Pembelajaran

Sebelum membahas tentang materi irisan kerucut baik untuk lingkaran, parabola, elips, maupun hiperbola, peserta didik diberikan apersepsi kontekstual berupa penggunaan gigi depan sepeda (*chain ring*), gigi belakang sepeda (*sprocket*), dan roda sepeda yang berkaitan dengan lingkaran. Selain itu, parabola, kompor tenaga surya, dan menara pendingin (*cooling tower*) menggunakan bentuk parabola. *Cooling tower* atau menara pendingin biasanya digunakan oleh pabrik kimia, kilang minyak, dan pusat pembangkit listrik. Menara ini merupakan alat penghilang panas yang digunakan untuk memindahkan kalor buangan ke atmosfer. Untuk memudahkan peserta didik dalam mengkonkretkan bentuk irisan kerucut, guru disarankan untuk menggambarkan sepasang kerucut dengan ujung kerucut yang saling berhimpitan, kemudian sepasang irisan kerucut tersebut diiris seperti pada Gambar 1.1.



Gambar 1.1. Bentuk Irisan Kurva



Ayo Mengingat Kembali

Sebelum memulai aktivitas pembelajaran, guru memandu peserta didik untuk berdoa menurut agama dan kepercayaan masing-masing. Hal ini bertujuan untuk menguatkan salah satu elemen Profil Pelajar Pancasila, yaitu beriman, bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa, dan berakhlak mulia. Selanjutnya, guru dapat melakukan tes diagnostik non kognitif dan tes diagnostik kognitif. Tes diagnostik non kognitif bertujuan untuk mengetahui kondisi psikologis peserta didik sebelum menerima materi. Pada diagnostik non kognitif, guru dapat menanyakan kondisi peserta didik seperti “Bagaimana kondisi hari ini?”, “Apa yang sedang kalian rasakan hari ini?”, “Bagaimana perasaan kalian saat belajar dari rumah?”, atau “Hal apa yang paling menyenangkan dan tidak menyenangkan?”. Tes diagnostik kognitif diberikan kepada peserta didik di awal pembelajaran untuk mengetahui kompetensi

peserta didik, menyesuaikan pembelajaran di kelas dengan kompetensi rata-rata peserta didik, dan memberikan pembelajaran tambahan kepada peserta didik dengan kompetensi di bawah rata-rata. Tes diagnostik kognitif dapat dilakukan dengan tanya jawab berkaitan dengan aturan Pythagoras, persamaan linier, jarak antara dua titik, jarak titik terhadap garis, trigonometri (terutama pada *sinus*, *cosinus*, dan *tangen*), dan fungsi kuadrat.

A. Lingkaran dan Garis Singgung

1. Definisi Lingkaran



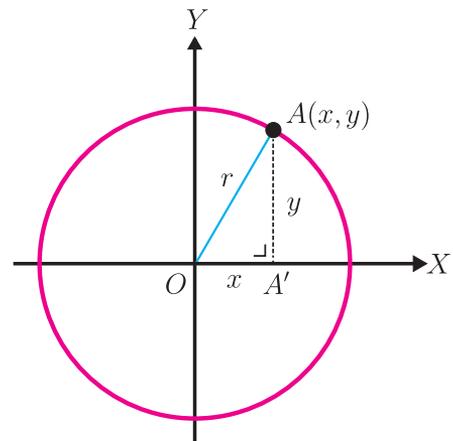
Ayo Mengomunikasikan

Guru meminta pendapat peserta didik terkait dengan definisi lingkaran dari beberapa definisi yang telah dituliskan pada Buku Siswa. Guru dapat mengarahkan pada kata kunci untuk definisi lingkaran yaitu jarak yang sama dan titik tertentu. Kegiatan ini bertujuan untuk mengkonstruksi pengetahuan peserta didik terkait dengan definisi lingkaran.

2. Persamaan Lingkaran

Pada bagian ini, guru dapat menunjukkan persamaan lingkaran dengan pusat lingkaran berada pada pusat sumbu koordinat. Agar peserta didik mudah memahami materi, guru disarankan menggambar lingkaran dengan pusat di titik $(0,0)$ seperti Gambar 1.2.

Dari segitiga $\triangle OA'A$ yang merupakan segitiga siku-siku, diperoleh bahwa $OA^2 = OA'^2 + A'A^2$. Telah diketahui bahwa panjang OA adalah jari-jari atau r , panjang OA' adalah x , dan panjang $A'A$ adalah y , sehingga persamaan lingkaran dengan pusat $(0,0)$ dan jari-jari r dapat dinyatakan dengan $x^2 + y^2 = r^2$.



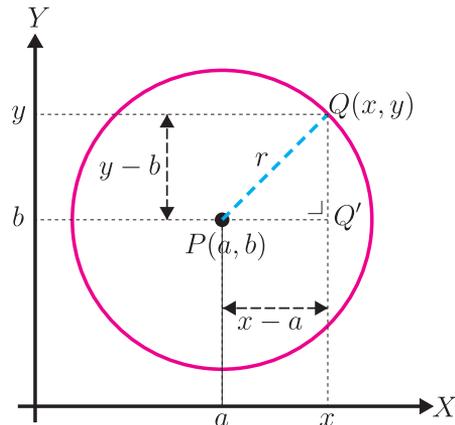
Gambar 1.2. Lingkaran dengan Pusat $O(0,0)$ dan Jari-Jari r .

Begitu juga pada lingkaran dengan pusat selain $O(0,0)$, guru dapat menggunakan gambar lingkaran dengan pusat sembarang titik $P(a,b)$ pada bidang koordinat kartesius, seperti pada Gambar 1.3. Dengan memperhatikan segitiga $\triangle PQ'Q$ dan dengan menggunakan aturan *Pythagoras*, diperoleh bahwa $PQ^2 = (Q'P)^2 + (Q'Q)^2$.

Telah diketahui bahwa panjang PQ adalah jari-jari atau r , $Q'P$ adalah $(x-a)$, dan PQ' adalah $(y-b)$, sehingga dapat dinyatakan dengan

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2.$$

Guru menyampaikan kepada peserta didik bahwa lingkaran memiliki persamaan berbentuk $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$, selain berbentuk $x^2 + y^2 = r^2$ dan $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$. Guru menjelaskan bahwa Persamaan $x^2 + y^2 = r^2$ dan $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ adalah persamaan bentuk baku, sedangkan persamaan berbentuk $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ adalah persamaan lingkaran bentuk umum.



Gambar 1.3. Lingkaran dengan Pusat $P(a, b)$ dan Jari-Jari r .

Agar peserta didik dapat memahami konsep materi persamaan lingkaran, guru dapat memberikan alternatif contoh soal yang ada pada Buku Siswa seperti Contoh Soal 1.1 untuk persamaan lingkaran dengan pusat $(0,0)$, Contoh Soal 1.2 dan Contoh Soal 1.3 untuk persamaan lingkaran dengan pusat $P(a,b)$. Guru diperbolehkan menggunakan model contoh soal yang sejenis untuk memberikan penjelasan kepada peserta didik terkait dengan persamaan lingkaran.



Ayo Mencoba

Kegiatan Ayo Mencoba terdiri dari dari latihan soal terbimbing yang harus dilengkapi oleh peserta didik dengan bimbingan guru. Bentuk bimbingan yang dapat dilakukan oleh guru adalah dengan melakukan tanya jawab pada bagian yang kosong pada Latihan Soal Terbimbing. Adapun Alternatif Penyelesaian pada setiap Latihan Soal Terbimbing adalah sebagai berikut.

Latihan Soal Terbimbing 1.1

Jika suatu lingkaran memiliki titik pusat O dan diameter lingkaran $d = 4\sqrt{3}$. Tentukan persamaan lingkaran tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

Diketahui bahwa lingkaran memiliki pusat O dan diameter $d = 4\sqrt{3}$. Guru dapat memberikan pertanyaan diagnostik kognitif secara lisan berkaitan dengan definisi diameter. Guru bersama dengan peserta didik menyimpulkan bahwa diameter pada lingkaran merupakan dua kali jari-jari ($2r$).

Selanjutnya, guru dapat melakukan dengan menghitung jari-jari lingkaran dengan cara membagi diameter lingkaran dengan dua, sehingga diperoleh bahwa $r = \frac{\text{diameter}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ atau $r^2 = 12$. Dengan menyubstitusikan $r^2 = 12$ maka persamaan lingkaran adalah $x^2 + y^2 = 12$.

Latihan Soal Terbimbing 1.2

Adi diberikan tugas oleh guru matematika untuk menggambar sebuah lingkaran melalui titik $T(6, -8)$. Selain itu, lingkaran tersebut memiliki pusat lingkaran pada titik $O(0, 0)$. Karena Adi memiliki rasa ingin tahu yang tinggi, Adi berencana untuk menentukan persamaan lingkaran tersebut. Dapatkah kalian membantu Adi untuk menentukan persamaan lingkaran tersebut?

Alternatif Penyelesaian:

Diketahui bahwa pusat lingkaran berada pusat koordinat $O(0, 0)$. Karena lingkaran melalui titik $T(6, -8)$, dengan menggunakan jarak dua titik, maka jari-jari lingkaran adalah $OT^2 = (6 - 0)^2 + (-8 - 0)^2 = 100$.

Panjang OT adalah jari-jari lingkaran, sehingga persamaan lingkaran yang digambar oleh Adi adalah $x^2 + y^2 = 100$.

Latihan Soal Terbimbing 1.3

Jika suatu lingkaran berpusat di titik $P(2, -4)$ dan jari-jari lingkaran $r = 4\sqrt{3}$, tentukan persamaan lingkaran tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

Pada soal diketahui bahwa lingkaran memiliki pusat $P(2, -4)$, hal ini berarti bahwa koefisien $a = 2$ dan $b = -4$. Selain itu jari-jari lingkaran sebesar $4\sqrt{3}$, sehingga $r^2 = 48$. Dengan menyubstitusikan ke persamaan lingkaran $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ diperoleh bahwa persamaan lingkaran adalah $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 48$.

Latihan Soal Terbimbing 1.4

Jika lingkaran memiliki jari-jari $r = 4\sqrt{3}$ dan berpusat di titik $P(2, -4)$. Tentukan persamaan lingkaran tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

Pada Latihan Soal Terbimbing 1.3, telah diperoleh bahwa persamaan lingkaran dengan pusat $P(2, -4)$ dan jari jari $4\sqrt{3}$ adalah $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 48$. Persamaan lingkaran ini kemudian dijabarkan sehingga diperoleh persamaan $x^2 - 4x + y^2 + 8y - 30 = 0$.

Setelah guru membahas alternatif penyelesaian latihan soal terbimbing atau model soal yang sejenis, guru dapat melakukan kegiatan Ayo Mengomunikasikan dan Ayo Berdiskusi yang ada pada Buku Siswa. Guru diharapkan dapat mengajak peserta didik untuk berani menyampaikan pendapat mereka dengan percaya diri dan menghargai pendapat rekan lainnya yang berbeda.

Tujuan dari dua kegiatan ini adalah peserta didik dapat menjabarkan persamaan lingkaran $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ menjadi $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$. Selain itu, peserta didik diminta mencari pusat dan jari-jari dari persamaan lingkaran $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$. Apabila peserta didik kesulitan untuk menjabarkan persamaan lingkaran $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ menjadi $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$, guru dapat menggunakan alternatif sebagai berikut.

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0.$$

Guru dapat memisalkan $A = -2a$, $B = -2b$, dan $C = a^2 + b^2 - r^2$, maka persamaan yang diperoleh dapat dinyatakan dengan $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$.

Dari permisalan $A = -2a$ diperoleh bahwa $a = -\frac{1}{2}A$ dan $b = -\frac{1}{2}B$, titik (a,b) inilah yang disebut dengan titik pusat persamaan lingkaran $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$. Selain itu, dari $C = a^2 + b^2 - r^2$ diperoleh bahwa $r = \sqrt{a^2 + b^2 - C}$. Inilah rumus yang dapat digunakan untuk menentukan jari-jari dari persamaan lingkaran $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$.

Latihan Soal Terbimbing 1.5

Sebuah lingkaran L memiliki persamaan $L \equiv x^2 + y^2 - 8x - 2y - 8 = 0$.
Tentukanlah pusat dan jari-jari lingkaran L tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

Dari soal diketahui pada persamaan $L \equiv x^2 + y^2 - 8x - 2y - 8 = 0$, diperoleh bahwa $A = -8$, $B = -2$, dan $C = -8$. Misalkan pusat lingkaran L adalah $P(x,y)$, maka untuk menentukan pusat lingkaran dapat dilakukan dengan cara

$x = a = -\frac{1}{2}A = -\frac{1}{2}(-8) = 4$ dan $y = b = -\frac{1}{2}B = -\frac{1}{2}(-2) = 1$, sehingga pusat lingkaran pada $P(4,1)$.

Misalkan jari-jari lingkaran L adalah r , untuk menentukan jari-jari r dapat menggunakan rumus

$$r = \sqrt{\left(\frac{-A}{2}\right)^2 + \left(\frac{-B}{2}\right)^2 - C} = \sqrt{(4)^2 + (1)^2 - (-8)} = \sqrt{16 + 1 + 8} = 5.$$



Ayo Berpikir Kreatif

Setelah kegiatan pembelajaran pada materi ini berakhir, guru dapat meminta kelompok yang sudah dibentuk pada kegiatan Ayo Mencoba sebelumnya untuk dapat berpikir kreatif tentang permasalahan yang ada pada kegiatan Ayo Berpikir Kreatif. Peserta didik diharapkan dapat berpikir kreatif untuk menunjukkan 5 sifat persamaan lingkaran $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ yang telah dituliskan pada kegiatan Ayo Berpikir Kreatif. Apabila mereka kesulitan untuk menunjukkan sifat tersebut, guru dapat menggunakan Alternatif Penyelesaian berikut.

a. Jika $A = 0$, maka pusat lingkaran terletak pada sumbu Y ,

Alternatif pembuktian sifat ini

Karena $A = 0$ maka $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ Pada bagian sebelumnya telah diperoleh bahwa $A = -2a$, karena $A = 0$ maka $a = 0$, selain itu $B = -2b$ dan $C = a^2 + b^2 - r^2$, sehingga $x^2 + y^2 + (-2b)y + (a^2 + b^2 - r^2) = 0$.

$$x^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2.$$

$$x^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Persamaan ini menunjukkan bahwa pusat berada pada titik $(0, b)$, sehingga persamaan $x^2 + y^2 + By + C = 0$ pusat lingkaran berada pada sumbu Y karena X bernilai 0.

b. Jika $B = 0$, maka pusat lingkaran terletak pada sumbu X

Alternatif pembuktian sifat ini:

Karena $B = 0$ maka $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$. Pada bagian sebelumnya telah diperoleh bahwa $B = -2b$, karena $B = 0$ maka $b = 0$, selain itu $A = -2a$ dan $C = a^2 + b^2 - r^2$, sehingga $x^2 + y^2 + (-2a)x + (a^2 + b^2 - r^2) = 0$.

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = r^2.$$

$$(x - a)^2 + y^2 = r^2.$$

Persamaan ini menunjukkan bahwa pusat berada pada titik $(a, 0)$, sehingga persamaan $x^2 + y^2 + Ax + C = 0$ pusat lingkaran berada pada sumbu X karena y bernilai 0.



Ayo Mencoba

Pada kegiatan ini, peserta didik diminta untuk menyelesaikan permasalahan yang terdapat pada Latihan Soal 1.1 berikut. Alternatif penyelesaian telah disediakan untuk membantu guru.

Latihan Soal 1.1

1. Diketahui pusat lingkaran terletak pada titik pusat $O(0,0)$. Tentukan persamaan lingkaran tersebut, jika:

a. jari-jari $r = \sqrt{15}$

b. diameter $d = \frac{4}{5}\sqrt{5}$

Penyelesaian:

a. $x^2 + y^2 = 15$.

b. $x^2 + y^2 = \frac{4}{5}$.

2. Diketahui lingkaran berpusat pada titik pusat kartesius $O(0,0)$. Tentukan persamaan lingkaran tersebut yang melalui titik:

a. $A(1,2)$.

b. $E(1\frac{1}{2}, 5)$

Alternatif Penyelesaian:

a. Karena melalui titik $A(1,2)$, maka jari-jari $r^2 = (1-0)^2 + (2-0)^2 = 5$, sehingga persamaan lingkaran adalah $x^2 + y^2 = 5$.

b. Karena melalui titik $E(1\frac{1}{2}, 5)$, maka jari-jari $r^2 = (\frac{3}{2}-0)^2 + (5-0)^2 = \frac{109}{4}$, sehingga persamaan lingkaran adalah $x^2 + y^2 = \frac{109}{4}$.

3. Tentukan unsur lingkaran (pusat dan jari-jari), jika diketahui persamaan lingkarannya adalah sebagai berikut:

a. $(x-1)^2 + (y+5)^2 = 9$

c. $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 17 = 0$

b. $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 39 = 0$

d. $x^2 + y^2 = 15$

Alternatif Penyelesaian:

a. Karena $a = 1$ dan $b = -5$, maka pusat lingkaran pada titik $(1, -5)$. Selain itu $r^2 = 9$, maka jari-jari 3.

b. Karena $A = -6$, maka $a = -3$, $B = 8$, maka $x = 4$, dan $C = -39$, sehingga pusat lingkaran terletak di titik $(-3, 4)$.

Jari-jari lingkaran dapat dicari dengan rumus $r = \sqrt{(\frac{-A}{2})^2 + (\frac{-B}{2})^2 - C}$ sehingga $r = \sqrt{(\frac{-(-6)}{2})^2 + (\frac{-8}{2})^2 - (-39)} = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2 - (-39)} = \sqrt{64} = 8$.

c. Dengan cara yang sama dengan bagian c, diperoleh bahwa pusat lingkaran di titik $(-2, 3)$, dan jari-jari $r = \sqrt{30}$.

d. Karena $a = 0$ dan $b = 0$, maka pusat lingkaran pada titik $(0, 0)$. Selain itu $r^2 = 15$, maka jari-jari $\sqrt{15}$.

4. Sebuah persegi $ABCD$ secara berturut turut terletak pada titik $A(1,1)$, $B(4,1)$, $C(4,4)$, dan $D(1,4)$. Tentukanlah persamaan lingkaran yang menyinggung keempat sisi persegi $ABCD$ tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

Jari-jari lingkaran merupakan jarak $AB = \sqrt{(4-1)^2 - (1-1)^2} = 3$.

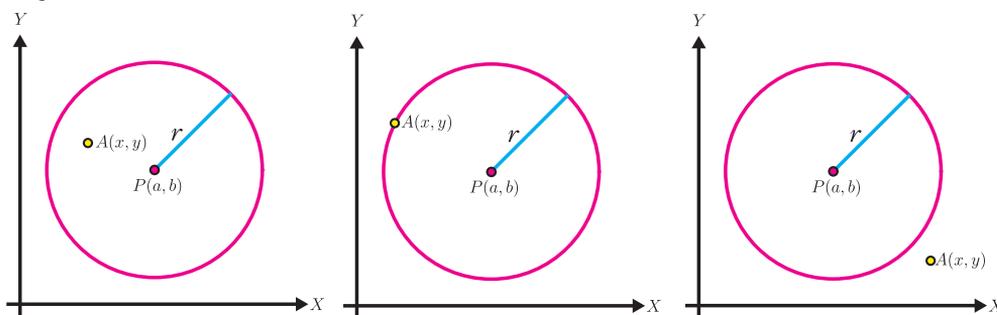
Sedangkan pusat lingkaran terletak pada titik potong diagonal AC dan BD , misalkan pusat lingkaran tersebut adalah $P(x,y)$, maka $P_x = \frac{4+1}{2} = 1,5$ dan $P_y = \frac{4+1}{2} = 1,5$, sehingga pusat terletak pada $(1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2})$.

Persamaan lingkaran adalah

$$(x - \frac{3}{2})^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = 9.$$

3. Kedudukan Suatu Titik Terhadap Lingkaran

Pada bagian ini, guru dapat menunjukkan kemungkinan kedudukan (posisi) titik terhadap lingkaran dengan menggunakan Gambar 1.4. Adapun kemungkinan kedudukan tersebut adalah (a) kedudukan titik $A(x,y)$ di dalam lingkaran, (b) kedudukan titik $A(x,y)$ pada lingkaran, dan (c) kedudukan titik $A(x,y)$ di luar lingkaran.



(a) Posisi titik di dalam Lingkaran (b) Posisi titik pada Lingkaran (c) Posisi titik di luar Lingkaran

Gambar 1.4. Posisi Titik terhadap Lingkaran

Bersama dengan peserta didik, guru dapat menyimpulkan bahwa:

1. Syarat titik $A(x,y)$ berada di dalam lingkaran jika kuasa titik $A(x,y)$ bernilai negatif atau $K_{A(x,y)} < 0$,
2. syarat titik $A(x,y)$ berada pada lingkaran jika kuasa titik bernilai nol atau $K_{A(x,y)} = 0$, dan
3. syarat titik $A(x,y)$ berada di luar lingkaran jika kuasa titik bernilai positif atau $K_{A(x,y)} > 0$.

Guru dapat memberikan alternatif contoh soal yang ada pada Buku Siswa seperti Contoh Soal 1.7 hingga Contoh Soal 1.11 agar peserta didik semakin memahami materi kedudukan titik terhadap lingkaran. Guru diperbolehkan menggunakan model contoh soal yang sejenis untuk memberikan penjelasan kepada peserta didik terkait dengan persamaan lingkaran.



Pada kegiatan Ayo Mencoba pada kedudukan titik terhadap lingkaran, terdiri dari latihan soal terbimbing yang harus dilengkapi oleh peserta didik dengan bimbingan guru. Bentuk bimbingan yang dapat dilakukan oleh guru adalah dengan melakukan tanya jawab pada bagian yang kosong pada latihan soal terbimbing. Alternatif bentuk bimbingan yang dapat dilakukan oleh guru adalah dengan membentuk kelompok dengan menempatkan tutor sebaya di setiap kelompok tersebut. Tutor sebaya ada di setiap kelompok, dengan tujuan untuk memberikan umpan balik dan dukungan terhadap teman sekelompoknya. Peserta didik lebih cenderung berani (percaya diri) untuk bertanya kepada tutor sebaya dan tidak takut/sungkan bertanya walaupun pertanyaan yang diajukan termasuk sederhana. Tutor sebaya dapat memotivasi belajar peserta didik lainnya. Adapun Alternatif Penyelesaian pada Latihan Soal Terbimbing 1.6 – 1.9 adalah sebagai berikut.

Latihan Soal Terbimbing 1.6

Selidiki apakah titik $A(1,-2)$ berada di dalam lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = 25$!

Alternatif Penyelesaian:

Substitusikan titik $A(1,-2)$ ke persamaan lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = 25$, sehingga diperoleh bahwa $K_{A(1,-2)} = (1)^2 + (-2)^2 - 25 = -20$. Karena diperoleh nilai kuasa titik $A(1,-2)$ kurang dari nol, maka kedudukan titik $A(1,-2)$ terletak di dalam lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = 25$.

Latihan Soal Terbimbing 1.7

Selidiki apakah titik $A(3,-3)$ berada pada terhadap lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = 18$

Alternatif Penyelesaian:

Substitusikan titik $A(3,-3)$ ke persamaan lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = 18$, sehingga diperoleh bahwa $K_{A(3,-3)} = (3)^2 + (-3)^2 - 18 = 0$. Karena diperoleh nilai kuasa sama dengan nol, maka kedudukan titik $A(3,-3)$ terletak pada lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = 18$.

Latihan Soal Terbimbing 1.8

Tentukan kedudukan titik $A(7,5)$ terhadap lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 8x - 2y - 8 = 0$!

Alternatif Penyelesaian:

Kuasa titik $A(7,5)$, yaitu $K_{A(7,5)} = (7)^2 + (5)^2 - 8(7) - 2(5) - 8 = 0$.

Karena diperoleh nilai kuasa sama dengan nol, maka kedudukan titik $A(7,5)$ kedudukan terletak pada lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 8x - 2y - 8 = 0$.

Latihan Soal Terbimbing 1.9

Tentukan kedudukan titik $A(8,3)$ terhadap lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 8x - 2y + 8 = 0$!

Alternatif Penyelesaian:

Substitusikan titik $A(8,3)$ ke persamaan lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 8x - 2y + 8 = 0$, sehingga diperoleh bahwa $K_{A(8,3)} = (8)^2 + (3)^2 - 8(8) - 2(3) + 8 = 11$. Karena diperoleh nilai kuasa sebesar 11, maka kedudukan titik $A(8,3)$ terletak diluar lingkaran

$L \equiv x^2 + y^2 - 8x - 2y + 8 = 0$.



Ayo Mencoba

Pada kegiatan ini, peserta didik diminta untuk menyelesaikan permasalahan yang ada pada Latihan Soal 1.2. Alternatif penyelesaian telah disediakan untuk membantu guru.

Latihan Soal 1.2

- Diketahui titik $A(2,3)$, $B(2,8)$, $C(8,5)$, dan $D(5,3)$, tentukan kedudukan titik tersebut terhadap lingkaran
 - $L \equiv x^2 + y^2 - 8x - 2y + 8 = 0$
 - $L \equiv (x+2)^2 + (y-3)^2 = 9$

Alternatif Penyelesaian:

Tabel 1.1. Ringkasan Jawaban Nomor 1 Pada Latihan Soal 1.2

Bagian	Titik	Persamaan Lingkaran	Kedudukan Titik Terhadap Lingkaran L
a	$A(2,3)$	$L \equiv x^2 + y^2 - 8x - 2y + 8 = 0$	Di dalam lingkaran
	$B(2,8)$		Di dalam lingkaran
	$C(8,5)$		Di luar lingkaran
	$D(5,3)$		Di dalam lingkaran
b	$A(2,3)$	$L \equiv (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 9$	Di luar lingkaran
	$B(2,8)$		Di luar lingkaran
	$C(8,5)$		Di luar lingkaran
	$D(5,3)$		Di luar lingkaran

2. Tentukan batasan nilai a apabila diketahui:
- Titik $P(a,1)$ terletak di dalam lingkaran $L \equiv (x-1)^2 + (y+3)^2 = 9$.
 - Titik $P(2a,a)$ terletak di luar lingkaran $L \equiv (x+3)^2 + (y-3)^2 = 9$.

Alternatif Penyelesaian:

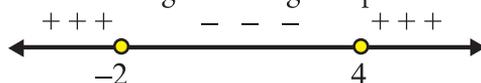
- a. Dengan menyubstitusikan titik $P(a,1)$ ke persamaan lingkaran $L \equiv (x-1)^2 + (y+3)^2 = 9$, diperoleh

$$K_{P(a,1)} = (a-1)^2 + (1+3)^2 - 9 = a^2 - 2a + 8 = (a-4)(a+2).$$

Syarat kedudukan suatu titik berada di dalam lingkaran adalah kuasa titik bernilai negatif, maka syarat kedudukan titik $P(a,1)$ didalam lingkaran

$L \equiv (x-1)^2 + (y+3)^2 = 9$ adalah $K_{P(a,1)} < 0$, maka $(a-4)(a+2) < 0$

Dengan menggunakan bantuan garis bilangan diperoleh bahwa



Dari garis bilangan tersebut terlihat a bernilai negatif berada pada interval $-2 < a < 4$. Jadi, kedudukan titik $P(a,1)$ terletak di dalam lingkaran $L \equiv (x-1)^2 + (y+3)^2 - 9 = 0$ maka a harus berada pada $-2 < a < 4$.

- b. Titik $P(a,1)$ terletak di luar lingkaran $L \equiv (x+3)^2 + (y-3)^2 = 9$

$$(a+3)^2 + (1-3)^2 = 9.$$

$$a^2 - 6a + 4 = 0.$$

$$(a-4)(a-2) = 0.$$

Syarat titik $P(2a, a)$ berada di lingkaran adalah $(a-4)(a-2) = 0$, maka $a = 4$ atau $a = 2$.

3. Tentukan nilai t yang memenuhi kedudukan titik $A(2t,-t)$ yang terletak pada lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 + 2x + 8y - 2 = 0$!

Alternatif Penyelesaian:

Titik $A(2t,-t)$ terletak di dalam lingkaran $x^2 + y^2 + 2x + 8y - 2 = 0$.

$$(2t)^2 + (-t)^2 + 2(2t) + 8(-t) - 2 = 0.$$

$$5t^2 - 4t - 2 = 0.$$

Syarat titik $A(2t,-t)$ berada di lingkaran adalah $t_1 = \frac{2}{5} + 2\sqrt{14}$ atau $t_2 = \frac{2}{5} - 2\sqrt{14}$.

4. Diketahui titik $B(b,-1)$ dan lingkaran $L \equiv 2x^2 + 2y^2 + 20x - 12y - 32 = 0$. Tentukan batasan nilai b yang memenuhi titik $B(b,-1)$ berada di luar lingkaran!

Alternatif Penyelesaian:

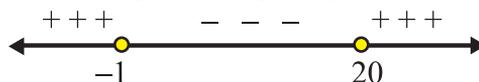
Titik $B(b, -1)$ terletak di luar lingkaran $L \equiv 2x^2 + 2y^2 + 20x - 12y - 32 = 0$.

$$b^2 + (-1)^2 + 20(b) - 12(-1) - 32 = 0.$$

$$b^2 + 20b - 19 = 0.$$

$$(b - 1)(b + 20) = 0.$$

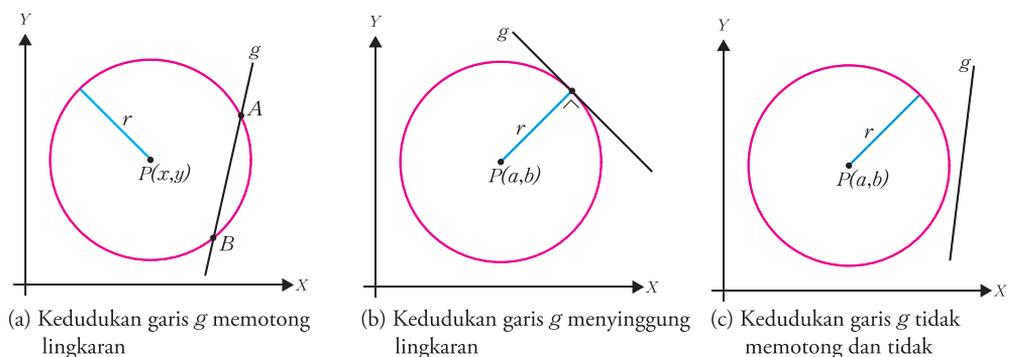
Syarat titik $B(b, -1)$ berada di luar lingkaran adalah $2x^2 + 2y^2 + 20x - 12y - 32 > 0$, dengan menggunakan bantuan garis bilangan diperoleh bahwa



Dari garis bilangan tersebut terlihat bahwa agar titik $B(b, -1)$ terletak di dalam lingkaran L maka b berada pada interval $-1 < b < 20$.

4. Kedudukan Garis Terhadap Lingkaran

Sebelum menyampaikan materi tentang kedudukan garis g terhadap lingkaran L , guru diharapkan melakukan tes diagnostik kognitif terlebih dahulu. Tes diagnostik kognitif dapat dilakukan dengan tanya jawab berkaitan dengan nilai diskriminan suatu fungsi kuadrat, seperti "Apa itu nilai diskriminan?", "Bagaimana cara menentukan nilai diskriminan suatu fungsi kuadrat?", "Apakah kalian mengetahui $D = b^2 - 4ac$?", dan "Apabila nilai diskriminan bernilai positif, fungsi kuadrat memiliki berapa akar real?".



Gambar 1.5. Kedudukan garis g terhadap lingkaran

Setelah melakukan tes diagnostik, guru dapat menggambar kedudukan garis g terhadap lingkaran L seperti pada Gambar 1.5, serta mengaitkannya dengan syarat suatu garis: (1) memotong lingkaran, (2) menyinggung lingkaran, dan (3) tidak memotong dan tidak menyinggung lingkaran. bersama dengan peserta didik, guru dapat menyimpulkan bahwa (1) syarat garis g memotong lingkaran adalah $D > 0$, (2) syarat garis g menyinggung lingkaran adalah $D = 0$, dan (3) syarat garis g tidak memotong dan tidak menyinggung lingkaran adalah $D < 0$.



Guru dapat menyampaikan kepada peserta didik tentang syarat kedudukan garis g terhadap lingkaran L . Pada bagian ini guru dapat memberikan pertanyaan pemantik seperti “Mengapa garis g yang memotong lingkaran L syaratnya adalah nilai diskriminan lebih dari 0?”, “Mengapa garis g yang menyinggung lingkaran L syaratnya adalah nilai diskriminan sama dengan satu dari 0?”, dan “Mengapa garis g yang tidak memotong dan tidak menyinggung lingkaran L syaratnya adalah nilai diskriminan kurang dari 0?”. Untuk membuktikan ketiga pertanyaan pemantik tersebut, guru dapat menggunakan Alternatif Penyelesaian berikut.

- a. Jika nilai Diskriminan pada fungsi kuadrat $(1+m^2)x^2 + (2mk+A+Bm)x + k^2 + Bk + C = 0$ bernilai positif ($D > 0$), maka posisi garis g memotong lingkaran L .

Guru dapat memberikan penjelasan secara logis bahwa apabila nilai suatu diskriminan bernilai positif ($D > 0$), maka persamaan tersebut memiliki dua akar persamaan (dalam hal ini adalah nilai dari absis x), dengan menyubstitusikan ke persamaan lingkaran L , maka diperoleh 2 titik yang terletak pada lingkaran. Dua titik inilah yang disebut dengan titik potong pada lingkaran.

- b. Jika nilai Diskriminan pada fungsi kuadrat $(1+m^2)x^2 + (2mk+A+Bm)x + k^2 + Bk + C = 0$ bernilai nol ($D = 0$), maka garis g bersinggungan dengan lingkaran L .

Guru dapat memberikan penjelasan secara logis bahwa apabila nilai suatu diskriminan bernilai positif ($D = 0$), maka persamaan tersebut memiliki satu akar persamaan (dalam hal ini adalah nilai dari absis x), dengan menyubstitusikan ke persamaan lingkaran L , maka diperoleh satu titik yang terletak pada lingkaran. Dua titik inilah yang disebut dengan titik singgung pada lingkaran.

- c. Jika nilai Diskriminan pada fungsi kuadrat $(1 + m^2)x^2 + (2mk + A + Bm)x + k^2 + Bk + C = 0$ bernilai negatif ($D < 0$), maka garis g tidak memotong dan tidak menyinggung lingkaran L .

Guru dapat memberikan penjelasan secara logis bahwa, bila nilai suatu diskriminan bernilai negatif ($D < 0$), maka persamaan kuadrat tersebut memiliki akar imajiner. Akibatnya persamaan kuadrat tersebut tidak memiliki akar real, dengan kata lain bahwa persamaan kuadrat tidak memotong sumbu X (dalam kasus ini, maka tidak memiliki nilai x). Karena persamaan kuadrat tidak memiliki nilai x , maka tidak ada titik potong antara garis g dengan lingkaran L .



Ayo Berpikir Kreatif

Pada kegiatan berpikir kreatif, guru dapat membagi peserta didik menjadi dua kelompok. Pada kelompok pertama, peserta didik dapat mengkreasikan kedudukan garis terhadap lingkaran bentuk persamaan $L \equiv (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Untuk kelompok kedua, peserta didik dapat mengkreasikan kedudukan garis terhadap lingkaran bentuk persamaan $L \equiv x^2 + y^2 = r^2$.



Ayo Mencoba

Pada kegiatan Ayo Mencoba pada kedudukan titik terhadap lingkaran, terdiri dari contoh soal dan latihan soal terbimbing yang harus dilengkapi oleh peserta didik dengan bimbingan guru. Bentuk bimbingan yang dapat dilakukan oleh guru adalah dengan melakukan tanya jawab pada bagian yang kosong pada latihan soal terbimbing. Adapun Alternatif Penyelesaian Latihan Soal Terbimbing 1.10 dan 1.11 adalah sebagai berikut.

Latihan Soal Terbimbing 1.10

Selidikilah setiap kedudukan garis berikut terhadap lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 6x + 8y + 21 = 0$

- garis $g: y = 3x - 2$.
- garis $h: y = 2x$.
- garis $l: y + 3x - 2 = 0$.

Alternatif Penyelesaian:

Untuk kasus a), Alternatif Penyelesaian dapat dilihat pada Buku Siswa.

Untuk kasus b) Substitusikan $y = 2x$ ke persamaan

$$L \equiv x^2 + y^2 - 6x + 8y + 21 = 0, \text{ diperoleh bahwa}$$

$$x^2 + (2x)^2 - 6x + 8(2x) + 21 = 0.$$

$$5x^2 + 10x + 21 = 0.$$

Dari persamaan fungsi kuadrat ini diperoleh bahwa $D = b^2 - 4ac = (10)^2 - 4(5)(21) = -320$. Karena diperoleh nilai diskriminan $D < 0$, maka garis g tidak memotong dan tidak menyinggung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 6x + 8y + 21 = 0$.

Untuk kasus c)

Dengan cara yang sama pada bagian a dan b, diperoleh bahwa nilai diskriminan $D < 0$. Karena $D < 0$, maka garis g tidak memotong dan tidak menyinggung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 6x + 8y + 21 = 0$.

Latihan Soal Terimbing 1.11

Selidiki apakah garis $h: x - y - 1 = 0$ memotong lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 + 4x - y + 1 = 0$. Jika memotong, tentukan titik potong lingkaran tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

Untuk menyelidiki apakah garis h dan lingkaran L berpotongan, perlu ditunjukkan bahwa persamaan kuadrat yang diperoleh dengan menyubstitusikan persamaan garis h ke persamaan lingkaran L memiliki nilai diskriminan bernilai positif.

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + 4x - y + 1 &= 0. \\x^2 + (x - 1)^2 + 4x - (x - 1) + 1 &= 0. \\2x^2 + 3x + 1 &= 0.\end{aligned}$$

Dari persamaan fungsi ini diperoleh bahwa $D = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4(2)(1) = 1$. Karena diperoleh nilai diskriminan $D > 0$, maka garis $h: x - y - 1 = 0$ memotong lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 + 4x - y + 1 = 0$.

Dengan menggunakan faktorisasi pada persamaan kuadrat $2x^2 + 3x + 1 = 0$, diperoleh

$$\begin{aligned}(2x + 1)(x + 1) &= 0. \\x_1 = -\frac{1}{2} \text{ atau } x_2 &= -1.\end{aligned}$$

Untuk kasus $x_1 = -\frac{1}{2}$, diperoleh

$$L \equiv x^2 + y^2 + 4x - y + 1 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + 4\left(-\frac{1}{2}\right) - y + 1 = y^2 + y + \frac{3}{4} = 0.$$

Karena diperoleh diskriminan bernilai negatif ($D < 0$) untuk persamaan kuadrat

$$y^2 + y + \frac{3}{4} = 0, \text{ maka pada } x = -\frac{1}{2} \text{ tidak ada titik potong padanya.}$$

Untuk kasus $x_2 = -1$, diperoleh

$$L \equiv x^2 + y^2 + 4x - y + 1 = (-1)^2 + y^2 + 4(-1) - y + 1 = y^2 - y - 2 = 0.$$

Dengan menggunakan faktorisasi pada persamaan kuadrat $y^2 - y - 2 = 0$, diperoleh bahwa

$$\begin{aligned}(y + 1)(y - 2) &= 0. \\y_1 = -1 \text{ atau } y_2 &= 2.\end{aligned}$$

Jadi, titik potong garis h dan lingkaran L terletak pada $(-1, -1)$ dan $(-1, 2)$.



Ayo Mencoba

Pada kegiatan ini, peserta didik diminta untuk menyelesaikan permasalahan yang ada di latihan 1.3. Alternatif penyelesaian telah disediakan untuk membantu guru.

Latihan Soal 1.3

1. Diketahui persamaan lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 + 4x - y + 1 = 0$. Tentukan kedudukan garis di bawah ini dengan lingkaran L
- $g: x + y = 2$.
 - $k: x = 0$.

Alternatif Penyelesaian:

- a. Dari persamaan garis $x + y = 2$, dapat dinyatakan dengan $y = 2 - x$, sehingga dengan mensubstitusikan ke persamaan lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 + 4x - y + 1 = 0$ diperoleh $x^2 + (2 - x)^2 + 4x - (2 - x) + 1 = 0$ atau dapat dinyatakan dengan $x^2 + 4x + 3 = 0$. Dari persamaan kuadrat $2x^2 + x + 3 = 0$, diperoleh bahwa $a = 2$, $b = 1$ dan $c = 3$. Dengan mensubstitusikan koefisien a , b , dan c ke rumus diskriminan, maka didapat

$$D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4(2)(3) = -23.$$

Karena diskriminan yang diperoleh adalah $D < 0$ maka garis $g: x + y = 2$ tidak memotong dan tidak menyinggung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 + 4x - y + 1 = 0$.

- b. Dengan mensubstitusikan $x = 0$ pada persamaan lingkaran $x^2 + y^2 + 4x - y + 1 = 0$, diperoleh $y^2 - y + 1 = 0$. Dari persamaan kuadrat $y^2 - y + 1 = 0$, diperoleh bahwa $a = 1$, $b = -1$ dan $c = 1$. Dengan mensubstitusikan koefisien a , b , dan c ke rumus diskriminan, maka didapat

$$D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(1) = -3.$$

Karena diskriminan yang diperoleh adalah $D < 0$ maka garis $k: x = 0$ tidak memotong dan tidak menyinggung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 + 4x - y + 1 = 0$.

2. Diketahui garis $y = kx + 1$ dan lingkaran $L \equiv (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$. Tentukan syarat k agar garis y tidak memotong lingkaran L !

Alternatif Penyelesaian:

Dengan mensubstitusikan $y = kx + 1$ ke persamaan lingkaran $L \equiv (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$, diperoleh

$$(x - 1)^2 + ((kx + 1) + 1)^2 = 4.$$

$$x^2 - 2x + 1 + k^2x^2 + 4kx + 4 - 4 = 0.$$

$$(1 + k^2)x^2 - (2 - 4k)x + 1 = 0.$$

Dari persamaan kuadrat $(1 + k^2)x^2 - (2 - 4k)x + 1 = 0$, diperoleh bahwa $a = 1 + k^2$, $b = -2 + 4k$, dan $c = 1$. Dengan mensubstitusikan koefisien a , b , dan c ke rumus diskriminan, maka $D = b^2 - 4ac = (4k - 2)^2 - 4(1 + k^2)(1) = 12k^2 - 16k - 8$.

Berdasarkan materi kedudukan garis terhadap lingkaran, yang telah dipelajari bahwa suatu garis tidak memotong dan tidak menyinggung lingkaran apabila

diperoleh nilai diskriminan kurang dari 0 ($D < 0$), maka

$$12k^2 - 16k - 8 < 0.$$

$$3k^2 - 4k - 2 < 0.$$

Dengan mengingat pertidaksamaan kuadrat pada jenjang sebelumnya, diperoleh bahwa daerah himpunan yang memenuhi pertidaksamaan kuadrat $3k^2 - 4k - 2 < 0$ adalah $\left\{\frac{4}{6} - \frac{2}{6}\sqrt{10} < k < \frac{4}{6} + \frac{2}{6}\sqrt{10}\right\}$. Jadi, syarat k agar garis $y = kx + 1$ tidak memotong dan menyinggung lingkaran $L \equiv (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$ adalah $\left\{\frac{4}{6} - \frac{2}{6}\sqrt{10} < k < \frac{4}{6} + \frac{2}{6}\sqrt{10}\right\}$.

3. Tunjukkan bahwa persamaan garis $g: px + qy - r^2$ yang memotong lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - r^2 = 0$ di dua titik berlainan, apabila titik $N(p, q)$ berada di luar lingkaran!

Alternatif Penyelesaian:

Garis $g: px + qy - r^2$ dapat dinyatakan dengan $y = \frac{r^2 - px}{q}$, substitusikan ke persamaan lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - r^2 = 0$, sehingga diperoleh

$$x^2 + \left(\frac{r^2 - px}{q}\right)^2 = r^2.$$

$$x^2 + \frac{r^4 - 2pxr^2 + p^2x^2}{q^2} = r^2.$$

$$\left(1 + \frac{p^2}{q^2}\right)x^2 - \frac{2pxr^2}{q^2}x + \left(\frac{r^4}{q^2} - r^2\right) = 0.$$

Dari persamaan ini diperoleh bahwa

$$D = b^2 - 4ac = \left(\frac{2pxr^2}{q^2}\right)^2 - 4\left(1 + \frac{p^2}{q^2}\right)\left(\frac{r^4}{q^2} - r^2\right) = 4r^2 + \frac{4r^2}{q^2}(a^2 - r^2).$$

Karena titik $N(p, q)$ berada di luar lingkaran maka $p^2 > r^2$, sehingga $a^2 - r^2 > 0$.

Akibatnya $4r^2 + \frac{4r^2}{q^2}(a^2 - r^2) = D > 0$. Jika nilai $D > 0$, maka persamaan garis $g: px + qy - r^2$ memotong lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - r^2 = 0$ di dua titik.

4. Tentukan nilai p , agar garis $y = -x + p$ terletak di luar lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$!

Alternatif Penyelesaian:

Dengan menyubstitusikan $y = -x + p$ ke persamaan lingkaran $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$, diperoleh $x^2 + (-x + p)^2 - 2x - 4(-x + p) + 3 = 0$, atau dapat dinyatakan

$$2x^2 - (2p - 2)x + p^2 - 4p + 3 = 0.$$

Dari persamaan kuadrat $2x^2 - (2p - 2)x + p^2 - 4p + 3 = 0$, diperoleh bahwa $a = 2$, $b = -(2p - 2) = 2 - 2p$, dan $c = p^2 - 4p + 3$. Dengan menyubstitusikan koefisien a , b dan c ke rumus diskriminan, maka

$$D = b^2 - 4ac = (2 - 2p)^2 - 4(2)(p^2 - 4p + 3) = p^2 - 6p + 5.$$

Dengan memfaktorkan diperoleh bahwa $p_1 = 5$ atau $p_2 = 1$.

Berdasarkan materi kedudukan garis terhadap lingkaran yang telah dipelajari bahwa suatu garis menyinggung lingkaran apabila diperoleh nilai diskriminan lebih dari nol ($D > 0$), sehingga diperoleh $p < 1$ atau $p > 5$.

Jadi, syarat p agar garis $y = -x + p$ berada di luar lingkaran $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$ adalah $\{p < 1 \text{ atau } p > 5\}$.

5. Persamaan Garis Singgung Lingkaran

Sebelum menyampaikan materi tentang persamaan garis singgung lingkaran, guru diharapkan melakukan tes diagnostik kognitif terlebih dahulu untuk mengetahui capaian kompetensi peserta didik sebelum memperoleh materi ini. Tes diagnostik kognitif dapat dilakukan dengan tanya jawab berkaitan dengan materi kedudukan garis menyinggung lingkaran. Guru dapat menanyakan nilai diskriminan suatu fungsi kuadrat, syarat suatu garis g menyinggung garis L , kemiringan suatu garis, dan definisi tangen suatu sudut.

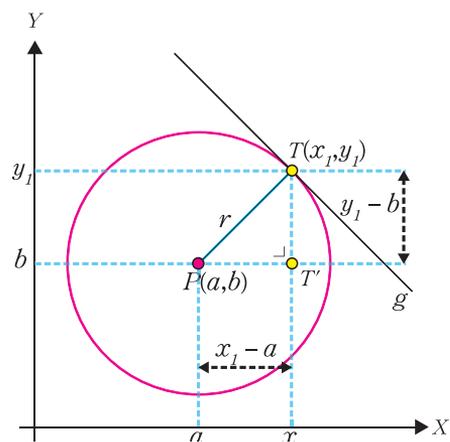
Setelah memberikan pertanyaan diagnostik, guru dapat merefleksikan materi kedudukan garis yang menyinggung lingkaran. Selanjutnya guru menyampaikan bahwa untuk menentukan persamaan garis singgung lingkaran ada tiga cara yang dapat dilakukan, yaitu (a) titik singgung telah ditentukan, (b) kemiringan garis singgung lingkaran telah ditentukan, dan (c) sebuah titik di luar lingkaran yang telah ditentukan. Untuk lebih jelas terkait ketiga cara tersebut, guru dapat memberikan penjelasan seperti berikut.

a. Titik Singgung Telah Ditentukan

Dengan menggunakan Gambar 1.6, guru menjelaskan proses untuk menentukan persamaan garis singgung yang diketahui titik pada lingkaran

$$L \equiv (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Dengan memperhatikan segitiga PTT' , sehingga kemiringan $m_{PT} = \frac{y_1 - b}{x_1 - a}$. Karena garis PT dan garis g tegak lurus, maka $m_{PT} m_g = -1$, sehingga $\left(\frac{y_1 - b}{x_1 - a}\right) m_g = -1$ atau $m_g = -\left(\frac{x_1 - a}{y_1 - b}\right)$. Persamaan garis g sendiri dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan $(y - y_1) = m_g (x - x_1)$, sehingga



Gambar 1.6. Proses Menentukan Garis Singgung

$$\begin{aligned}
(y-y_1) &= -\left(\frac{x_1-a}{y_1-b}\right)(x-x_1). \\
(y-y_1)(y_1-b) &= -(x_1-a)(x-x_1). \\
yy_1 - yb - y_1^2 + by_1 &= -xx_1 + x_1^2 + ax - ax_1. \\
x_1^2 + y_1^2 &= yy_1 - yb + by_1 + xx_1 + ax_1 - ax. \\
x_1^2 - ax_1 + y_1^2 - by_1 &= yy_1 - yb + xx_1 - ax. \\
x_1^2 - ax_1 - ax_1 + y_1^2 - by_1 - by_1 &= (yy_1 - yb) + (xx_1 - ax) - ax_1 - by_1. \\
x_1^2 - 2ax_1 + a^2 + y_1^2 - 2by_1 + b^2 &= yy_1 - yb + xx_1 - ax - ax_1 - by_1 + a^2 + b^2. \\
(x_1-a)^2 + (y_1-b)^2 &= xx_1 - ax + yy_1 - by_1 - by - ax_1 + a^2 + b^2. \\
r^2 &= (x_1-a)x + y(y_1-b) - (x_1+a)a + (b-y_1)b. \\
r^2 &= [(x_1-a)x - (x_1+a)a] + [(b-y_1)b + y(y_1-b)]. \\
r^2 &= (x-a)(x_1-a) + (y-b)(y_1-b).
\end{aligned}$$

Persamaan terakhir inilah yang disebut dengan persamaan garis singgung g pada lingkaran L .

Guru perlu menekankan kepada peserta didik bahwa bentuk persamaan garis singgung $L \equiv (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ adalah $(x-a)(x_1-a) + (y-b)(y_1-b) = r^2$. Proses ini disebut dengan “bagi adil”. Guru dapat menyampaikan kepada peserta didik terkait dengan prinsip bagi adil dari

$$(x-a)^2 \text{ adalah } (x-a)(x_1-a).$$

$$(y-b)^2 \text{ adalah } (y-b)(y_1-b).$$

$$3x \text{ adalah } \frac{3(x+x_1)}{2}.$$

$$3y \text{ adalah } \frac{3(y+y_1)}{2}.$$



Ayo Berdiskusi

Pada aktivitas Ayo Berdiskusi, guru dapat membagi peserta didik menjadi 2 kelompok. Kelompok pertama, diberikan tugas untuk berdiskusi untuk membuktikan bahwa persamaan garis singgung lingkaran pada titik $T(x_1, y_1)$ dengan bentuk persamaan $L \equiv x^2 + y^2 = r^2$ adalah $xx_1 + yy_1 = r^2$. Kelompok kedua, diberikan tugas untuk berdiskusi untuk membuktikan bahwa persamaan garis singgung lingkaran pada titik $T(x_1, y_1)$ dengan bentuk persamaan $L \equiv x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ adalah

$$xx_1 + yy_1 + A \frac{(x+x_1)}{2} + B \frac{(y+y_1)}{2} + C = 0.$$

Apabila peserta didik mengalami kesulitan untuk membuktikannya, guru dapat menggunakan alternatif pembuktian berikut.

1. Membuktikan bahwa persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = r^2$ di titik $T(x_1, y_1)$ adalah $xx_1 + yy_1 = r^2$.

Misalkan persamaan lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = r^2$ dan titik $T(x_1, y_1)$ dan $U(x_2, y_2)$ terletak pada lingkaran L , sehingga persamaan garis TU adalah $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ atau

$$y - y_1 = \left(\frac{y-y_1}{y_2-y_1}\right)(x - x_1).$$

Karena titik $T(x_1, y_1)$ terletak pada lingkaran L , maka berlaku $x_1^2 + y_1^2 = r^2$.

Karena titik $U(x_2, y_2)$ terletak pada lingkaran L , maka berlaku $x_2^2 + y_2^2 = r^2$.

Dengan melakukan eliminasi r^2 pada persamaan $x_1^2 + y_1^2 = r^2$ dan $x_2^2 + y_2^2 = r^2$, diperoleh bahwa

$$\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 &= x_2^2 + y_2^2. \\ y_2^2 - y_1^2 &= -(x_2^2 - x_1^2). \\ (y_2 - y_1)(y_2 + y_1) &= -(x_2 - x_1)(x_2 + x_1). \\ \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} &= -\frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1}. \end{aligned}$$

Substitusikanlah persamaan $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1}$ ke persamaan

$y - y_1 = \left(\frac{y-y_1}{y_2-y_1}\right)(x-x_1)$, sehingga diperoleh $y - y_1 = -\left(\frac{x+x_1}{y_2+y_1}\right)(x - x_1)$. Apabila titik $U(x_2, y_2)$ bergerak mendekati $T(x_1, y_1)$, sehingga titik $U(x_2, y_2)$ dan titik $T(x_1, y_1)$ berhimpit. Akibatnya $x_1 = x_2$ dan $y_1 = y_2$, sehingga persamaan

$$\begin{aligned} y - y_1 &= -\left(\frac{x+x_1}{y_2+y_1}\right)(x - x_1) \text{ menjadi} \\ y - y_1 &= -\left(\frac{x+x_1}{y_2+y_1}\right)(x - x_1). \\ y - y_1 &= -\left(\frac{2x_1}{2y_1}\right)(x - x_1). \\ (y - y_1) y_1 &= -(x_1)(x - x_1). \\ y y_1 + x x_1 &= x_1^2 + y_1^2. \end{aligned}$$

2. Membuktikan bahwa persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ di titik $T(x_1, y_1)$ adalah

$$xx_1 + yy_1 = A\frac{(x-x_1)}{2} + B\frac{(y-y_1)}{2} + C = 0.$$

Dari persamaan garis singgung lingkaran berbentuk $(x-a)(x_1-a) + (y-b)(y_1-b) = r^2$, dengan menjabarkan persamaan garis singgung ini maka diperoleh

$$\begin{aligned}(x-a)(x_1-a) + (y-b)(y_1-b) &= r^2. \\ (xx_1 - ax - ax_1 + a^2) + (yy_1 - by - by_1 + b) &= r^2. \\ xx_1 + yy_1 - a(x + x_1) - b(y + y_1) + a^2 + b^2 - r^2 &= 0.\end{aligned}$$

Dengan menyubstitusikan $a = -\frac{A}{2}$, $b = -\frac{B}{2}$, dan $C = a^2 + b^2 - r^2$, sehingga diperoleh $xx_1 + yy_1 - a(x+x_1) - b(y+y_1) + a^2 + b^2 - r^2 = 0$.

$$\begin{aligned}xx_1 + yy_1 + \frac{A}{2}(x+x_1) + \frac{B}{2}(y+y_1) + C &= 0. \\ xx_1 + yy_1 + A\frac{x+x_1}{2} + B\frac{y+y_1}{2} + C &= 0.\end{aligned}$$

Agar peserta didik dapat memahami materi kedudukan titik terhadap lingkaran, guru dapat memberikan alternatif contoh soal yang ada pada Buku Siswa seperti Contoh Soal 1.13, Latihan Soal Terbimbing 1.12, dan Latihan Soal Terbimbing 1.13. Guru diperbolehkan menggunakan model contoh soal lainnya yang sejenis untuk memberikan penjelasan kepada peserta didik terkait dengan persamaan lingkaran.



Ayo Mencoba

Pada kegiatan Ayo Mencoba pada persamaan garis singgung, guru membimbing peserta didik untuk menyelesaikan latihan soal terbimbing yang ada di Buku Siswa. Bentuk bimbingan yang dapat dilakukan oleh guru adalah dengan melakukan tanya jawab pada bagian yang kosong pada latihan soal terbimbing. Adapun Alternatif Penyelesaian Latihan Soal Terbimbing 1.12 dan 1.13 adalah sebagai berikut.

Latihan Soal Terbimbing 1.12

Tentukan persamaan garis singgung lingkaran yang melalui titik $Q(1,-3)$, jika persamaan lingkarannya adalah

- $L \equiv x^2 + y^2 = 16$.
- $L \equiv x^2 + y^2 - 8x - 2y + 12 = 0$.

Alternatif Penyelesaian:

Untuk bagian a)

Dengan menggunakan prinsip bagi adil, diperoleh bahwa persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = 16$ yang melalui titik $Q(1,-3)$ adalah

$$\begin{aligned}xx_1 + yy_1 &= 16. \\ x - 3y - 16 &= 0.\end{aligned}$$

Jadi, persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = 16$ yang melalui titik $Q(1,-3)$ adalah $x - 3y - 16 = 0$.

Untuk bagian b)

Dengan menggunakan prinsip bagi adil, diperoleh bahwa persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 8x - 2y + 12 = 0$ yang melalaui titik $Q(1,-3)$ adalah

$$\begin{aligned}xx_1 + yy_1 - 8\frac{x+x_1}{2} - 2\frac{y+y_1}{2} + 12 &= 0. \\x - 3y - 4(x+1) - (y-3) + 12 &= 0. \\- 2y - 5x + 11 &= 0.\end{aligned}$$

Jadi, persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 8x - 2y + 12 = 0$ yang melalui titik $Q(1,-3)$ adalah $- 2y - 5x + 11 = 0$.

Latihan Soal Terbimbing 1.13

Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv (x+1)^2 + (y-3)^2 = 9$ yang melalui titik potong antara lingkaran L dengan garis $y = 3$! (UN 2012)

Alternatif Penyelesaian:

Langkah pertama yang harus kalian lakukan adalah menentukan titik potong garis $y = 3$ terhadap lingkaran L . Adapun titik potong tersebut adalah

$$\begin{aligned}(x + 1)^2 + (y - 3)^2 &= 9. \\(x + 1)^2 + (3 - 3)^2 &= 9. \\(x + 1) &= \pm 3.\end{aligned}$$

sehingga $x_1=2$ dan $x_2= -4$. Untuk menentukan nilai y , dapat dilakukan dengan cara menyubstitusikan nilai x yang diperoleh ke persamaan lingkaran

$$L \equiv (x+1)^2 + (y-3)^2 = 9.$$

Pada $x_1 = 2$, maka titik singgungnya adalah $(2,3)$. Untuk menentukan persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv (x+1)^2 + (y-3)^2 = 9$ melalui titik $(2,3)$, dengan menggunakan prinsip bagi adil

$$\begin{aligned}(x + 1)(x_1 + 1) + (y - 3)(y_1 - 3) &= 9. \\(x + 1)(2 + 1) + (y - 3)(3 - 3) &= 9. \\3x - 6 &= 0. \\x &= 2.\end{aligned}$$

Pada $x_2 = -4$, maka titik singgungnya adalah $(-4,3)$. Untuk menentukan persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv (x+1)^2 + (y-3)^2 = 9$ melalui titik $(-4,3)$, dengan menggunakan prinsip bagi adil

$$\begin{aligned}(x + 1)(x_1 + 1) + (y - 3)(y_1 - 3) &= 9. \\(x + 1)(-4 + 1) + (y - 3)(3 - 3) &= 9. \\-3x - 12 &= 0. \\x &= -4.\end{aligned}$$

Jadi, persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv (x+1)^2 + (y-3)^2 = 9$ yang memotong garis $y = 3$ adalah $x = 2$ dan $x = -4$.

b. Kemiringan Garis Singgung Lingkaran Telah Ditentukan

Pada bagian ini, guru memberikan pertanyaan diagnostik tentang definisi kemiringan dan nilai diskriminan. Selanjutnya guru dapat menjelaskan proses untuk menemukan persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, jika diketahui kemiringan garis singgungnya. Adapun proses untuk menemukan persamaan garis singgung adalah sebagai berikut:

Misalkan persamaan garis singgung lingkaran yang akan di cari adalah $y = mx + n$ dan persamaan lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = r^2$. Selanjutnya substitusikan persamaan garis $y = mx + n$ ke $L \equiv x^2 + y^2 = r^2$, sehingga $x^2 + (mx + n)^2 = r^2$

$$(1+m^2)x^2 + 2mnx + (n^2 - r^2) = 0.$$

Persamaan ini merupakan bentuk persamaan kuadrat dengan koefisien $a = (1+m^2)$, $b = 2mn$, dan $c = (n^2 - r^2)$. Dengan mengingat bahwa syarat titik berada pada lingkaran (titik singgung) adalah $D = 0$, maka

$$D = b^2 - 4ac = (2mn)^2 - 4(1 + m^2)(n^2 - r^2) = 4(m^2r^2 - n^2 + r^2).$$

$$0 = 4(m^2r^2 - n^2 + r^2) = m^2r^2 - n^2 + r^2.$$

$$n = \pm \sqrt{r^2(m^2 + 1)} = \pm r\sqrt{m^2 + 1}.$$

Dengan menyubstitusikan nilai n ke persamaan garis $y = mx + n$, diperoleh bahwa persamaan garis singgung pada lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = r^2$ dengan kemiringan m , yaitu $y = mx \pm r\sqrt{m^2 + 1}$.



Ayo Berdiskusi

Pada aktivitas Ayo Berdiskusi, guru dapat membagi peserta didik menjadi 2 kelompok. Selain peserta didik akan semakin memahami materi, guru diharapkan dapat mengajak peserta didik untuk berani menyatakan pendapatnya. Kelompok pertama, diberikan tugas untuk berdiskusi untuk mencari persamaan garis singgung $L \equiv (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ jika diketahui kemiringan m . Harapannya, kelompok pertama memperoleh persamaan garis singgung adalah $(y - b) = m(x - a) \pm r\sqrt{m^2 + 1}$. Kelompok kedua, diberikan tugas untuk berdiskusi untuk mencari persamaan garis singgung $L \equiv x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ jika diketahui kemiringan m . Harapannya, kelompok kedua memperoleh persamaan garis singgung adalah $y + \frac{B}{2} = m(x + \frac{A}{2}) \pm r\sqrt{m^2 + 1}$.

Apabila peserta didik mengalami kesulitan untuk mencari persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ jika diketahui kemiringan m , guru dapat membantu kelompok pertama dengan menggunakan alternatif pembuktian berikut.

Misalkan persamaan garis singgung lingkaran yang akan di cari adalah $y = mx+n$. Gunakanlah prinsip translasi dengan menggeser persamaan lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = r^2$ dengan pusat $P(0,0)$ menuju ke pusat $P(a,b)$ sehingga persamaan lingkaran menjadi $L \equiv (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$. Akibatnya persamaan garis singgung ditranslasi adalah $y = mx \pm r\sqrt{m^2 + 1}$, sehingga setelah ditranslasi persamaan garis singgung menjadi $y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{m^2 + 1}$.

Untuk mencari persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv x^2+y^2+Ax+By+C = 0$ jika diketahui kemiringan m , guru dapat membantu kelompok pertama dengan menggunakan alternatif pembuktian berikut.

Substitusikan $a = -\frac{A}{2}$, $b = -\frac{B}{2}$, dan $C = a^2 + b^2 - r^2$ ke persamaan lingkaran $L \equiv x^2+y^2+Ax+By+C = 0$, sehingga diperoleh $x^2+y^2+Ax+By+C = 0$.

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - r^2 = 0.$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Persamaan lingkaran ini memiliki persamaan garis singgung $y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{m^2 + 1}$, dengan menyubstitusikan $a = -\frac{A}{2}$ dan $b = -\frac{B}{2}$, diperoleh

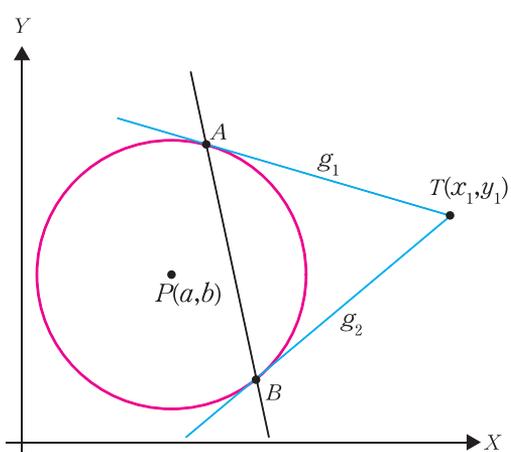
$$y - -\frac{B}{2} = m(x + \frac{A}{2}) \pm r\sqrt{m^2 + 1}.$$

Agar peserta didik dapat memahami materi persamaan garis singgung lingkaran yang diketahui kemiringan suatu garis singgung, guru dapat memberikan alternatif Contoh Soal 1.14 dan 1.15 yang ada pada Buku Siswa. Guru diperbolehkan menggunakan contoh soal lain yang sejenis untuk memberikan penjelasan kepada peserta didik terkait dengan persamaan garis singgung lingkaran yang diketahui kemiringan suatu garis singgung.

c. Sebuah Titik di Luar Lingkaran yang Telah Ditentukan

Pada bagian ini, guru memberikan pertanyaan diagnostik tentang garis polar atau garis kuasa. Selanjutnya, guru dapat menjelaskan proses untuk menemukan persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, jika diketahui titik di luar garis. Guru dapat menggunakan Gambar 1.7.

Misalkan kedua garis singgung tersebut adalah g_1 dan g_2 , dengan garis g_1 menyinggung lingkaran di titik A , dan garis g_2 menyinggung lingkaran di titik B . Garis yang menghubungkan



Gambar 1.7. Lingkaran, Garis Singgung Lingkaran dan Titik Singgung.

antara titik A dan titik B disebut dengan garis kutub atau garis polar. Guru dapat menyampaikan Tabel 1.2 untuk penentuan garis polar atau garis kutub pada lingkaran guru dapat menyampaikan Tabel 1.2.

Tabel 1.2. Persamaan Lingkaran dan Persamaan Garis Polar

Persamaan Lingkaran	Persamaan Polar
$x^2 + y^2 = r^2$	$xx_1 + yy_1 = r^2$
$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$	$(x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) = r^2$
$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$	$xx_1 + yy_1 + \frac{A}{2}(x + x_1) + \frac{B}{2}(y + y_1) + C = 0$

Dengan pembuktian sifat ini, dapat dilihat ada bagian persamaan garis singgung lingkaran dengan titik pada lingkaran.

Agar peserta didik dapat memahami materi persamaan garis singgung lingkaran yang diketahui titik di luar lingkaran, guru dapat memberikan alternatif Contoh Soal 1.16 di Buku Siswa. Guru diperbolehkan menggunakan contoh soal lain yang sejenis untuk memberikan penjelasan kepada peserta didik terkait dengan persamaan garis singgung lingkaran yang diketahui titik di luar lingkaran. Untuk melihat kemampuan peserta didik, guru dapat melakukan tanya jawab berkaitan dengan Contoh Soal 1.16 bagian $x = -3$. Adapaun Alternatif Penyelesaian contoh soal untuk bagian $x = -3$ adalah sebagai berikut.

Alternatif Penyelesaian Contoh Soal 1.16 untuk $x = -3$

Substitusikan $x = -3$ ke persamaan $y = 2 - 5x = 2 - 5(-3) = -13$, sehingga diperoleh titik polarnya adalah $(-3, -13)$. Selanjutnya $a = x = -3$ dan $b = y = -13$ substitusikan persamaan garis $(x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) = r^2$, sehingga

$$\begin{aligned} (x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) &= r^2. \\ (x - 3)(-3 - 3) + (y - 1)(-13 - 1) &= 16. \\ (x - 3)(-6) + (y - 1)(-14) &= 16. \\ -6x - 14y + 32 &= 0. \\ 3x - 7y + 16 &= 0. \end{aligned}$$



Ayo Mencoba

Pada kegiatan ini, peserta didik diminta untuk menyelesaikan permasalahan yang ada pada Latihan Soal 1.4. Terdapat Alternatif Penyelesaian yang dapat digunakan guru.

Latihan Soal 1.4

1. Diketahui persamaan lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 3x + 4y - 10 = 0$. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran L yang melalui titik:
- $A(2,2)$.
 - $D(5,-2)$.

Alternatif Penyelesaian:

- a. Langkah pertama yang harus dilakukan adalah melihat kedudukan titik $A(2,2)$ terhadap lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 3x + 4y - 10 = 0$. Dengan menyubstitusikan titik $A(2,2)$ ke persamaan lingkaran $\equiv x^2 + y^2 - 3x + 4y - 10 = 0$, diperoleh bahwa

$$x^2 + y^2 - 3x + 4y - 10 = (2)^2 + (2)^2 - 3(2) + 4(2) - 10 = 0.$$

Karena titik $A(2, 2)$ kedudukannya berada pada lingkaran, maka dengan menggunakan prinsip bagi adil diperoleh bahwa

$$xx_1 + yy_1 - 3\frac{x+x_1}{2} + 4\frac{y+y_1}{2} - 10 = 0.$$

$$2x + 2y - 3\frac{x+2}{2} + 4\frac{y+2}{2} - 10 = 0.$$

$$x + 8y - 18 = 0.$$

- b. Dengan cara yang sama pada bagian a, diperoleh bahwa kedudukan titik $D(5,-1)$ berada di dalam lingkaran, sehingga titik tersebut tidak memiliki garis singgung.

2. Diketahui persamaan lingkaran $L \equiv (x - \frac{1}{2})^2 + (y + 1\frac{1}{2})^2 - 16 = 0$. Tentukan persamaan garis singgung suatu lingkaran L , jika
- kemiringannya 2.
 - garis singgung membentuk sudut 60° terhadap sumbu Y positif.

Alternatif Penyelesaian:

- a. Dari soal diketahui bahwa $a = \frac{1}{2}$, $b = -1\frac{1}{2}$, $r = 4$, dan kemiringan $m = 2$, sehingga

$$(y - b) = m(x - a) \pm r\sqrt{m^2 + 1}.$$

$$y - \frac{1}{2} = 2(x - \frac{1}{2}) \pm 4\sqrt{2^2 + 1}.$$

$$y = 2x - 2\frac{1}{2} \pm 4\sqrt{5}.$$

Jadi, persamaan garis singgungnya adalah

$$y = 2x - 2\frac{1}{2} + 4\sqrt{5} \text{ dan } y = 2x - 2\frac{1}{2} - 4\sqrt{5}.$$

- b. Sudut yang terbentuk adalah 60° terhadap sumbu Y positif, maka $\tan 30^\circ = \frac{1}{3}\sqrt{3}$, sehingga kemiringan garis singgungnya adalah $\frac{1}{3}\sqrt{3}$.

Dengan menyubstitusikan $a = \frac{1}{2}$, $b = -1\frac{1}{2}$, $r = 4$, dan kemiringan $m = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ diperoleh bahwa $y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{m^2 + 1}$ atau dapat dinyatakan

$$y + 1\frac{1}{2} = \frac{1}{3}\sqrt{3}\left(x + \frac{1}{2}\right) \pm 4\sqrt{\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)^2 + 1}.$$

$$y = \frac{1}{3}\sqrt{3}x + \frac{1}{6}\sqrt{3} - \frac{3}{2} \pm 4\sqrt{\frac{4}{3}}.$$

Jadi, persamaan garis singgungnya adalah

$$y = \frac{1}{3}\sqrt{3}x + \frac{1}{6}\sqrt{3} - \frac{3}{2} + 4\sqrt{\frac{4}{3}} \quad \text{dan} \quad y = \frac{1}{3}\sqrt{3}x + \frac{1}{6}\sqrt{3} - \frac{3}{2} - 4\sqrt{\frac{4}{3}}.$$

3. Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di titik $P(2, -3)$ dan menyinggung garis $l : 3x - 4y + 7 = 0$!

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan persamaan lingkaran adalah $L \equiv (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Langkah pertama untuk menentukan persamaan ini adalah dengan menentukan jarak garis $l : 3x - 4y + 7 = 0$ terhadap lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

dengan pusat $P(2, -3)$ yaitu $r = \left| \frac{Aa + Bb + C}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| = \left| \frac{(3)(2) + (-4)(-3) + 7}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} \right| = \left| \frac{6 + 12 + 7}{\sqrt{25}} \right| = 5$.

Jadi, persamaan lingkaran dengan pusat $P(2, -3)$ dan jari-jari $r = 5$ adalah $L \equiv (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$.

4. Diketahui titik $A(6, -8)$ dan lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = 100$. Tunjukkan bahwa titik A terletak pada lingkaran L , kemudian tentukan pula persamaan garis singgungnya!

Alternatif Penyelesaian:

Untuk menunjukkan bahwa titik $(6, -8)$ terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 = 100$, maka perlu ditunjukkan bahwa nilai kuasa titik $(6, -8)$ adalah nol, maka

$$K_{(6, -8)} = x^2 + y^2 - 100 = 6^2 + (-8)^2 - 100 = 0.$$

Karena nilai kuasa titik $(6, -8)$ pada lingkaran $x^2 + y^2 = 100$ bernilai nol, maka titik $(6, -8)$ berada pada lingkaran $x^2 + y^2 = 100$.

Selanjutnya, untuk menentukan persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = 100$ di titik $(6, -8)$ adalah $xx_1 + yy_1 = 100$.

$$6x - 8y - 100 = 0.$$

Jadi, persamaan garis singgungnya adalah $6x - 8y - 100 = 0$.

5. Tentukan nilai q agar lingkaran $L \equiv (x - 2q)^2 + (y + 5)^2 - 4q^2 = 13$ menyinggung sumbu X . Kemudian carilah titik singgung antara lingkaran L dan sumbu X !

Alternatif Penyelesaian:

Karena persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv (x - 2q)^2 + (y + 5)^2 - 4q^2 = 13$ menyinggung di sumbu X , maka $y = 0$. Dengan menyubstitusikan $y = 0$ ke persamaan lingkaran $L \equiv (x - 2q)^2 + (y + 5)^2 - 4q^2 = 13$, diperoleh

$$(x - 2q)^2 - 4q^2 + 12 = 0.$$

$$x^2 - 4qx + 12 = 0.$$

Dari persamaan kuadrat $x^2 - 4qx + 12 = 0$, diperoleh bahwa $a = 1$, $b = -4q$ dan $c = 12$. Karena kedudukan garis menyinggung suatu lingkaran adalah diskriminannya bernilai nol, dengan menyubstitusikan $a = 1$, $b = -4q$ dan $c = 12$ dan $D = 0$ ke rumus diskriminan, maka

$$D = b^2 - 4ac$$

$$(-4q)^2 - 4(1)(12) = 0.$$

$$q = \pm \sqrt{3},$$

Jadi, syarat agar lingkaran $L \equiv (x - 2q)^2 + (y + 5)^2 - 4q^2 = 13$ menyinggung sumbu X adalah $q_1 = \sqrt{3}$ atau $q_2 = -\sqrt{3}$.

Untuk menentukan titik singgung antara lingkaran L dan sumbu X , dilakukan dengan langkah berikut. Untuk $q_1 = \sqrt{3}$, substitusikan $q_1 = \sqrt{3}$ ke persamaan $x^2 - 4qx + 12 = 0$, diperoleh

$$x^2 - 4\sqrt{3}x + 12 = 0.$$

$$(x - 2\sqrt{3})^2 = 0.$$

$$x = 2\sqrt{3}.$$

Jadi, untuk $q_1 = \sqrt{3}$ diperoleh titik singgung di $(2\sqrt{3}, 0)$.

Untuk $q_2 = -\sqrt{3}$, substitusikan $q_2 = -\sqrt{3}$ ke persamaan $x^2 - 4qx + 12 = 0$, diperoleh

$$x^2 + 4\sqrt{3}x + 12 = 0.$$

$$(x + 2\sqrt{3})^2 = 0.$$

$$x = -2\sqrt{3}.$$

Jadi, untuk $q_2 = -\sqrt{3}$ diperoleh titik singgung di $(-2\sqrt{3}, 0)$.

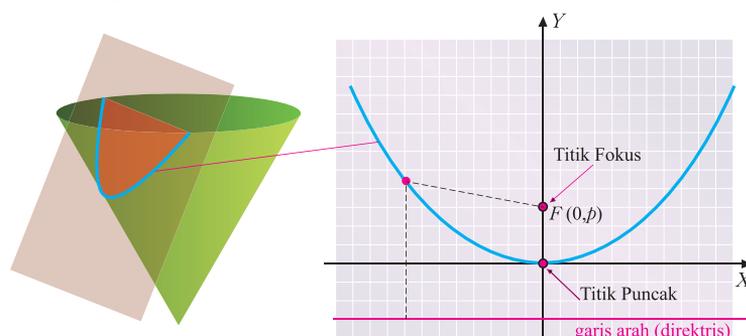
B. Irisan Kerucut

Sebelum memulai aktifitas yang lebih jauh, guru dapat memberikan tes diagnostik kognitif dan non kognitif seperti kegiatan Ayo Mengingat Kembali pada materi lingkaran. Selanjutnya, guru dapat menyampaikan materi yang dipelajari pada irisan kerucut yaitu persamaan parabola, persamaan elips, dan persamaan hiperbola. Persamaan garis singgung pada irisan kerucut merupakan materi pengayaan. Selanjutnya guru dapat menceritakan bahwa antena parabola dan kompor tenaga surya merupakan aplikasi bentuk parabola dalam kehidupan sehari-hari. *Cooling tower* atau menara pendingin dan tower SUTET merupakan aplikasi bentuk hiperbola dalam kehidupan nyata. Hal ini dilakukan untuk memberikan motivasi dan pemahaman kepada peserta didik tentang manfaat mempelajari irisan kerucut berbentuk parabola, elips, dan hiperbola.

1. Parabola



Pada saat mempelajari materi geometri analitik, guru dapat memberikan pertanyaan refleksi seperti “Tahukah kalian apa itu fungsi kuadrat?”, “Apakah kalian tahu bagaimana cara membuat grafik fungsi kuadrat?” dan “Bagaimana cara kalian menentukan titik puncak dari grafik fungsi kuadrat?”. Pertanyaan ini dilakukan bertujuan untuk mengingatkan peserta didik terkait dengan materi fungsi kuadrat yang sudah dipelajari di kelas X SMA. Guru dapat menyampaikan kepada peserta didik tentang kesamaan dan perbedaan fungsi kuadrat yang telah dipelajari di kelas X dengan materi irisan kerucut berbentuk parabola. Adapun salah satu kesamaannya adalah bentuk grafik fungsi kuadrat yang telah dipelajari di kelas X merupakan bentuk parabola \wedge atau \vee . Untuk perbedaan antara materi fungsi kuadrat dan materi parabola, selain terletak pada arah kurva, peserta didik akan mempelajari fokus parabola.



Gambar 1.8. Irisan Kerucut Berbentuk Parabola

Guru dapat menggambar kurva parabola seperti Gambar 1.8. Melalui gambar ini, guru dapat memberikan definisi parabola yang mudah diingat oleh peserta didik, parabola merupakan tempat kedudukan titik-titik yang jaraknya terhadap titik tertentu, yang dinamakan titik fokus (f), dan garis tertentu, yang dinamakan direktriks (d). Setelah menyampaikan definisi parabola, guru dapat menunjukkan unsur-unsur parabola seperti titik puncak, garis direktriks, dan titik fokus.

Pada bagian menentukan persamaan parabola, guru dapat menggunakan contoh menentukan persamaan parabola dengan titik puncak $O(0,0)$ dengan sumbu simetri adalah sumbu Y . Guru dapat menggunakan Gambar 1.8 atau Gambar 1.9 untuk menentukan persamaan parabola.

Dari Gambar 1.9 diperoleh bahwa persamaan sumbu simetri adalah $x = 0$, puncak di $O(0,0)$, titik fokus pada $(0,p)$ dan persamaan garis direktriknya adalah $y = -p$ atau $y + p = 0$. Berdasarkan definisi parabola maka $d_1 = d_2$, diperoleh bahwa

$\sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = p + y$. Kuadratkan persamaan ini, sehingga diperoleh bahwa

$$(x-0)^2 + (y-p)^2 = (p+y)^2.$$

$$x^2 + y^2 - 2yp + p^2 = p^2 + 2py + y^2.$$

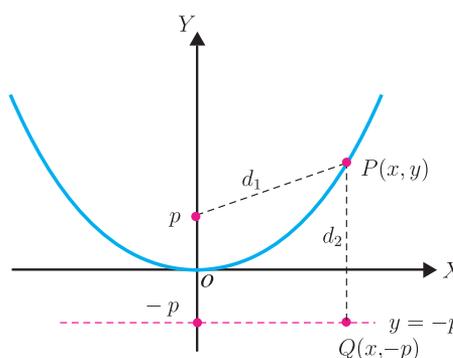
$$x^2 = 4py.$$

Persamaan $x^2 = 4py$ adalah persamaan parabola dengan titik puncak $O(0,0)$ dan sumbu simetris adalah sumbu Y . Guru dapat menyampaikan bila puncak bukan di titik pusat $O(0,0)$ tetapi di $H(m,n)$ dengan sumbu simetri sejajar sumbu $Y(x=m)$, persamaan direktriknya adalah $y = n-p$, dan titik fokus pada $F(m, n+p)$, maka persamaan parabola adalah $(x-m)^2 = 4p(y-n)$.

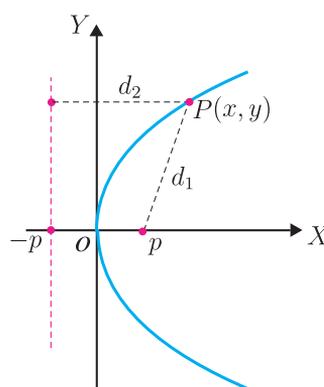
Untuk menentukan persamaan parabola dengan titik puncak $O(0,0)$ dan sumbu simetri adalah sumbu X , guru dapat menggunakan Gambar 1.10. Pada gambar ini, sumbu simetri adalah $y = 0$, puncak di $O(0,0)$, titik fokus pada $(p,0)$ dan persamaan garis direktriknya adalah $x = -p$ atau $x + p = 0$.

Berdasarkan definisi parabola maka $d_1 = d_2$, sehingga

$$\sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2} = \left| \frac{x+p}{\sqrt{1^2+0^2}} \right|$$



Gambar 1.9. Parabola dengan Titik Puncak $O(0,0)$ dan Sumbu Simetris adalah Sumbu Y



Gambar 1.10. Kurva Parabola dengan Puncak $O(0,0)$ dan Sumbu Simetris adalah Sumbu X

$$\left(\sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2}\right)^2 = \left|\frac{x+p}{\sqrt{1^2+0^2}}\right|^2$$

$$(x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2$$

$$y^2 = 4px$$

Persamaan $y^2 = 4px$ adalah persamaan parabola dengan titik puncak $O(0,0)$ dan sumbu simetris adalah sumbu X . Guru dapat menyampaikan bila titik puncak bukan di titik pusat $O(0,0)$ tetapi di $H(m,n)$ dengan sumbu simetri sejajar sumbu $X(y=m)$, persamaan direktriksnya adalah $x = n-p$, dan titik fokus pada $F(m+p,n)$, adalah $(y-n)^2 = 4p(x-m)$.

Agar peserta didik dapat memahami materi persamaan parabola, guru dapat memberikan alternatif contoh soal yang ada pada Buku Siswa seperti Contoh Soal 1.18 hingga Contoh Soal 1.20. Guru diperbolehkan menggunakan contoh soal lain yang sejenis untuk memberikan penjelasan kepada peserta didik terkait dengan persamaan parabola.



Ayo Mencoba

Pada kegiatan ini, peserta didik diminta untuk menyelesaikan permasalahan yang ada di Latihan Soal 1.6

1. Tentukan persamaan parabola jika diketahui unsur-unsur parabola sebagai berikut.
 - a. Puncak parabola pada titik $(2,3)$, sumbu simetri parabola sejajar sumbu Y , dan parabola melalui titik $(3,4)$.
 - b. Persamaan direktriks parabola adalah $y = 1$, dan titik fokus parabola adalah $F(-3,7)$.
 - c. Titik fokus parabola di $(3,0)$, dan persamaan direktriks parabola adalah $x = -3$.

Alternatif Penyelesaian

- a. Karena parabola memiliki titik puncak $(2,3)$ dan sumbu simetri yang sejajar sumbu Y , maka parabola terbuka ke atas. Adapun persamaan parabolanya adalah $(x-m)^2 = 4p(y-n)$ atau dapat dinyatakan dengan $(x-2)^2 = 4p(y-3)$. Karena parabola melalui titik $(3,4)$ maka $(3-2)^2 = 4p(4-3)$, sehingga $\frac{1}{4} = p$. Jadi, persamaan parabola adalah $(x-2)^2 = 4p(y-3)$

$$(x-2)^2 = 4 \cdot \frac{1}{4} (y-3)$$

$$y = x^2 - 4x + 7.$$

- b. Karena persamaan direktriks adalah $y = 1$, maka $n - p = 1$, dan titik fokus terletak pada titik $F(-3, 7)$, maka $m = -3$ dan $n + p = 7$.

Substitusikan $n - p = 1$ atau $p = n - 1$ ke persamaan $n + p = 7$, diperoleh

$$\begin{aligned}n + p &= 7 \\n + (n - 1) &= 7 \\n &= 4\end{aligned}$$

Dengan menyubstitusikan $n = 4$ ke persamaan $p = n - 1 = 4 - 1 = 3$.

Jadi, persamaan parabola adalah

$$\begin{aligned}(x + m)^2 &= 4p(y - n) \\(x + 3)^2 &= 4(3)(y - 4) \\12y &= x^2 + 6x - 54.\end{aligned}$$

- c. Pada soal diketahui bahwa titik fokus di $(3, 0)$, ini berarti bahwa $p = 3$. Selain itu persamaan direktriks diketahui $x = -3$, sehingga titik puncak $= \left(\frac{-3+3}{2}, 0\right) = (0, 0)$ dan sumbu simetrinya adalah sumbu X ($y = 0$).

Jadi, persamaan parabolanya adalah $y^2 = -12x$.

2. Tentukan unsur-unsur parabola seperti titik fokus, persamaan garis direktriks, dan puncak dari persamaan parabola berikut

- $x^2 = -24y$.
- $y^2 - 16x = 0$.

Alternatif Penyelesaian

- Pada persamaan parabola $x^2 = -24y$, maka dapat dinyatakan dengan $x^2 = 4(-6)y$, sehingga titik puncak parabola berada pada $(0, 0)$, dengan titik fokus terletak pada $(0, -6)$, persamaan garis direktriksnya adalah $y = -6$, dan panjang *latus rectum* sebesar $4p = 4(6) = 12$.
- Pada persamaan parabola $y^2 - 16x = 0$, maka dapat dinyatakan dengan $y^2 = 16x$ atau $y^2 = 4(4)x$, sehingga titik puncak parabola berada pada titik $(0, 0)$, dengan titik fokus terletak pada titik $(0, 4)$, persamaan garis direktriksnya adalah $y = 4$, dan panjang *latus rectum* sebesar $4p = 4(4) = 16$.

3. Sebuah reflektor lampu sorot berbentuk parabola memiliki diameter 120 cm. Lampu sorot ditempatkan sebagai fokus reflektor parabola tersebut. Tentukan kedalaman reflektor lampu sorot berbentuk parabola tersebut jika penempatan lampu sorot adalah 12 cm di atas titik pusat! Tentukan persamaan yang digunakan oleh teknisi dalam membuat reflektor lampu sorot tersebut!

Alternatif Penyelesaian

Posisi bola lampu yang tepat adalah titik fokus reflektor lampu sorot, jadi titik fokusnya adalah 12 cm di atas titik pusat. Jika dianggap penampang dari reflektor lampu sorot berbentuk parabola vertikal terbuka ke atas dengan titik pusat $(0,0)$, maka koordinat titik fokusnya adalah $(0,12)$. Artinya, telah diperoleh $p = 12$, sehingga persamaan dari parabola yang dimaksud adalah

$$x^2 = 4(12)y \text{ atau } x^2 = 48y.$$

Karena diameter reflektornya 120 cm, maka kedalaman dari reflektor lampu sorot dapat ditentukan dengan menyelesaikan nilai y untuk x sama dengan jari-jari, yaitu $x = \frac{120}{2} = 60$, sehingga

$$x^2 = 48y.$$

$$60^2 = 48y.$$

$$y = 75.$$

4. Sebuah roket air diluncurkan ke udara dan lintasan roket tersebut membentuk parabola. Diperkirakan ketinggian maksimum roket air mencapai 10 meter dan jarak lokasi pendaratan roket air adalah 3 meter dari lokasi awal peluncuran. Tentukan persamaan parabola untuk pemodelan lintasan roket air tersebut dan ketinggian roket air ketika jarak horizontal roket air 1 meter dari lokasi peluncuran!

Alternatif Penyelesaian

Untuk memudahkan dalam membuat model lintasan kembang api, guru dapat membuat kurva lintasan seperti pada Gambar 1.11. Puncak lintasan kembang api berada pada koordinat $(1\frac{1}{2}, 10)$, sehingga persamaan parabola yang menggambarkan lintasan kembang api adalah $(x - m)^2 = 4p(y - n)$.

$$(x - 1,5)^2 = 4p(y - 10).$$

Untuk menentukan p , dapat diambil satu titik sembarang pada lintasan kembang api misalkan titik tersebut adalah titik awal lintasan kembang api yaitu $O(0,0)$, sehingga parabola memenuhi persamaan $(x - 1,5)^2 = 4p(y - 10)$.

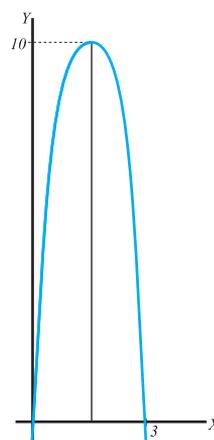
$$(0 - 1,5)^2 = 4p(0 - 10).$$

$$p = -\frac{2,25}{40}.$$

Jadi, persamaan parabola yang menggambarkan lintasan kembang api adalah $(x - 1,5)^2 = 4p(y - 10)$.

$$(x - 1,5)^2 = 4\left(-\frac{2,25}{40}\right)(y - 10).$$

$$(x - 1,5)^2 = -0,9(y - 10).$$



Gambar 1.11. Kurva Lintasan Kembang Api

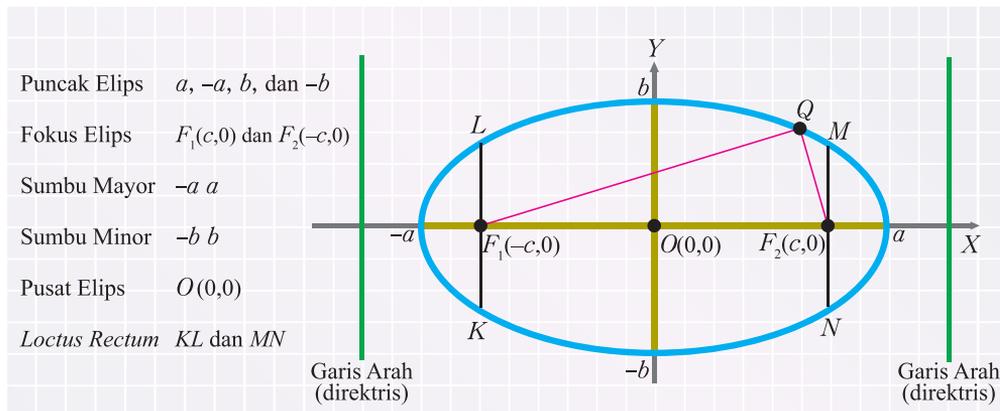
Untuk menentukan ketinggian kembang api, saat kembang api dengan jarak horizontal 1 meter, dapat dilakukan dengan menyubstitusikan $x = 1$ pada persamaan parabola, sehingga $(1-1,5)^2 = -0,225(y-10)$.

$$(-0,5)^2 = -0,225y + 2,25.$$

$$y = 8,89.$$

Jadi, ketinggian kembang saat jarak horizontal 1 meter adalah 8,89 meter.

2. Elips



Gambar 1.12. Gambar Unsur-Unsur Elips

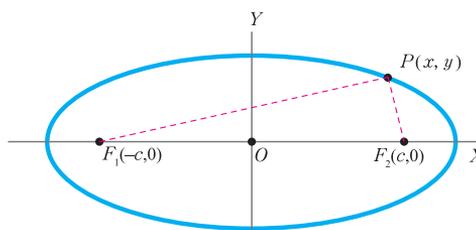
Pada saat mempelajari materi elips, guru dapat mengawali dengan memberikan pertanyaan definisi elips. Dengan menggunakan Gambar 1.12, guru dapat menceritakan unsur-unsur elips. Adapun unsur-unsur elips adalah sebagai berikut:

1. Pada elips terdapat dua sumbu yaitu sumbu utama (pada Gambar 1.28 adalah garis terletak pada sumbu X) dan sumbu sekawan (pada Gambar 1.28 adalah garis terletak sumbu Y);
2. Titik fokus elips pada Gambar 1.28 titik $f_1(-c,0)$ dan $f_2(c,0)$;
3. Titik pusat elips adalah titik tengah kedua fokus elips, pada Gambar 1.28 adalah titik tengah antara $f_1(-c,0)$ dan $f_2(c,0)$ yaitu titik $O(0,0)$;
4. Sumbu fokal (*focal axis*) adalah garis lurus yang menghubungkan kedua titik fokus elips, pada Gambar 1.28 yaitu garis f_1f_2 ;
5. Titik puncak elips adalah dua titik pada perpanjangan sumbu fokus yang membentuk elips, pada Gambar 1.28 yaitu $a, -a, b,$ dan $-b$;
6. Sumbu mayor merupakan sebuah sumbu yang melalui dua titik fokus dan lebih panjang dari sumbu minor, pada Gambar 1.28 adalah sumbu $-aa$;
7. Sumbu minor, yaitu garis lurus melalui pusat elips dan tegak lurus sumbu mayor. Sumbu minor lebih pendek jika dibandingkan dengan sumbu mayor, pada Gambar 1.28 merupakan ruas garis $-bb$;

8. *Latus rectum* adalah garis yang melalui salah satu titik fokus dan tegak lurus dengan sumbu mayor. Pada Gambar 1.28 adalah garis KL dan MN . Panjang latus rectum adalah $|KL| = |MN| = \frac{2b^2}{a}$, dengan koordinat titik $K(-c, -\frac{b^2}{a})$, $L(-c, \frac{b^2}{a})$, $M(c, \frac{b^2}{a})$, dan $N(c, -\frac{b^2}{a})$.

Pada bagian menentukan persamaan elips, guru dapat menggunakan contoh menentukan persamaan elips dengan pusat $O(0,0)$ dan sumbu simetri adalah sumbu Y . Guru dapat menggunakan Gambar 1.13 untuk menentukan persamaan elips.

Perhatikan Dari Gambar 1.13, dapat ditunjukkan bahwa titik fokus $F_1(-c,0)$, titik fokus $F_2(c,0)$, sumbu mayor terletak pada sumbu X , pusat elips terletak pada $O(0,0)$, dan jumlah jarak titik sembarang $P(x,y)$ terhadap kedua titik fokus sama dengan $2a$. Karena titik $P(x,y)$ terletak pada elips, sehingga diperoleh



Gambar 1.13. Elips dengan Pusat $O(0,0)$ dan Sumbu Mayor adalah Sumbu X

$$F_1P + F_2P = 2a.$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a.$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Dengan mengkuadratkan persamaan tersebut, diperoleh

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2.$$

$$x^2 - 2cx + c^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2.$$

$$cx + a^2 = a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Kuadratkan kembali persamaan ini, maka diperoleh

$$c^2x^2 + 2a^2cx + a^4 = a^2((x+c)^2 + y^2).$$

$$c^2x^2 + 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2.$$

$$c^2x^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2.$$

$$a^2(a^2 - c^2) = x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2.$$

Karena $(a^2 - c^2)$ nilainya selalu tetap, misalkan $(a^2 - c^2) = b^2$ untuk $a > b$, maka $a^2b^2 = x^2b^2 + a^2y^2$ atau dapat pula ditulis dengan $x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

Selanjutnya, persamaan tersebut kalian bagi dengan a^2b^2 , sehingga menjadi

$$\frac{x^2 b^2}{a^2 b^2} + \frac{a^2 y^2}{a^2 b^2} = \frac{a^2 b^2}{a^2 b^2} \cdot$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Persamaan elips berbentuk $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ atau $x^2 b^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ disebut dengan Persamaan Elips Bentuk Baku

Dari persamaan elips yang telah diperoleh, guru dapat menyampaikan bahwa unsur elips yang lainnya adalah:

1. Fokus elips adalah $(\pm c, 0)$ dengan $c^2 = a^2 - b^2$;
2. Titik puncak elips $(\pm a, 0)$;
3. Panjang sumbu mayor adalah $2a$, sedangkan panjang sumbu minor adalah $2b$;
4. Eksentrisitas (e) adalah suatu ukuran untuk menentukan seberapa melengkungnya sebuah elips; untuk menentukan eksentrisitas dapat dilakukan dengan cara $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$
5. Persamaan garis direktriksnya adalah $l \equiv x = \frac{a^2}{e}$ dan $l' \equiv x = -\frac{a^2}{e}$.
6. Panjang *latus rectum* $l = \frac{2b^2}{a}$.



Ayo Berdiskusi

Pada aktivitas ini, guru diharapkan dapat mengajak peserta didik untuk berani menyampaikan pendapatnya, bekerja sama, dan menghargai pendapat sesama teman. Guru membagi kelas menjadi tiga kelompok. Kelompok pertama, peserta didik diminta untuk menunjukkan persamaan elips dengan pusat di $O(0,0)$ dan sumbu mayor terletak pada sumbu Y , beserta unsur elips tersebut. Kelompok kedua diminta untuk menunjukkan persamaan elips dengan pusat di $P(a,b)$ dan sumbu mayornya sejajar sumbu X , beserta unsur elips. Kelompok ketiga diminta untuk menunjukkan persamaan elips dengan pusat di $P(a,b)$ dan sumbu mayornya sejajar sumbu Y , beserta unsur elips.

Apabila peserta didik mengalami kesulitan untuk menunjukkan persamaan elips sesuai dengan tugas kelompok, guru dapat memberikan pembimbingan dengan menjelaskan proses menunjukkan persamaan elips.

Guru dapat memberikan pertanyaan pemantik kepada peserta didik, apabila elips berada pada pusat selain $O(0,0)$ dan sumbu mayornya sejajar dengan sumbu X . Contoh pertanyaan pemantiknya seperti “Jika pusat elips berada (m,n) , kira-kira fokus elips berada dimana?”. Pertanyaan-pertanyaan pemantik dilakukan oleh

guru untuk mengingatkan peserta didik pada unsur elips dengan pusat $O(0,0)$ dan sumbu mayornya sejajar sumbu X . Setelah selesai tanya jawab dengan peserta didik, guru dapat memberikan jawaban dari persamaan elips dengan pusat $P(m,n)$ dan sumbu mayornya sejajar sumbu X , yaitu

$$\frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1.$$

atau dapat dinyatakan dengan $b^2(x-m)^2 + a^2(y-n)^2 = a^2b^2$.

Adapun unsur unsur pembentukan elips dengan pusat (m,n) dan sumbu mayornya sejajar sumbu X , adalah:

1. Fokus elips adalah $(m \pm c, n)$;
2. Pusat elips terletak pada titik pusat koordinat di (m, n) ;
3. Puncak elips adalah titik $(m \pm a, n)$;
4. Untuk eksentrisitas, persamaan garis direktriks dan panjang *latus rectum* sama dengan elips elips dengan pusat $O(0,0)$ dan sumbu mayornya sejajar sumbu X .

Untuk menentukan persamaan elips dengan puncak $O(0,0)$ dan sumbu mayornya adalah sumbu Y , dapat digunakan Gambar 1.14.

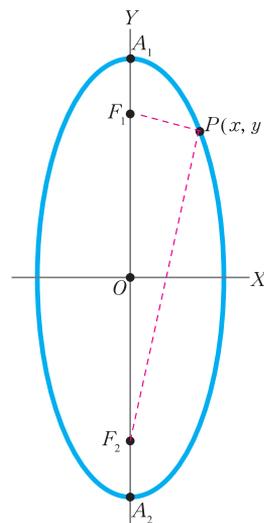
Pada Gambar 1.14, diperoleh bahwa titik fokus $F_1(0,c)$, titik fokus $F_2(0,-c)$, sumbu mayor terletak pada sumbu Y , pusat elips terletak pada $O(0,0)$, dan jumlah jarak titik sembarang $P(x,y)$ terhadap kedua titik fokus sama dengan $2a$.

Karena titik $P(x,y)$ terletak pada elips, sehingga diperoleh

$$F_1P + F_2P = 2a.$$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-c)^2} + \sqrt{(x-0)^2 + (y+c)^2} = 2a.$$

$$\sqrt{x^2 + (y-c)^2} = 2a - \sqrt{x^2 + (y+c)^2}.$$



Dengan mengkuadratkan persamaan tersebut, **Gambar 1.14.** Elips dengan Pusat $O(0,0)$ dan Sumbu Mayor adalah Sumbu Y

$$x^2 + (y-c)^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 + (y+c)^2} + x^2 + (y+c)^2.$$

$$x^2 + y^2 - 2cy + c^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 + (y+c)^2} + x^2 + y^2 + 2cy + c^2.$$

$$cy + a^2 = a\sqrt{x^2 + (y+c)^2}.$$

Kuadratkan kembali persamaan ini, maka diperoleh

$$c^2y^2 + 2a^2cy + a^4 = a^2(x^2 + (y + c)^2).$$

$$c^2y^2 + 2a^2cy + a^4 = a^2x^2 + 2a^2yc + a^2c^2 + a^2y^2.$$

$$a^2(a^2 - c^2) = x^2a^2 + y^2(a^2 - c^2).$$

Karena $(a^2 - c^2)$ nilainya selalu tetap, misalkan $(a^2 - c^2) = b^2$ untuk $a > b$, maka $a^2b^2 = x^2a^2 + y^2b^2$. Selanjutnya, persamaan $a^2b^2 = x^2a^2 + y^2b^2$ dibagi dengan a^2b^2 , sehingga menjadi $\frac{x^2a^2}{a^2b^2} + \frac{y^2b^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$.

Jadi, persamaan elips dengan pusat $O(0,0)$ dan sumbu mayornya adalah sumbu X adalah $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$.

Guru dapat memberikan pertanyaan lain seperti, apabila elips berada pada pusat selain $O(0,0)$ dan sumbu mayornya sejajar dengan sumbu Y . Guru dapat memberikan pertanyaan pemantik seperti “Jika pusat elips berada (m,n) , kira kira fokus elips berada dimana?”. Pertanyaan-pertanyaan pemantik dilakukan oleh guru untuk mengingatkan peserta didik pada unsur elips dengan pusat $O(0,0)$ dan sumbu mayornya sejajar sumbu Y . Pada akhir memberikan pertanyaan tanya jawab, guru dapat memberikan persamaan elips dengan pusat $P(m,n)$ dan sumbu mayornya sejajar sumbu X , yaitu

$$\frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1$$

Atau dapat dinyatakan dengan $b^2(x-m)^2 + a^2(y-n)^2 = a^2b^2$

Adapun unsur unsur pembentukan elips dengan pusat (m,n) dan sumbu mayornya sejajar sumbu Y , adalah:

- Fokus elips adalah $(0, \pm c)$ dengan $c^2 = a^2 - b^2$;
- Pusat elips terletak pada titik pusat koordinat yaitu $o(0,0)$;
- Puncak elips adalah titik $(0, \pm a)$;
- Panjang sumbu mayor adalah $2a$, sedangkan panjang sumbu minor adalah $2b$;
- Eksentrisitas $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$;
- Persamaan garis direktriksnya adalah $l \equiv y = \frac{a^2}{e}$ dan $l' \equiv y = -\frac{a^2}{e}$;
- Panjang *latus rectum* $L = \frac{2b^2}{a}$.

Agar peserta didik dapat memahami materi persamaan elips, guru dapat memberikan alternatif Contoh Soal 1.21 hingga Contoh Soal 1.24 yang ada pada Buku Siswa. Guru diperbolehkan menggunakan model contoh soal lain yang sejenis untuk memberikan penjelasan kepada peserta didik terkait dengan persamaan parabola.



Pada kegiatan ini, peserta didik diminta untuk menyelesaikan permasalahan yang ada di Latihan Soal 1.7. Disediakan alternatif penyelesaian bagi guru.

Latihan Soal 1.7

1. Tentukan fokus dan pusat elips jika persamaannya adalah

a. $9x^2 + 25y^2 - 18x + 100y - 116 = 0$.

b. $9x^2 + 25y^2 - 36x + 50y - 164 = 0$.

Alternatif Penyelesaian

a. Persamaan elips $9x^2 + 25y^2 - 18x + 100y - 116 = 0$ diubah menjadi persamaan elips bentuk baku, sehingga diperoleh $9(x^2 - 2x) + 25(y^2 + 4y) = 116$.

$$9(x - 1)^2 + 25(y + 2)^2 = 116 + 9 + 100.$$

$$\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1.$$

Dari persamaan elips ini diperoleh bahwa $a^2 = 25$ atau $a = 5$, $b^2 = 9$ atau $b = 3$, $m = 1$ dan $n = -2$, sehingga pusat elips di titik $(1, -2)$.

Dengan menyubstitusikan $a = 5$ dan $b = 3$ ke $c^2 = a^2 - b^2$ diperoleh $c = \sqrt{25 - 9} = 4$. Maka titik fokus elips berada di $F_1(m+c, n)$ atau $F_1(5, -2)$ dan $F_2(m-c, n)$ atau $F_2(-3, -2)$.

Jadi, persamaan elips $9x^2 + 25y^2 - 18x + 100y - 116 = 0$ memiliki pusat di $(1, -2)$, dan titik fokus di $F_1(5, -2)$ dan $F_2(-3, -2)$.

b. Dengan cara yang sama pada bagian a, diperoleh bahwa $a = 5$, $b = 3$, $m = 2$ dan $n = -1$, sehingga pusat elips di titik $(2, -1)$. Selain itu fokus elips berada di titik $F_1(6, -1)$ dan $F_2(-2, -1)$.

2. Tentukan persamaan elips jika diketahui

a. titik fokus $(0, \pm 6)$ dan puncak $(0, \pm 7)$.

b. titik puncak $(\pm 5, 0)$ dan *latus rectum* $\frac{4}{5}$.

c. titik fokus pada $(1, -1)$ dan $(1, -3)$ serta menyinggung sumbu y .

d. pusat di $(-1, 4)$, salah satu fokusnya adalah $(-1, 1)$, serta melalui titik $(0, 8)$.

Alternatif Penyelesaian

a. Karena titik fokus dan titik puncak terletak pada absis 0, maka persamaan elips yang digunakan adalah $\frac{(x - m)^2}{a^2} + \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1$,

Dari titik fokus $(0,6)$ dan $(0,-6)$, maka $m = 0$, dan $c = 6$.

Dari titik puncak $(0,7)$ dan $(0,-7)$ maka $m = 0$ dan $a = 7$.

Untuk menentukan b , substitusikan $a = 7$ dan $c = 6$ ke persamaan $b^2 = a^2 - c^2$, diperoleh $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{7^2 - 6^2} = \sqrt{49 - 36} = 3$.

Jadi, persamaan elipsnya adalah $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{9} = 1$.

b. Karena titik puncak berada pada $(5,0)$ dan $(-5,0)$ maka $a = 5$.

Karena panjang *latus rectum* adalah $\frac{4}{5}$, maka $\frac{2b^2}{a} = \frac{4}{5}$.

$$10b^2 = 4a.$$

Substitusikan $a = 5$ ke persamaan $10b^2 = 4a$, diperoleh

$$10b^2 = 4(5).$$

$$b^2 = 2.$$

Jadi, persamaan elipsnya adalah $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{2} = 1$.

c. Titik fokus pada $(1,-1)$ dan $(1,-3)$ serta menyinggung sumbu Y .

Karena titik fokus terletak pada $(1,-1)$ dan $(1,-3)$ maka pusat elips terletak pada $(1, \frac{-3+(-1)}{2}) = (1,-2)$, sehingga persamaan elips memenuhi $\frac{(x-1)^2}{b^2} + \frac{(y+2)^2}{a^2} = 1$.

Karena elips memiliki titik fokus $(1,-1)$ dan $(1,-3)$, memenuhi $n-c = -1$ dan $n+c = -3$. Dengan menggunakan eliminasi dan substitusi pada dua persamaan ini, diperoleh bahwa $n = -2$ dan $c = 1$.

Karena elips menyinggung sumbu Y , maka nilai b adalah jarak dari pusat elips ke sumbu Y yang senilai dengan absis yaitu $b = 1$.

Dengan menyubsitusikan $b = 1$ dan $c = 1$, ke $a^2 = b^2 + c^2$, diperoleh bahwa $a^2 = 2$. Jadi, persamaan elips dengan titik fokus pada $(1,-1)$ dan $(1,-3)$ serta menyinggung sumbu Y adalah $\frac{(x-1)^2}{1} + \frac{(y+2)^2}{2} = 1$.

d. Pusat di $(4,-1)$, salah satu titik fokus adalah $(1,-1)$, serta melalui titik $(8,0)$.

Elips dengan pusat $(4,-1)$ memiliki persamaan $\frac{(x-4)^2}{a^2} + \frac{(y+1)^2}{b^2} = 1$.

Karena pusat $(4,-1)$ dan titik fokus $(1,-1)$, maka $c = 4-1 = 3$. Dengan menyubsitusikan $c = 3$ ke $a^2 = b^2 + c^2$, diperoleh $a^2 = b^2 + 9$.

Karena elips melalui titik $(8,0)$ maka berlaku

$$\frac{(8-4)^2}{a^2} + \frac{(0+1)^2}{b^2} = 1.$$

$$\frac{16}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1.$$

Dengan menyubsitusikan $a^2 = b^2 + 9$ ke persamaan $\frac{16}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$, diperoleh

$$\frac{16}{b^2+9} + \frac{1}{b^2} = 1.$$

$$b^4 - 8b^2 - 9 = 0.$$

$$(b^2 - 9)(b^2 + 1) = 0.$$

sehingga $b^2 = 9$ atau $b^2 = -1$. Karena nilai b harus positif maka nilai b yang memenuhi syarat adalah $b^2 = 9$ atau $b = 3$. Dengan menyubstitusikan $b = 3$ ke persamaan $a^2 = b^2 + 9$, diperoleh bahwa $a^2 = 18$.

Jadi, persamaan elips dengan pusat di $(4, -1)$, salah satu titik fokusnya $(1, -1)$, dan melalui titik $(8, 0)$ adalah $\frac{(x-4)^2}{18} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$.

3. Jika eksentrisitas suatu elips adalah $\frac{12}{13}$ dan jarak antara dua titik fokusnya adalah 36, tentukan persamaan elips tersebut!

Alternatif Penyelesaian

Diketahui pada soal eksentrisitas elips sebesar $\frac{12}{13}$, maka $e = \frac{12}{13}$. Jarak dua titik fokus adalah 36, maka $2c = 36$ atau $c = 18$. Dengan menyubstitusikan $c = 18$ dan $e = \frac{12}{13}$ ke rumus eksentrisitas $e = \frac{c}{a}$, diperoleh $\frac{12}{13} = \frac{18}{a}$ atau $a = \frac{(18)(13)}{12} = 19,5$.

Dengan menyubstitusikan $a = 19,5$ dan $c = 18$ ke rumus $a^2 = b^2 + c^2$, diperoleh

$$b^2 = a^2 - c^2 = (19,5)^2 - (18)^2 = 56,25 \text{ atau } b = 7,5.$$

Jadi, persamaan elips dengan eksentrisitas sebesar $\frac{12}{13}$ dan jarak antara dua titik fokus 36 adalah $\frac{x}{(19,75)^2} + \frac{y}{(7,5)^2} = 1$

4. Diketahui koordinat titik fokus suatu elips adalah $F_1(8, -1)$ dan $F_2(-4, -1)$ serta salah satu koordinat ujung sumbu minornya adalah $(2, 7)$. Tentukan persamaan elips tersebut!

Alternatif Penyelesaian

Karena titik fokus elips pada $F_1(8, -1)$ dan $F_2(-4, -1)$, maka elips memiliki sumbu mayor sejajar sumbu Y .

Titik fokus $F_1(8, -1)$, maka $m + c = 8$ dan $n = -1$.

Titik fokus $F_2(-4, -1)$, maka $m - c = -4$ dan $n = -1$.

Dengan melakukan eliminasi dan substitusi pada persamaan $m + c = 8$ dan $m - c = -4$, diperoleh bahwa $m = 2$ dan $c = 6$, sehingga pusat elips terletak pada titik $(2, -1)$. Maka persamaan elips dengan titik pusat $(2, -1)$ memenuhi $\frac{(x-2)^2}{a^2} + \frac{(y+1)^2}{b^2} = 1$.

Salah satu koordinat ujung sumbu minornya adalah $(2, 7)$, maka $m = 2$ dan $b + n = 7$.

Dengan menyubstitusikan $n = -1$ ke persamaan $b + n = 7$, diperoleh bahwa $b = 8$.

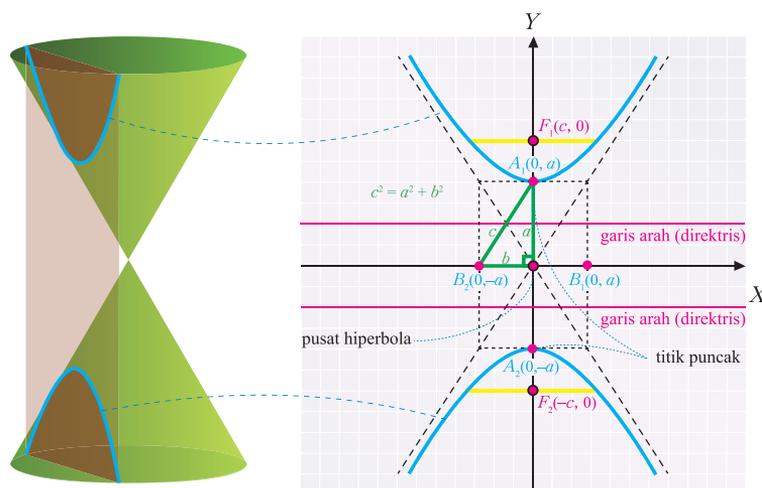
Dengan menyubstitusikan $b = 8$ dan $c = 6$, ke rumus $a^2 = b^2 + c^2$, diperoleh

$$a^2 = (8)^2 + (6)^2 = 100.$$

Jadi, persamaan elips dengan $F_1(8, -1)$ dan $F_2(-4, -1)$ serta salah satu titik ujung sumbu minornya $(2, 7)$ adalah $\frac{(x-2)^2}{100} + \frac{(y+1)^2}{64} = 1$

3. Hiperbola

Sebelum menyampaikan materi tentang hiperbola, guru dapat memberikan tes diagnostik kognitif yang berkaitan dengan hiperbola seperti jarak dua titik. Setelah memberikan pertanyaan diagnostik, guru dapat memberikan definisi hiperbola yaitu sebuah kurva yang dibentuk oleh perpotongan dua kerucut yang berlawanan dan bidang yang memotong setengah dari kerucut tersebut. Hiperbola merupakan tempat lintasan titik-titik dengan eksentrisitasnya lebih besar dari satu. Selain itu, ada definisi lain yang menyatakan bahwa hiperbola adalah himpunan titik-titik yang jarak antara dua titik tertentu pada bidang selalu sama.



Gambar 1.15. Unsur-Unsur Pada Hiperbola

Dengan menggunakan Gambar 1.15, guru dapat mendeskripsikan unsur-unsur hiperbola. Adapun unsur-unsur hiperbola di antaranya adalah sebagai berikut:

- Garis yang melalui kedua fokus disebut dengan sumbu utama atau sumbu mayor;
- Garis yang melalui pertengahan serta tegak lurus dengan sumbu mayor disebut sumbu sekawan (sumbu konjugasi) atau sumbu minor;
- Titik potong kedua sumbu tersebut disebut pusat hiperbola;
- Puncak hiperbola adalah titik potong kurva hiperbola dengan sumbu utama;
- Hiperbola mirip dengan parabola, bedanya parabola hanya terdiri atas satu kurva, sedangkan hiperbola terdiri dari dua kurva, yang masing-masing kurva disebut cabang;
- Suatu hiperbola memiliki dua buah asimtot hiperbola berupa garis lengkung. Asimtot merupakan garis lurus yang makin lama semakin didekati oleh garis lengkung (kurva hiperbola), tetapi garis lurus dan kurva tidak pernah berpotongan di suatu titik.

Pada bagian menentukan persamaan parabola, guru dapat menggunakan contoh menentukan persamaan parabola dengan pusat $O(0,0)$ dan titik fokus terletak pada sumbu X . Guru dapat menggunakan Gambar 1.16 untuk menjelaskan proses menentukan persamaan hiperbola dengan pusat $O(0,0)$ dan titik fokus terletak pada sumbu X .

Ambil sebarang titik $P(x,y)$ yang terletak pada hiperbola, berdasarkan definisi hiperbola, selisih jarak P ke F_2 dengan P ke F_1 selalu sama yaitu $2a$, sehingga

$$|F_2P| - |F_1P| = 2a.$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a.$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Kuadratkan kedua ruas, sehingga diperoleh:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2.$$

$$cx - a^2 = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Kuadratkan kedua ruas, sehingga diperoleh:

$$(cx + a)^2 = (a\sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2.$$

$$(c^2 + a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Karena $a^2 > 0$ dan $c^2 - a^2 > 0$, maka dapat dibagi persamaan ini dengan $a^2(c^2 - a^2)$, sehingga diperoleh

$$\frac{(c^2 + a^2)x^2}{a^2(c^2 - a^2)} - \frac{a^2y^2}{a^2(c^2 - a^2)} = \frac{a^2(c^2 - a^2)}{a^2(c^2 - a^2)}.$$

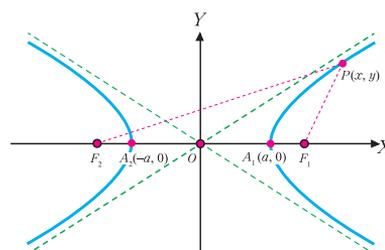
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{(c^2 - a^2)} = 1.$$

Karena $c^2 - a^2 > 0$ dan $c^2 - a^2 = b^2$ maka $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Persamaan inilah yang disebut dengan persamaan hiperbola dengan pusat $O(0,0)$ dan titik fokus terletak di sumbu X .

Beberapa sifat dari hiperbola dengan pusat $O(0,0)$ dan titik fokus terletak di sumbu X , di antaranya adalah sebagai berikut:

- Titik fokus berada pada $(\pm c, 0)$, puncak berada pada $(\pm a, 0)$;
- Pusat hiperbola merupakan sebuah titik di pertengahan titik fokus dan terletak pada sumbu fokal. Pada gambar 1.35, Pusat hiperbola terletak pada $O(0,0)$;
- Sumbu utama adalah sumbu X , dengan panjang sumbu mayor adalah $2a$;
- Sumbu sekawan merupakan garis yang tegak lurus dengan sumbu utama dan melalui pusat hiperbola. Pada gambar 1.35, Yang menjadi sumbu utama adalah sumbu Y ;
- Nilai ekentrisitas $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$;

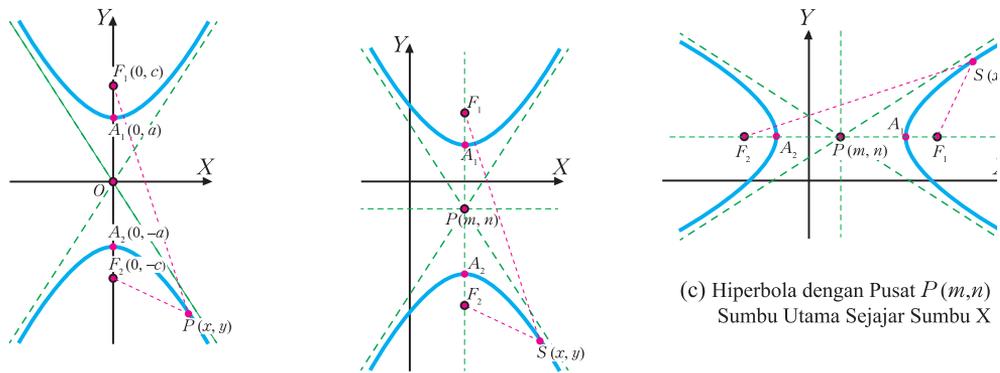


Gambar 1.16. Hiperbola dengan Pusat $O(0,0)$ dengan Fokus pada sumbu X

- f. Persamaan asimtot adalah $y = \pm \frac{b}{a} x$;
 g. Persamaan direktris $x = \pm \frac{a^2}{c}$;
 h. *Latus rectum* adalah $\frac{2b^2}{a}$.



Pada aktivitas ini, guru diharapkan dapat mengajak peserta didik untuk berani menyampaikan pendapatnya dan bekerja sama. Guru membagi peserta didik menjadi tiga kelompok diskusi. Setiap kelompok diskusi diberikan tugas yang berbeda untuk menentukan persamaan hiperbola. Kelompok pertama diberikan tugas mendiskusikan tentang penentuan persamaan hiperbola dengan pusat $O(0,0)$ dan titik fokus terletak pada sumbu Y adalah $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ atau $b^2y^2 - a^2x^2 = a^2b^2$. Kelompok kedua diberikan tugas mendiskusikan tentang penentuan persamaan hiperbola dengan pusat $P(m,n)$ dan sumbu utama sejajar sumbu X adalah $\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$ atau $b^2(x-m)^2 - a^2(y-n)^2 = a^2b^2$. Kelompok ketiga diberikan tugas mendiskusikan tentang penentuan persamaan hiperbola dengan pusat $P(m,n)$ dan sumbu utama sejajar sumbu Y adalah $\frac{(y-n)^2}{a^2} - \frac{(x-m)^2}{b^2} = 1$ atau $b^2(y-n)^2 - a^2(x-m)^2 = a^2b^2$. Untuk mendiskusikan hal ini, guru dapat menggunakan bantuan Gambar 1.17.



(a) Hiperbola dengan pusat $O(0,0)$ dengan titik fokus pada sumbu Y

(b) Hiperbola dengan Pusat $P(m,n)$ dengan Sumbu Utama Sejajar Sumbu Y

(c) Hiperbola dengan Pusat $P(m,n)$ Sumbu Utama Sejajar Sumbu X

Gambar 1.17. Kurva Hiperbola Untuk Bahan Diskusi

Apabila peserta didik mengalami kesulitan untuk menunjukkan persamaan hiperbola, guru dapat memberikan bimbingan dengan menjelaskan proses menunjukkan persamaan hiperbola.

Persamaan hiperbola dengan pusat $O(0,0)$ dan titik fokus terletak pada sumbu Y .

Pada Gambar 1.17 bagian (a) diperoleh bahwa pusat koordinat $O(0,0)$, F adalah titik fokus hiperbola dengan koordinat $F_1(0,c)$ dan $F_2(0,-c)$, titik puncak hiperbola pada $A_1(0,a)$ dan $A_2(0,-a)$. Ambil sembarang titik $P(x,-y)$ yang terletak pada hiperbola. Berdasarkan definisi hiperbola yang menyatakan bahwa selisih jarak P ke F_2 dengan P ke F_1 selalu sama yaitu $2a$, maka diperoleh bahwa $|F_2P| - |F_1P| = 2a$.

$$\sqrt{(x+0)^2 + (y+c)^2} - \sqrt{(x-0)^2 + (y-c)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+0)^2 + (y+c)^2} = 2a + \sqrt{(x-0)^2 + (y-c)^2}$$

Kuadratkan kembali persamaan ini, maka diperoleh:

$$x^2 + (y+c)^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{x^2 + (y-c)^2} + x^2 + (y-c)^2$$

$$(y+c)^2 - (y-c)^2 - 4a^2 = 4a\sqrt{x^2 + (y-c)^2}$$

$$4cy - 4a^2 = 4a\sqrt{x^2 + (y-c)^2}$$

$$cy - a^2 = a\sqrt{x^2 + (y-c)^2}$$

Kuadratkan kembali persamaan ini, maka diperoleh:

$$(cy - a^2)^2 = (a\sqrt{x^2 + (y-c)^2})^2$$

$$c^2y^2 + 2a^2cy + a^4 = a^2(x^2 + y^2 - 2cy + c^2)$$

$$c^2y^2 + 2a^2cy + a^4 = a^2x^2 + a^2y^2 - 2ca^2y + a^2c^2$$

$$c^2y^2 - a^2y^2 - a^2x^2 = a^2c^2 - a^4$$

$$(c^2 - a^2)y^2 - a^2x^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Karena $a^2 > 0$ dan $c^2 - a^2 > 0$, maka dapat persamaan ini dapat dibagi dengan

$$a^2(c^2 - a^2), \text{ sehingga diperoleh } \frac{(c^2 - a^2)y^2}{a^2(c^2 - a^2)} - \frac{a^2x^2}{a^2(c^2 - a^2)} = \frac{a^2(c^2 - a^2)}{a^2(c^2 - a^2)}.$$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{(c^2 - a^2)} = 1.$$

Karena $c^2 - a^2 > 0$ dan $c^2 - a^2 = b^2$ maka $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

Beberapa sifat dari hiperbola dengan titik pusat $O(0,0)$ dan fokusnya terletak di sumbu Y , di antaranya adalah sebagai berikut:

- Titik fokus berada pada $(0, \pm c)$, titik puncak berada pada $(0, \pm a)$;
- Pusat hiperbola merupakan sebuah titik di pertengahan titik fokus dan terletak pada sumbu fokal. Pada gambar 1.17, Pusat hiperbola terletak pada $o(0,0)$;
- Sumbu utama (sumbu *transverse*) adalah sumbu Y , dengan panjang sumbu mayor adalah $2a$;
- Nilai eksentrisitas $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$;
- Persamaan asimtot adalah $y = \pm \frac{a}{b}x$; dan *latus rectum* adalah $\frac{2b^2}{a}$.

Persamaan hiperbola dengan pusat $P(m,n)$ dan sumbu utama sejajar sumbu X .

Pada Gambar 1.17 bagian (c) diperoleh bahwa pusat hiperbola di titik $P(m,n)$, dan sumbu utama sejajar sumbu X . Pada bagian sebelumnya, telah diperoleh persamaan hiperbola dengan pusat di $O(0,0)$ dan titik fokus terletak di sumbu X adalah $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Apabila pusat hiperbola $O(0,0)$ ditranslasikan sejauh $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$, maka diperoleh pusat hiperbola di titik $P(m,n)$, sumbu utama $x = m$ sejajar dengan sumbu X , serta sumbu sekawan $y = n$ sejajar dengan sumbu Y , sehingga persamaan hiperbolanya menjadi

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1.$$

Persamaan hiperbola dengan pusat $P(m,n)$ dan sumbu utama sejajar sumbu Y

Pada Gambar 1.17 bagian (b) diperoleh bahwa pusat hiperbola di titik $P(m,n)$, dan sumbu utama sejajar sumbu Y . Pada bagian sebelumnya, bahwa telah diperoleh persamaan hiperbola dengan pusat di $O(0,0)$ dan titik fokus terletak di sumbu Y adalah $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$. Apabila pusat hiperbola $O(0,0)$ ditranslasikan sejauh $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$, maka diperoleh pusat hiperbola di titik $P(m,n)$, sumbu utama $x = m$ sejajar dengan sumbu Y , serta sumbu sekawan $y = n$ sejajar dengan sumbu X , sehingga persamaan hiperbolanya menjadi

$$\frac{(x-m)^2}{b^2} - \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1.$$

Untuk memahami materi persamaan hiperbola, guru dapat menggunakan Contoh Soal 1.25, 1.26, 1.27, dan Latihan Soal Terbimbing 1.15 yang ada pada Buku Siswa. Guru diperkenankan untuk menggunakan contoh-contoh soal lain yang sejenis untuk membantu peserta didik memahami materi persamaan hiperbola.



Ayo Mencoba

Pada aktivitas Ayo Mencoba, guru dapat membimbing peserta didik untuk menyelesaikan Contoh Soal 1.25 bagian b dan Latihan Soal Terbimbing 1.15 dengan alternatif penyelesaian berikut.

Alternatif Penyelesaian bagian b pada Contoh Soal 1.25

Persamaan hiperbola $9y^2 - 16x^2 = 144$, diubah terlebih dahulu menjadi persamaan $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ atau berbentuk $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$, sehingga $\frac{9y^2}{144} - \frac{16x^2}{144} = 1$ dapat dinyatakan dalam $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$.

Dari persamaan parabola $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$, maka pusat hiperbola terletak di titik $O(0,0)$. Selain itu, nilai $a = 4$ dan $b = 3$, sehingga $c = \sqrt{16+9} = 5$.

Titik fokus pada $(-5,0)$ dan $(5,0)$, titik puncak pada $(-3,0)$ dan $(3,0)$, sumbu utama sejajar sumbu X dengan panjang 6, nilai eksentrisitas $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$, persamaan direktriks $x = \frac{9}{5}$ dan $x = -\frac{9}{5}$, panjang *latus rectum* adalah $\frac{2b^2}{a} = \frac{2(4)^2}{3} = \frac{32}{3}$, persamaan asimtotnya adalah $y = \frac{4}{3}x$ dan $y = -\frac{4}{3}x$.

Latihan Soal Terbimbing 1.14

Tentukan unsur-unsur hiperbola yang terdiri dari atas titik pusat, titik fokus, titik puncak, panjang sumbu utama dan asimtot untuk persamaan hiperbola $9x^2 - 4y^2 - 18x - 24y = -9$!

Alternatif Penyelesaian:

Persamaan hiperbola $9x^2 - 4y^2 - 18x - 24y = -9$, diubah terlebih dahulu menjadi bentuk baku, menjadi

$$9(x^2 - 2x) - 4(y^2 - 6y) = -9.$$

$$9(x^2 - 2x + 1) - 9 - 4(y^2 + 6y + 9) + 36 = -9.$$

$$9(x^2 - 2x + 1) - 4(y^2 + 6y + 9) + 27 = -9.$$

$$9(x - 1)^2 - 4(y + 3)^2 = -36.$$

$$\frac{4(y+3)^2}{36} - \frac{9(x-1)^2}{36} = 1.$$

$$\frac{(y+3)^2}{9} - \frac{(x-1)^2}{4} = 1$$

Dari persamaan elips ini diperoleh bahwa pusat elips terletak di titik $(1,-3)$, nilai $a = 2$ dan $b = 3$, sehingga $c = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$.

Titik fokus pada $(-\sqrt{13},3)$ dan $(\sqrt{13},3)$,

titik puncak pada $(3,3)$ dan $(-1,3)$,

sumbu utama sejajar sumbu X dengan panjang $2\sqrt{7}$,

nilai eksentrisitas $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{2}$,

persamaan direktriks $x = \frac{3}{\sqrt{13}}$ dan $x = -\frac{3}{\sqrt{13}}$,

panjang *latus rectum* adalah $\frac{2b^2}{a} = \frac{2(3)}{2} = 3$,

dan persamaan asimtotnya adalah $y = \frac{9}{\sqrt{13}}x$ dan $y = -\frac{9}{\sqrt{13}}x$.



Ayo Mencoba

Pada kegiatan ini, peserta didik diminta untuk menyelesaikan permasalahan yang ada di latihan 1.8. Telah disediakan alternatif penyelesaian bagi guru.

Latihan Soal 1.8

1. Tentukan titik pusat, titik fokus, titik puncak, jarak kedua fokus, dan persamaan asimtot dari hiperbola dengan persamaan
 - a. $4x^2 - 9y^2 = 36$.
 - b. $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y = 161$.

Alternatif Penyelesaian:

Menentukan titik pusat, titik fokus, titik puncak, jarak kedua titik fokus, dan persamaan asimtot dari hiperbola dengan persamaan.

- a. Persamaan hiperbola $4x^2 - 9y^2 = 36$. diubah terlebih dahulu menjadi bentuk baku, menjadi $\frac{4x^2}{36} - \frac{9y^2}{36} = 1$.

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

Dari persamaan ini diperoleh bahwa pusat hiperbola terletak di titik $(0,0)$, nilai $a = 3$ dan $b = 2$, sehingga $c = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$. Titik fokus pada $(-\sqrt{13},0)$ dan $(\sqrt{13},0)$, titik puncak pada $(3,0)$ dan $(-3,0)$, sumbu utama sejajar sumbu X dengan panjang $2(4) = 8$, dan persamaan asimtotnya adalah $y = \frac{16}{3}x$ dan $y = -\frac{16}{3}x$.

- b. Persamaan hiperbola $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y = 161$, dirubah terlebih dahulu dalam bentuk baku, menjadi $16(x^2 - 4x) - 9(y + 6y) = 161$.

$$16(x-2)^2 - 64 - 9(y+3)^2 + 81 = 161.$$

$$\frac{16(x-2)^2}{144} - \frac{9(y+3)^2}{144} = 1.$$

$$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+3)^2}{16} = 1.$$

Dari persamaan ini diperoleh bahwa pusat hiperbola terletak di titik $(2,-3)$, nilai $a = 3$ dan $b = 4$, sehingga $c = \sqrt{9+16} = 5$.

Titik fokus pada $(-5,0)$ dan $(5,0)$,

titik puncak pada $(5,-3)$ dan $(-1,-3)$,

sumbu utama sejajar sumbu X dengan panjang $2(4) = 8$,

dan persamaan asimtotnya adalah $y = \frac{16}{3}x$ dan $y = -\frac{16}{3}x$.

2. Tentukan persamaan hiperbola jika diketahui
 - a. titik pusat $O(0,0)$, Titik fokus $(8,0)$ dan $(-8,0)$, titik puncak pada $(6,0)$ dan $(-6,0)$.
 - b. titik puncak $(2,2)$ dan $(-8,2)$ serta asimtot $3x - 5y = 19$.
 - c. puncak $(7,3)$ dan $(-1,3)$ serta melalui $(8, \frac{1}{2})$.
 - d. hiperbola melalui $(1, \sqrt{3})$ dan asimtot $y = \pm 2x$.

Alternatif Penyelesaian:

- a. Karena hiperbola berada pada pusat $O(0,0)$ dan sumbu utama terletak pada sumbu X , maka persamaan hiperbola berbentuk $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Diketahui hiperbola memiliki titik fokus $(8,0)$ dan $(-8,0)$, maka

$$c = 8 \text{ atau } c^2 = 64.$$

Diketahui hiperbola memiliki titik puncak $(6,0)$ dan $(-6,0)$, maka

$$a = 6 \text{ atau } a^2 = 36.$$

Substitusikan $c^2 = 64$ dan $a^2 = 36$ ke rumus $c^2 = a^2 + b^2$, diperoleh

$$b^2 = c^2 - a^2 = 64 - 36 = 28.$$

Jadi, persamaan hiperbolanya adalah $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{28} = 1$.

- b. Titik puncak $(4,2)$ dan $(-2,2)$ serta salah satu asimtot $2x - 3y + 4 = 0$.

Hiperbola memiliki titik puncak $(m \pm a, q)$, sehingga $m + a = 4$ dan $m - a = -2$.

Dengan menggunakan eliminasi dan substitusi diperoleh bahwa

$$a = 3 \text{ dan } m = 1.$$

Hiperbola memiliki persamaan asimtot $y - n = \frac{b}{a}(x - m)$, dengan menyubstitusikan $m = 1$, $n = 2$, dan $a = 3$ diperoleh bahwa

$$y - 2 = \frac{b}{3}(x - 1).$$

$$3y - 6 = bx - b.$$

$$bx - 3y - b = 6.$$

Dengan membandingkan persamaan asimtot $2x - 3y + 4 = 0$ maka $b = 2$.

Jadi, persamaan hiperbolanya adalah $\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$.

- c. Hiperbola dengan titik puncak $(7,3)$ dan $(-1,3)$ maka hiperbola memiliki titik pusat (m,n) dan sumbu utama sejajar dengan sumbu X .

Hiperbola dengan titik puncak $(7,3)$ dan $(-1,3)$, maka $n = 3$, $m - a = 7$ dan $m + a = -1$. Dengan menggunakan substitusi dan eliminasi pada persamaan $m - a = 7$ dan $m + a = -1$ diperoleh bahwa $m = 3$ dan $a = 4$.

Telah diperoleh bahwa pusat hiperbola di $(3,3)$ dan $a = 4$, sehingga memenuhi persamaan hiperbola $\frac{(x-3)^2}{a^2} - \frac{(y-3)^2}{b^2} = 1$.

$$\frac{(x-3)^2}{16} - \frac{(y-3)^2}{b^2} = 1.$$

Karena hiperbola melalui titik $(8, 4\frac{1}{2})$, maka dengan menyubstitusikan $x = 8$ dan $y = 4\frac{1}{2}$ ke persamaan hiperbola $\frac{(x-3)^2}{16} - \frac{(y-3)^2}{b^2} = 1$, diperoleh

$$\frac{(8-3)^2}{16} - \frac{(4\frac{1}{2}-3)^2}{b^2} = 1.$$

$$25b^2 - 36 = 16b^2.$$

$b^2 = 4$. Jadi, persamaan hiperbolanya adalah $\frac{(8-3)^2}{16} - \frac{(y-3)^2}{4} = 1$.

- d. Pada persamaan asimtot $y = \pm \frac{b}{a} x$, berarti bahwa pada persamaan asimtot $y = \pm 2x$ memiliki nilai $b = 2k$ dan $a = k$. Misalkan persamaan hiperbolanya adalah $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, dan melalui titik $(1, \sqrt{3})$, maka berlaku $\frac{1}{a^2} - \frac{3}{b^2} = 1$ atau dapat dinyatakan dengan $b^2 - 3a^2 = a^2 b^2$.

Dengan menyubstitusikan $b = 2k$ dan $a = k$ ke persamaan $b^2 - 3a^2 = a^2 b^2$, diperoleh $4k^2 - 3k^2 = k^2 4k^2$ atau $k = \sqrt{\frac{1}{4}}$. Dengan menyubstitusikan $k = \sqrt{\frac{1}{4}}$ ke persamaan $b = 2k$ dan $a = k$ diperoleh bahwa $b^2 = 1$ dan $a^2 = \frac{1}{4}$.

Jadi, persamaan hiperbolanya adalah $\frac{x^2}{\frac{1}{4}} - \frac{y^2}{3} = 1$ atau $4x^2 - y^2 = 1$.

3. Tentukan fokus, eksentrisitas, panjang *latus rectum*, dan persamaan direktris dari hiperbola berikut:

- a. $4x^2 - 25y^2 = 100$.
- b. $4x^2 - 9y^2 - 16x + 18y = 29$.

Alternatif Penyelesaian:

- a. Dari persamaan $4x^2 - 25y^2 = 100$ dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$ sehingga $a = 5$ dan $b = 2$. Nilai c diperoleh dengan cara menyubstitusikan $a = 5$ dan $b = 2$ ke rumus $c^2 = a^2 - b^2$, sehingga diperoleh $c = \sqrt{21}$.

Titik fokus terletak di titik $(5,0)$ dan $(-5,0)$.

Eksentrisitas $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{21}}{5} = \frac{1}{5}\sqrt{21}$.

Panjang *latus rectum* adalah $\frac{2b}{a} = \frac{2(4)}{5} = \frac{8}{5}$,

Persamaan direktris $x = \frac{b}{c} = \frac{2}{\sqrt{21}} = \frac{2}{21}\sqrt{21}$ dan $x = -\frac{b}{c} = -\frac{2}{\sqrt{21}} = -\frac{2}{21}\sqrt{21}$.

- b. Persamaan $4x^2 - 9y^2 - 16x + 18y = 29$ dapat dinyatakan dalam $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$ sehingga $a = 3$ dan $b = 2$. Nilai c diperoleh dengan cara menyubstitusikan $a = 3$ dan $b = 2$ ke rumus $c^2 = a^2 - b^2$, sehingga diperoleh $c = \sqrt{5}$.

Titik fokus terletak di titik $(3,0)$ dan $(-3,0)$.

Eksentrisitas $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{5}$.

Panjang *latus rectum* adalah $\frac{2b}{a} = \frac{8}{3}$,

Persamaan direktris $x = \frac{b}{c} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ dan

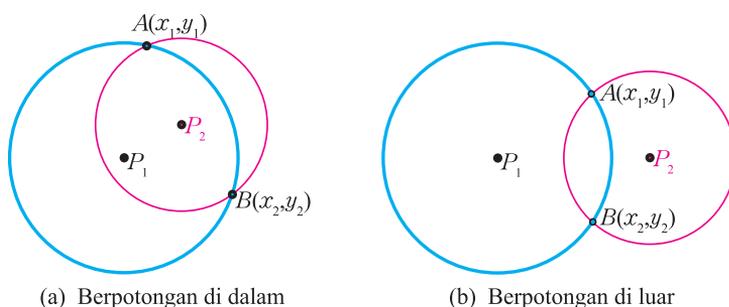
$x = -\frac{b}{c} = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

C. Pengayaan Geometri Analitik

Materi pengayaan adalah materi yang dapat diberikan kepada peserta didik yang cepat belajar atau memiliki kemampuan akademik di atas rata-rata. Tujuan dari pengayaan tersebut adalah agar mereka dapat mengembangkan potensinya secara optimal dengan memanfaatkan sisa waktu yang dimilikinya. Berkaitan dengan hal tersebut, maka materi pengayaan irisan kerucut berupa kedudukan dua lingkaran dan persamaan garis singgung irisan kerucut tidak diberikan kepada seluruh peserta didik.

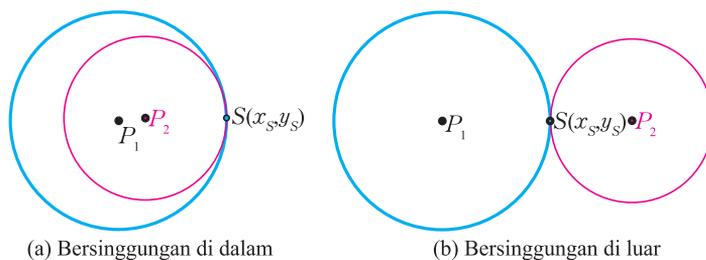
1. Kedudukan Dua Lingkaran

Sebelum menyampaikan materi tentang kedudukan dua lingkaran L_1 dan L_2 , guru diharapkan melakukan tes diagnostik kognitif seperti cara menentukan pusat lingkaran, kedudukan garis terhadap lingkaran dan persamaan garis singgung lingkaran, dan diskriminan. Selanjutnya, guru dapat menggambar kedudukan dua lingkaran yang berpotongan seperti pada Gambar 1.18.



Gambar 1.18. Kedudukan Dua Lingkaran yang Saling Berpotongan

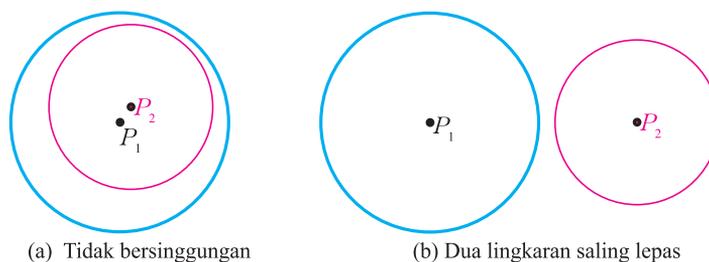
Pada kedudukan ini, guru menyampaikan bahwa syarat kedudukan dua lingkaran berpotongan di dalam jika pusat lingkaran pertama P_1 berada pada lingkaran kedua L_2 , atau sebaliknya. Kedudukan dua lingkaran berpotongan di luar terjadi, jika pusat lingkaran pertama P_1 tidak berada pada lingkaran kedua L_2 , atau sebaliknya.



Gambar 1.19. Kedudukan Dua Lingkaran yang Saling Bersinggungan

Selanjutnya, guru dapat menyampaikan bahwa untuk kedudukan dua lingkaran yang saling bersinggungan (Gambar 1.19). Pada kedudukan ini, kemungkinan kedudukan dua lingkaran bersinggungan di dalam, jika (1) lingkaran pertama L_1 dan lingkaran kedua L_2 berpotongan pada satu titik, dan (2) pusat lingkaran pertama P_1 berada pada lingkaran kedua L_2 , atau sebaliknya. Untuk kedudukan dua lingkaran bersinggungan di luar, jika (1) lingkaran pertama L_1 dan lingkaran kedua L_2 berpotongan pada satu titik, dan (2) pusat lingkaran pertama P_1 tidak berada pada lingkaran kedua L_2 , atau sebaliknya.

Pada kedudukan dua lingkaran tidak bersinggungan maupun berpotongan seperti yang digambarkan pada Gambar 1.20. Pada kedudukan ini, lingkaran yang tidak berpotongan maupun bersinggungan, kedudukan lingkaran pertama L_1 berada di dalam lingkaran kedua L_2 , atau sebaliknya. Kedudukan dua lingkaran saling lepas, dapat terjadi, jika kedudukan lingkaran pertama L_1 tidak berada pada lingkaran kedua L_2 .



Gambar 1.20. Kedudukan Dua Lingkaran yang Tidak Saling Bersinggungan

Selain ketiga kedudukan tersebut, guru dapat menyampaikan kemungkinan kedudukan dua lingkaran lainnya yaitu dua lingkaran yang saling konsentris dan dua lingkaran berhimpit. Kedudukan dua lingkaran dikatakan konsentris jika dua lingkaran L_1 dan L_2 berada pada satu titik pusat lingkaran, walaupun kedua lingkaran ini memiliki jari-jari yang berbeda. Namun, jika kondisi konsentris ini, dua lingkaran tersebut memiliki jari-jari yang sama maka kedudukan dua lingkaran dinamakan dengan berhimpit.

Agar peserta didik dapat memahami materi kedudukan titik terhadap lingkaran, guru dapat memberikan alternatif contoh soal yang ada pada Buku Siswa seperti Contoh Soal 1.17 dan Latihan Soal 1.5.



Ayo Mencoba

Pada kegiatan ini, peserta didik diminta untuk menyelesaikan permasalahan yang ada di latihan Soal 1.5. Telah disediakan alternatif penyelesaian untuk membantu guru.

Latihan Soal 1.5

1. Tentukan titik potong dua lingkaran berikut!

a. $L_1 \equiv x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ dan $L_2 \equiv x^2 + y^2 - 2x - 8y + 9 = 0$.

b. $L_1 \equiv x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ dan $L_2 \equiv x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$.

Alternatif Penyelesaian:

a. Untuk menentukan titik potong lingkaran $L_1 \equiv x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ dan $L_2 \equiv x^2 + y^2 - 2x - 8y + 9 = 0$, dapat dilakukan dengan mengeliminasi persamaan lingkaran satu dengan menggunakan persamaan lingkaran yang lainnya, sehingga

$$L_1 - L_2 = (x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1) - (x^2 + y^2 - 2x - 8y + 9).$$

$$L_1 - L_2 = 4y - 8.$$

Syarat untuk mengetahui titik potong adalah $L_1 - L_2 = 0$, sehingga diperoleh $y = 2$. Substitusikan $y = 2$ ke persamaan lingkaran $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$, sehingga diperoleh persamaan kuadrat $x^2 - 2x - 3 = 0$.

Dengan menggunakan faktorisasi pada persamaan kuadrat $x^2 - 2x - 3 = 0$, diperoleh bahwa $x_1 = 3$ atau $x_2 = -1$.

Jadi, titik potong kedua lingkaran tersebut adalah $(3,2)$ dan $(-1,2)$.

b. Untuk menentukan titik potong lingkaran $L_1 \equiv x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ dan $L_2 \equiv x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$, dapat dilakukan dengan mengeliminasi persamaan lingkaran satu dengan menggunakan persamaan lingkaran yang lainnya, sehingga

$$L_1 - L_2 = (x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1) - (x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4).$$

$$L_1 - L_2 = -3.$$

Karena $L_1 - L_2 = -3$ maka kedua lingkaran tidak memiliki titik potong.

2. Tunjukkan bahwa dua lingkaran berikut saling bersinggungan. Kemudian tentukan titik singgungnya!

a. $L_1 \equiv x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ dan $L_2 \equiv x^2 + y^2 - 8x - 12y + 43 = 0$.

b. $L_1 \equiv x^2 + y^2 + 6x - 4y - 23 = 0$ dan $L_2 \equiv x^2 + y^2 - 12x + 20y + 55 = 0$.

Alternatif Penyelesaian:

a. $L_1 - L_2 = (x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1) - (x^2 + y^2 - 8x - 12y + 43).$

$$L_1 - L_2 = 10x - 4y - 42.$$

Dari sini, peserta didik telah memperoleh persamaan baru yaitu $10x - 4y - 42 = 0$ atau dapat dinyatakan dengan $y = \frac{10x - 42}{4}$.

Substitusikan $y = \frac{10x-42}{4}$ ke persamaan lingkaran $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1$, sehingga

$$x^2 + \left(\frac{10x-42}{4}\right)^2 - 2x - 4\left(\frac{10x-42}{4}\right) + 1 = 0.$$

$$x^2 + \left(\frac{100x^2-180x+1764}{16}\right) - 12x + 43 = 0.$$

$$16x^2 + 100x^2 - 840x^2 + 1764 - 192x + 688 = 0.$$

$$116x^2 - 1032x + 2452 = 0.$$

Persamaan kuadrat ini memiliki koefisien $a = 116$, $b = -1032$, dan $c = 2452$.

Syarat dua lingkaran bersinggungan adalah nilai diskriminan sama dengan nol, sehingga $D = (-1032)^2 - 4(116)(2452) = 72704$.

Karena diperoleh nilai diskriminan sebesar 72704, maka kedua lingkaran tersebut tidak memiliki titik singgung.

b. $L_1 - L_2 = (x^2 + y^2 - 6x - 4y + 23) - (x^2 + y^2 - 12x - 20y + 55).$

$$L_1 - L_2 = 18x - 24y - 78.$$

Dari sini, peserta didik telah memperoleh persamaan baru yaitu

$$18x - 24y - 78 = 0 \text{ atau dapat dinyatakan dengan } y = \frac{78x+78}{24}.$$

Substitusikan $y = \frac{78x+78}{24}$ ke persamaan lingkaran $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 23$, sehingga

$$x^2 + \left(\frac{78x+78}{24}\right)^2 - 6x - 4\left(\frac{78x+78}{24}\right) + 23 = 0.$$

$$x^2 + \frac{324x^2+2808x+6084}{576} - 102x + 445 = 0.$$

$$576x^2 + 324x^2 - 2808x + 6084 - 58752x + 256320 = 0.$$

$$900x^2 - 61560x + 262404 = 0.$$

Persamaan kuadrat ini memiliki nilai diskriminan tidak nol, sehingga kedua lingkaran tersebut tidak memiliki titik singgung.

3. Tunjukkan bahwa kedudukan dua lingkaran berikut ini tidak berpotongan dan tidak bersinggungan!

a. $L_1 \equiv x^2 + y^2 + 4y + 3 = 0$ dan $L_2 \equiv x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0.$

b. $L_1 \equiv x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0$ dan $L_2 \equiv x^2 + y^2 + 2x + 8y - 8 = 0.$

Alternatif Penyelesaian:

$$L_1 - L_2 = (x^2 + y^2 + 4y + 3) - (x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1).$$

$$L_1 - L_2 = 4x - 2y - 2.$$

a. $L_1 - L_2 = (x^2 + y^2 + 4y + 3) - (x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1).$

$$L_1 - L_2 = 4x - 2y - 2.$$

Dari sini, peserta didik telah memperoleh persamaan baru yaitu $4x - 2y - 2 = 0$ atau dapat dinyatakan dengan $y = 2x - 1$.

Substitusikan $y = 2x - 1$ ke persamaan lingkaran $x^2 + y^2 + 4y + 3 = 0$, sehingga

$$x^2 + (2x - 1)^2 + 4(2x - 1) + 3 = 0.$$

$$3x^2 + 4x = 0.$$

Syarat dua lingkaran tidak berpotongan dan tidak bersinggungan adalah nilai diskriminan kurang dari nol, sehingga $D = (4)^2 - 4(3)(0) = 16$.

Karena diperoleh nilai diskriminan lebih dari 0, maka kedua lingkaran tersebut memiliki titik potong di dua titik.

b. $L_1 - L_2 = (x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12) - (x^2 + y^2 + 2x + 8y - 8)$.

$$L_1 - L_2 = -8x - 4y + 4.$$

Dari sini, peserta didik telah memperoleh persamaan baru yaitu

$$-8x - 4y + 4 = 0 \text{ atau dapat dinyatakan dengan } y = 1 - 2x.$$

Substitusikan $y = 1 - 2x$ ke persamaan lingkaran $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0$, sehingga

$$x^2 + (1 - 2x)^2 - 6x + 4(1 - 2x) + 12 = 0.$$

$$x^2 + 1 - 4x + 4x^2 - 6x + 4 - 8x + 12 = 0.$$

$$5x^2 - 18x + 17 = 0.$$

Syarat dua lingkaran tidak berpotongan dan tidak bersinggungan adalah nilai diskriminan kurang dari nol, sehingga $D = (-18)^2 - 4(5)(17) = -16$.

Karena diperoleh nilai diskriminan kurang dari 0, maka kedua lingkaran tersebut tidak memiliki titik potong di kedua titik, sehingga kedudukan dua lingkaran tersebut tidak bersinggungan dan tidak berpotongan.

2. Persamaan Garis Singgung Irisan Kerucut

Sebelum menyampaikan materi tentang persamaan garis singgung irisan kerucut, guru diharapkan melakukan tes diagnostik kognitif yang dapat dilakukan dengan cara tanya jawab berkaitan dengan cara menentukan persamaan garis singgung lingkaran titik $T(x, y)$. Selanjutnya, guru dapat menyampaikan ke peserta didik bahwa secara umum untuk menentukan persamaan irisan kerucut (parabola, elips, dan hiperbola) di titik $T(x, y)$ hampir sama dengan menentukan persamaan garis singgung lingkaran pada titik $T(x, y)$. Ketiga cara yang dapat digunakan untuk menentukan persamaan garis singgung irisan kerucut adalah (a) titik singgung telah ditentukan, (b) kemiringan garis singgung lingkaran telah ditentukan, dan (c) sebuah titik di luar lingkaran yang telah ditentukan. Untuk lebih jelas terkait ketiga cara tersebut, guru dapat memberikan penjelasan.

Agar peserta didik lebih memahami materi persamaan garis singgung irisan kerucut ini, guru dapat menjelaskan Contoh Soal 1.28, 1.29, dan 1.30, Latihan Soal Terbimbing 1.16, 1.17, dan 1.18. Guru diperkenankan menggunakan contoh soal lain yang sejenis untuk memberikan contoh soal kepada peserta didik.



Ayo Mencoba

Aktivitas Ayo Mencoba ini merupakan aktifitas guru untuk memberikan bimbingan kepada peserta didik. Guru dapat membimbing peserta didik dengan cara melakukan tanya jawab diagnostik untuk melengkapi jawaban pada Latihan Soal Terbimbing 1.15 – 1.17. Alternatif Penyelesaian sudah disediakan untuk membantu guru.

Latihan Soal Terbimbing 1.15

Tentukan persamaan garis singgung $4x^2 + 9y^2 - 12x + 6y - 7 = 0$ pada titik $(1,1)$!

Alternatif Penyelesaian:

Dari prinsip bagi adil yang ada pada Tabel 1.2 di Buku Siswa, maka persamaan garis singgung $4x^2 + 9y^2 - 12x + 6y - 7 = 0$ di titik $(1,1)$ adalah

$$4xx_1 + 9yy_1 - 12\frac{(x+x_1)}{2} + 6\frac{(y+y_1)}{2} - 7 = 0.$$

$$4x + 9y - 6(x+1) + 3(y+1) - 7 = 0.$$

$$12y - 2x - 10 = 0.$$

Jadi, persamaan garis singgungnya adalah $12y - 2x - 10 = 0$.

Latihan Soal Terbimbing 1.16

Tentukan persamaan garis singgung elips $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{16} = 1$ dengan kemiringan $m = 2$!

Alternatif Penyelesaian:

Persamaan elips $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{16} = 1$, maka $a^2=20$, $b^2=16$ dan kemiringan garis singgung adalah 2. Maka persamaan garis singgungnya adalah

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2} = 2x \pm \sqrt{(20)(4) + 16}.$$

$$y = 2x \pm \sqrt{96} = 2x \pm 4\sqrt{6}.$$

Jadi, persamaan garis singgungnya adalah $y = 2x + 4\sqrt{6}$ dan $y = 2x - 4\sqrt{6}$.

Latihan Soal Terbimbing 1.17

Guru dapat menggunakan konsep yang ada pada Latihan Soal Terbimbing 1.15. dan 1.16, untuk menyelesaikan Latihan Soal 1.17.



Interaksi Guru dengan Orang Tua

Guru memberitahukan kepada peserta didik, bahwa mereka belajar di rumah untuk mengerjakan tugas pada Buku Siswa Latihan Soal 1.1 sampai Latihan Soal 1.8 dan Uji Kompetensi bersama orang tua atau wali murid. Guru memberi tahu orangtua atau wali murid untuk mengingatkan, membimbing, dan mengawasi putra-putrinya untuk mengerjakan tugas di rumah, serta memberi paraf pada hasil kerjanya. Dijelaskan pula bahwa yang harus dilakukan orang tua adalah membimbing, bukan mengerjakan tugas. Interaksi ini dapat dilakukan melalui pertemuan, sms, telepon, grup media sosial, atau buku penghubung. Jika orang tua belum jelas cara membimbingnya dipersilakan menghubungi guru.

D. Uji Kompetensi

1. Diketahui lingkaran $L \equiv (x-4)^2 - (y-4)^2 = 16$ memotong garis $y = 4$.
Tentukan persamaan garis singgung lingkaran yang melalui titik potong lingkaran dan garis tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

Substitusikan $y = 4$ ke persamaan $(x-4)^2 - (y-4)^2 = 16$, sehingga $(x-4)^2 = 16$.

$(x-4) = \pm 4$. hingga didapat $x_1 = 8$ atau $x_2 = 0$. Jadi titik potong lingkaran $(x-4)^2 - (y-4)^2 = 16$ dengan garis $y = 4$ adalah $(8,4)$ dan $(0,4)$.

Untuk titik $(8,4)$, maka persamaan garis singgungnya adalah $4(x-4)=16$ atau $x = 8$.

Untuk titik $(0,4)$, maka persamaan garis singgungnya adalah $-4(x-4)=16$ atau $x = -8$.

2. Tentukan persamaan garis sejajar dengan $x + 2y - 5 = 0$ yang membagi lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 + 10x - 6y - 2 = 0$ menjadi dua bagian yang sama!

Alternatif Penyelesaian:

Persamaan lingkaran $x^2 + y^2 + 10x - 6y - 2 = 0$ dapat dinyatakan dalam $(x+5)^2 + (y-3)^2 = 36$, sehingga titik pusat di $(-5,3)$.

Karena memotong lingkaran menjadi dua bagian yang sama, maka garis melalui titik pusat lingkaran yaitu melalui $(-5,3)$. Selain itu, garis tersebut juga sejajar dengan persamaan garis $x + 2y - 5 = 0$, dengan kemiringan sebesar $\frac{1}{2}$. Dengan menyubstitusikan $x_1 = -5$, $y_1 = 3$, dan $m = \frac{1}{2}$ ke persamaan $y - y_1 = m(x - x_1)$ maka persamaan garisnya adalah $y - 3 = \frac{1}{2}(x + 5)$ atau $2y - x = 11$.

3. Jika kuasa titik $M(a,4) = 0$ terhadap lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 25 = 0$, tentukanlah nilai dari a !

Alternatif Penyelesaian:

$K_{M(a,4)} = 0$, maka $a^2 - 9 = 0$, sehingga $a = 3$ atau $a = -3$.



Soal Berpikir Kreatif

4. Jika titik A dan B berada pada lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 6x - 2y + k = 0$, maka garis singgung lingkaran yang melalui titik A dan B berpotongan di titik C (8,1). Jika luas segi empat yang melalui titik A, B, dan C serta pusat lingkaran adalah 12, tentukanlah nilai dari k !

Alternatif Penyelesaian:

Dari persamaan lingkaran $x^2 + y^2 - 6x - 2y + k = 0$, diperoleh bahwa pusat lingkaran di $P(3,1)$. Karena perpotongan 2 garis singgung di titik (8,1) maka panjang $PC = 8 - 3 = 5$. Karena 2 segitiga tersebut mempunyai panjang $PA = PB = r$ dan sisi miringnya sama, yaitu PC maka dapat dipastikan bahwa 2 segitiga tersebut identik sehingga membentuk layang-layang.

Luas layang-layang tersebut adalah 12, sehingga

Luas layang-layang = dua kali luas segitiga = $2 \times \frac{1}{2} AC \times PA$.

$12 = AC \times PA$ atau dapat dinyatakan dengan $AC = \frac{12}{r}$.

Jari-jari dapat diperoleh dari $r^2 = 3^2 + 1^2 - k = 10 - k$.

Pada segitiga PAC , berlaku bahwa $AC^2 = PC^2 - PA^2 = (8 - 3)^2 - r^2$.

Dengan menyubstitusikan $r^2 = 10 - k$ dan $AC = \frac{12}{r}$, pada persamaan

$AC^2 = (8 - 3)^2 - r^2$, diperoleh $AC^2 = 25 - (10 - k)^2$.

$$\left(\frac{12}{r}\right)^2 = 25 - (10 - k)^2.$$

$$r^4 - 25r^2 + 144 = 0.$$

$$r^2 = 16 \text{ dan } r^2 = 9.$$

Dengan menyubstitusikan $r^2 = 16$ ke persamaan $r^2 = 10 - k$ diperoleh $k = -6$.

Dengan menyubstitusikan $r^2 = 9$ ke persamaan $r^2 = 10 - k$ diperoleh $k = 1$.

Jadi, nilai k yang memenuhi adalah $k = -6$ atau $k = 1$.

5. Tunjukkan bahwa puncak kedua parabola $x^2 - 2x - 5y + 11 = 0$ dan $y^2 + 5x - 9$ adalah sama, dan tentukan titik perpotongan kedua parabola!

Alternatif Penyelesaian:

Parabola $x^2 - 2x - 5y + 11 = 0$ dan $y^2 + 5x - 9$ berturut-turut dapat ditulis sebagai $(x-1)^2 = 5(y-2)$ dan $(y-2)^2 = 5(x-1)$.

Dari kedua persamaan terakhir, kita dapat melihat bahwa titik puncak kedua parabola ada di titik $(1,2)$. Dengan mengganti salah satu persamaan dengan persamaan lainnya untuk menemukan perpotongan kedua parabola, kita memperoleh $(x-1)^4 = 125(x-1)$. Dengan menyelesaikan persamaan ini, diperoleh $x = 1$ dan $x = 6$, maka titik potong kedua parabola adalah $(1,2)$ dan $(6,7)$.

6. Diketahui dua fokus elips terletak pada sumbu X . Sumbu mayor dan sumbu minor secara berturut turut adalah 10 dan 8. Tentukan persamaan elips yang menyinggung sumbu Y !

Alternatif Penyelesaian:

Karena titik fokus terletak pada sumbu X , sehingga pusat elips terletak pada sumbu X , maka $n = 0$. Elips memenuhi persamaan $\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Sumbu mayor adalah 10, maka $2a = 10$ atau $a = 5$. Sumbu minor adalah 8, maka $2b = 8$ atau $b = 4$. Dari $a = 5$ dan $b = 4$, maka $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 16 = 9$, sehingga $c = 3$.

Dari $a = 5$ dan $b = 4$, maka persamaan elips memenuhi $\frac{(x-m)^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

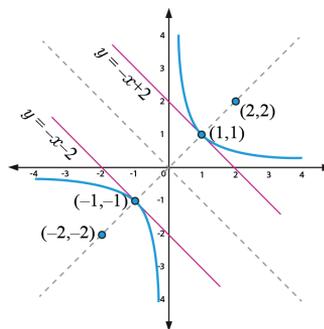
Karena Elips menyinggung sumbu Y dan titik fokus elips terletak pada sumbu X , maka titik singgung elips terhadap sumbu Y adalah $O(0,0)$. Dari sini, elips melalui titik $(0,0)$, sehingga memenuhi $\frac{m^2}{25} = 1$ atau $m = \pm 5$. Telah diperoleh bahwa $n = 0$, sehingga titik pusat elips berada pada titik $(5,0)$ atau $(-5,0)$.

Jadi, persamaan elipsnya adalah $\frac{(x-5)^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ dan $\frac{(x+5)^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

7. Hiperbola dengan persamaan $xy = 1$ merupakan salah satu bentuk hiperbola paling sederhana dan berbentuk siku-siku. Hiperbola $xy = 1$, dapat diperoleh dengan memutar parabola sejauh 45° di sekitar titik asal. Selidikilah sifat-sifat hiperbola $xy = 1$!

Alternatif Penyelesaian:

- Persamaan hiperbola $xy = 1$ dapat dinyatakan dengan $x = \frac{1}{y}$, maka:
- titik fokus berada pada $(2,2)$ dan $(-2,-2)$;
- titik puncak berada pada $(1,1)$ dan $(-1,-1)$;
- pusat hiperbola terletak pada titik $O(0,0)$;
- sumbu utama $x = y$;
- persamaan direktiks $y = -x - 2$ dan $y = -x + 2$;
- persamaan asimtot adalah $y = 0$ dan $x = 0$.



Bab 2 Limit

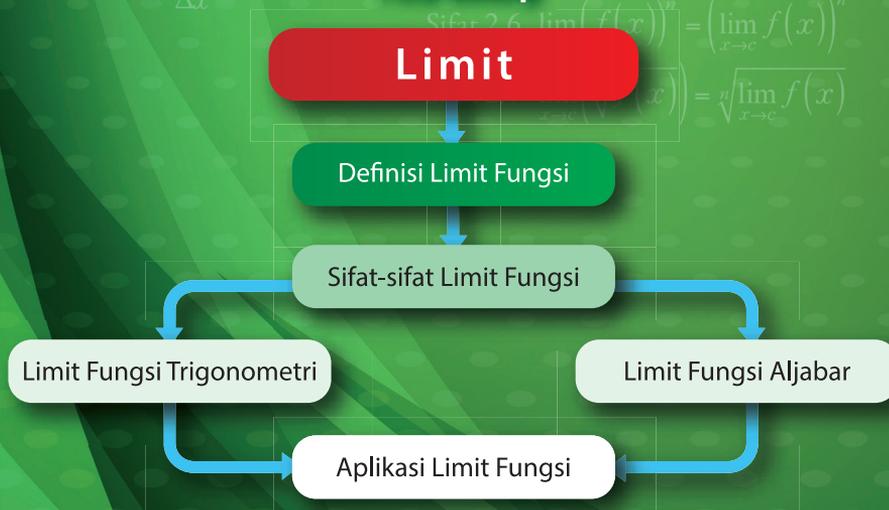
Pengalaman Belajar

Setelah mempelajari bab ini, peserta didik diharapkan dapat:

1. Menjelaskan konsep limit dan limit fungsi;
2. Mengidentifikasi sifat-sifat limit fungsi;
3. Menentukan nilai limit fungsi;
4. Menentukan nilai limit fungsi di tak hingga;
5. Menerapkan konsep dasar limit fungsi dalam menyelesaikan masalah kehidupan sehari-hari.

$$m = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Peta Konsep



Alternatif Skema Pembelajaran

Subbab	Waktu (JP)	Tujuan	Pokok Materi	Kosakata	Bentuk metode dan aktivitas	Sumber utama	Sumber lain (Daftar Pustaka)
Limit	4	<ol style="list-style-type: none"> 1. Menjelaskan konsep limit dan limit fungsi. 2. Mengidentifikasi sifat-sifat limit fungsi. 3. Menentukan nilai limit fungsi. 4. Menentukan nilai limit fungsi di tak hingga. 5. Menerapkan konsep dasar limit fungsi dalam menyelesaikan masalah kehidupan sehari-hari. 	<ul style="list-style-type: none"> • Definisi Limit, • Sifat Limit • Nilai Limit Fungsi Aljabar • Nilai Limit Fungsi Trigonometri • Aplikasi Limit Fungsi dalam Menyelesaikan Masalah Sehari Hari 	<ul style="list-style-type: none"> • Limit Fungsi. • Sifat-Sifat Limit Fungsi. • Limit Fungsi Aljabar. • Limit Fungsi Trigonometri. 	<p>Eksplorasi, Diskusi Pemaparan, Latihan Soal Terbimbing, Pemanfaatan Teknologi (opsional)</p>	<p>Buku Siswa</p>	<p>[1] [20] [27] [32] [33] [39]</p>

Catatan:

- Waktu (JP) adalah jumlah atau rentang jam yang disarankan untuk pelajaran. Guru dapat beradaptasi dengan kondisi pembelajaran yang sebenarnya.
- Untuk melakukan pemeriksaan ulang jawaban yang dituliskan oleh peserta didik, guru dapat menyarankan untuk menggunakan GeoGebra. GeoGebra memiliki versi daring yang dapat digunakan secara offline di laptop dan Android. GeoGebra dapat digunakan untuk perhitungan seperti kalkulator. Hal ini juga dapat digunakan untuk menghasilkan grafik.

Salah satu elemen kalkulus yang dibahas pada Matematika Tingkat Lanjut untuk SMA kelas XII adalah limit. Materi ini bertujuan agar peserta didik dapat menerapkan konsep dasar kalkulus di dalam konteks pemecahan masalah aplikasi dalam berbagai bidang. Bagian Limit membahas tentang definisi limit fungsi, sifat-sifat limit fungsi, nilai limit fungsi aljabar dan trigonometri, serta aplikasi limit fungsi dengan berbagai bidang yang disesuaikan dengan kehidupan sehari-hari. Secara umum bagian ini memberikan alternatif pedoman bagi guru untuk melakukan pembelajaran limit kepada peserta didik

Panduan Pembelajaran

Sebelum memulai aktivitas pembelajaran, guru memandu peserta didik untuk berdoa menurut agama dan kepercayaan masing-masing. Hal ini bertujuan untuk menguatkan salah satu elemen Profil Pelajar Pancasila, yaitu beriman, bertakwa kepada Tuhan YME, dan berakhlak mulia. Setelah itu, guru melakukan tes diagnostik kognitif dan non kognitif. Pada tes diagnostik non kognitif, guru dapat menggunakan alternatif pertanyaan yang ada pada kegiatan Ayo Mengingat Kembali yang pada materi Lingkaran di Bab 1 Geometri Analitik. Selanjutnya, guru dapat memberikan pertanyaan diagnostik kognitif untuk mengetahui capaian kompetensi peserta didik, menyesuaikan pembelajaran di kelas dengan kompetensi rata-rata peserta didik, dan memberikan pembelajaran tambahan kepada peserta didik dengan kompetensi di bawah rata-rata. Tes diagnostik kognitif dapat dilakukan dengan tanya jawab berkaitan dengan faktorisasi, bentuk akar termasuk faktor sekawan, dan trigonometri (terutama definisi sinus, cosinus, dan tangen), dan fungsi kuadrat.

Setelah memberikan tes diagnostik, guru memberikan apersepsi kontekstual berupa Pacu Jawi atau Karapan Sapi. Penunggang Pacu Jawi atau penunggang Karapan Sapi (sering disebut dengan joki), perlu memperkirakan kecepatan yang tepat agar mampu mengendalikan arah laju sepasang sapi tersebut hingga dapat bergerak lurus. Oleh karena itu, terdapat batas atau limit kecepatan yang dapat ditoleransi oleh penunggang ketika mengendalikan laju sepasang sapi dalam tradisi Pacu Jawi dan Karapan Sapi.

Untuk beberapa daerah yang merasa asing dengan tradisi Pacu Jawi dan Karapan Sapi, guru dapat menggunakan konteks lain sesuai daerah masing-masing yang dapat memberikan pengalaman (pengetahuan) awal tentang limit. Hal ini bertujuan untuk memotivasi peserta didik bahwa materi limit ada kaitannya dengan kehidupan sehari-hari. Pemahaman tersebut diharapkan dapat membuat peserta didik beranggapan mempelajari matematika sangat dekat dengan lingkungan sekitar dan ilmu pengetahuan lain.

A. Definisi Limit Fungsi



Ayo Bereksplorasi

Eksplorasi 2.1 Definisi Limit Fungsi

Guru membentuk kelompok yang terdiri dari 4-5 peserta didik. Setelah itu, guru menyajikan masalah yang berkaitan dengan kekuatan genggam pada ekor sapi dengan kecepatan berlari sapi pada tradisi Pacu Jawi atau Karapan Sapi. Guru dapat menceritakan bahwa semakin kuat joki menggenggam ekor sapi, semakin cepat pula laju sapi. Hal ini berarti besarnya kekuatan genggam pada ekor sapi mengakibatkan kecepatan meningkat. Oleh karena itu, joki perlu menentukan besarnya kekuatan genggam yang tepat pada ekor sapi, agar kecepatannya tidak mengakibatkan arah laju sapi menyimpang meskipun dengan kecepatan tinggi. Guru memberikan tabel kekuatan genggam dan kecepatan sapi seperti pada Tabel 2.1. Untuk besaran kekuatan genggam dan besarnya kecepatan sapi, guru dapat memodifikasinya sehingga setiap kelompok memiliki hasil yang berbeda.

Tabel 2.1. Kecepatan Sapi dalam Pacu Jawi.

Kekuatan Genggam (kg)	38,00	38,40	38,80	38,90	39,00	39,10	39,20	39,60	40,00
Kecepatan (m/s)	1,00	1,25	1,59	1,599	?	1,6001	1,601	1,65	1,9

Setelah itu, peserta didik diarahkan untuk mendiskusikan

1. Nilai limit yang didekati dari kiri dan nilai limit yang didekati dari kanan.
2. Menaksir besar kecepatan sapi saat kekuatan genggam penunggang mendekati 39 Kg.
3. Apakah kecepatan sapi yang peserta didik taksir pada kekuatan genggam 39 Kg merupakan nilai yang tepat?
4. Misalkan kecepatan sapi dinyatakan dalam sebuah fungsi $f(x)$ dengan x menyatakan kekuatan genggam penunggang. Jika nilai x mendekati ke 39, taksirlah nilai $f(x)$!

Berdasarkan hasil diskusi ini, guru diharapkan memberikan kesimpulan bahwa definisi limit adalah sebagai berikut.



Definisi

Misalkan f sebuah fungsi $f : R \rightarrow R$.

- $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$, berarti untuk x mendekati c , maka $f(x)$ mendekati L ,
- jika limit kiri $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$ ada dan limit kanan $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ ada, sehingga
- $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$, maka $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$.

Catatan: $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ dibaca limit $f(x)$, untuk x mendekati c sama dengan L

Artinya bahwa nilai limit suatu fungsi ada jika nilai limit kiri "ada dan sama dengan" nilai limit kanan. Peserta didik akan lebih memahami definisi tersebut dengan memperhatikan Contoh Soal 2.1.



Ayo Mencoba

Pada kegiatan Ayo Mencoba, guru dapat menggunakan kelompok yang sudah dibentuk pada kegiatan Eksplorasi 2.1. Diharapkan, guru dapat mengajak peserta didik untuk berani menyampaikan pendapat, bekerja sama dalam kelompok, dan mendengarkan pendapat rekan lainnya. Pada kegiatan ini kelompok peserta didik diberikan masalah seperti Latihan Soal Terbimbing 2.1 hingga Latihan Soal Terbimbing 2.3. Apabila jumlah kelompok yang dibentuk lebih dari 2 kelompok, guru dapat menambahkan bentuk masalah dengan mengadaptasi Latihan Soal Terbimbing 2.1 hingga 2.3. Setelah selesai mendiskusikan masalah, perwakilan kelompok dapat mempresentasikan hasil diskusi. Alternatif hasil diskusi kelompok peserta didik untuk Latihan Soal Terbimbing 2.1 hingga 2.3 adalah sebagai berikut.

Latihan Soal Terbimbing 2.1

Perkirakan nilai $\lim_{x \rightarrow 6} (3x - 1)$ dengan pemahaman intuitif!

Alternatif Penyelesaian:

Peserta didik diminta melengkapi Tabel 2.2 untuk menentukan nilai fungsi $f(x) = 3x - 1$ pada saat x mendekati 6.

Tabel 2.2. Nilai $f(x) = 3x - 1$ untuk x mendekati 6.

x	5,3	5,6	5,9	5,95	5,995	6	6,005	6,05	6,1	6,4	6,7
$f(x)$	14,9	15,8	16,7	16,85	16,985	17	17,015	17,15	17,3	18,2	19,1

Berdasarkan Tabel 2.3, diperoleh

untuk x mendekati 6 dari kiri, nilai $f(x)$ mendekati 17, artinya $\lim_{x \rightarrow 6^-} (3x-1) = 17$ dan untuk x mendekati 6 dari kanan, nilai $f(x)$ mendekati 17, artinya

$$\lim_{x \rightarrow 6^+} (3x-1) = 17. \text{ Hal ini berarti } \lim_{x \rightarrow 6^-} (3x-1) = \lim_{x \rightarrow 6^+} (3x-1) = 17.$$

Jadi, $\lim_{x \rightarrow 6} (3x-1) = 17$.

Latihan Soal Terbimbing 2.2

Perkirakan nilai $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x-3}$ dengan pemahaman intuitif!

Alternatif Penyelesaian:

Peserta didik diminta melengkapi Tabel 2.3 untuk menentukan nilai fungsi $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ pada saat x mendekati 3.

Tabel 2.3 Nilai $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ pada saat x mendekati 3

x	2,6	2,7	2,8	2,9	2,95	3	3,09	3,9	3,8	3,7	3,6
$f(x)$	5,6	5,7	5,8	5,9	5,95	0/0	6,09	5,09	5,8	5,7	5,6

Berdasarkan tabel di atas, diperoleh:

Untuk $x = 3$, dengan menyubstitusikannya ke persamaan $\frac{x^2-9}{x-3}$ diperoleh nilai $\frac{0}{0}$.

Tetapi dengan melihat Tabel 2.3, guru dapat menyampaikan bahwa:

untuk x mendekati 3 dari sebelah kiri, nilai $f(x)$ mendekati 6, artinya $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2-9}{x-3} = 6$

dan untuk x mendekati 3 dari sebelah kanan, nilai $f(x)$ mendekati 6, artinya

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2-9}{x-3} = 6. \text{ Hal ini berarti } \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2-9}{x-3} = 6.$$

Jadi, $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x-3} = 6$.

Latihan Soal Terbimbing 2.3

Perkirakan nilai $\lim_{x \rightarrow 2} (x-2)(x^2+2)$ dengan pemahaman intuitif!

Alternatif Penyelesaian:

Peserta didik diminta melengkapi Tabel 2.4 untuk menentukan nilai fungsi $f(x) = (x-2)(x^2+2)$ pada saat x mendekati 2.

Tabel 2.4 Nilai $f(x) = (x-2)(x^2+2)$ pada saat x mendekati 2

x	1,5	1,7	1,8	1,9	1,95	2	2,05	2,1	2,2	2,3	2,4
$f(x)$	-2,125	-1,467	-1,048	-0,561	-0,290	0	0,310	0,641	1,368	2,187	3,104

Berdasarkan Tabel 2.4, diperoleh

Untuk x mendekati 2 dari kiri, nilai $f(x)$ mendekati 0, artinya $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x-2)(x^2+2) = 0$ dan untuk x mendekati 2 dari kanan, nilai $f(x)$ mendekati 0, artinya $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2)(x^2+2) = 0$. Ini berarti $\lim_{x \rightarrow 2} (x-2)(x^2+2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x-2)(x^2+2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2)(x^2+2) = 0$.
Jadi, $\lim_{x \rightarrow 2} (x-2)(x^2+2) = 0$



Video Pembelajaran

Guru dapat menyarankan peserta didik untuk melihat penjelasan definisi limit fungsi dengan cara scan gambar barcode di samping, atau berselancar pada *link* youtube <https://www.youtube.com/watch?v=We67Bimd6cA>



Ayo Mencoba

Pada aktivitas ini, peserta didik diminta menyelesaikan permasalahan yang ada di Latihan Soal 2.1. Alternatif penyelesaian telah disediakan untuk memudahkan guru.

Latihan Soal 2.1

1. Tentukan limit fungsi $f(x)$, dengan cara menentukan nilai-nilai fungsi di sekitar titik yang didekati
 - a. $f(x) = x^2 - 1$, jika x mendekati 0.
 - b. $f(x) = (x^2 - 4x)$, jika x mendekati 3.

Alternatif Penyelesaian:

- a. Nilai dari $\lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - 1) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 1) = -1$.
- b. Nilai dari $\lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2 - 4) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 4) = -3$.

2. Perkirakan nilai dari fungsi $f(x)$ berikut dengan menggunakan definisi intuitif

- a. $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x + 1)$
- b. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

Alternatif Penyelesaian:

Estimasi nilai dari fungsi $f(x)$.

- a. $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x + 1) = 0$
- b. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$



Di akhir kegiatan pembelajaran, guru memberikan tugas kepada peserta didik untuk mendiskusikan bersama kelompok untuk menemukan Sifat 2.2 hingga Sifat 2.7. Diharapkan pada kegiatan ini, guru dapat mengajak peserta didik untuk berpikir kreatif dan dapat bekerja sama dengan baik

Untuk memahami sifat-sifat limit fungsi dan penggunaannya untuk menyelesaikan permasalahan nilai limit, guru dapat menggunakan beberapa contoh menentukan nilai limit seperti Contoh Soal 2.2 dan 2.3. Selanjutnya, peserta didik dapat dikelompokkan menjadi beberapa kelompok untuk menyelesaikan permasalahan nilai limit fungsi seperti pada Latihan Soal Terbimbing 2.2 - 2.6, serta Latihan Soal 2.2.

Latihan Soal Terbimbing 2.4

Dengan menggunakan sifat-sifat limit yang sudah peserta didik pelajari, tentukan nilai $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{x^3+8}{x\sqrt{3x}}}$!

Alternatif Penyelesaian:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{x^3+8}{x\sqrt{3x}}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^3+8}{x\sqrt{3x}} \right)} \quad (\text{Sifat 2.7}).$$

$$= \sqrt{\frac{\lim_{x \rightarrow 1} x^3 + 8}{\lim_{x \rightarrow 1} x \sqrt{3x}}} \quad (\text{Sifat 2.5}).$$

$$= \sqrt{\frac{\lim_{x \rightarrow 1} x^3 + \lim_{x \rightarrow 1} 8}{\lim_{x \rightarrow 1} (x\sqrt{3x})}} \quad (\text{Sifat 2.3}).$$

$$= \sqrt{\frac{\lim_{x \rightarrow 1} x^3 + \lim_{x \rightarrow 1} 8}{\lim_{x \rightarrow 1} x \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{3x}}} \quad (\text{Sifat 2.4}).$$

$$= \sqrt{\frac{(\lim_{x \rightarrow 1} x)^3 + \lim_{x \rightarrow 1} 8}{\lim_{x \rightarrow 1} x \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{3x}}} \quad (\text{Sifat 2.6}).$$

$$= \sqrt{\frac{(\lim_{x \rightarrow 1} x)^3 + \lim_{x \rightarrow 1} 8}{\lim_{x \rightarrow 1} x \sqrt{\lim_{x \rightarrow 1} 3x}}} \quad (\text{Sifat 2.7}).$$

$$= \sqrt{\frac{(\lim_{x \rightarrow 1} x)^3 + \lim_{x \rightarrow 1} 8}{\lim_{x \rightarrow 1} x \sqrt{3 \lim_{x \rightarrow 1} x}}} \quad (\text{Sifat 2.2}).$$

$$= \sqrt{\frac{1^3+8}{1\sqrt{3(1)}}} = \sqrt{\frac{9}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3\sqrt{3}} \quad (\text{Sifat 2.1}).$$

Latihan Soal Terbimbing 2.5

Dengan menggunakan sifat-sifat limit yang sudah kalian pelajari, tentukan nilai

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6}{x^2 - 16}$$

Alternatif Penyelesaian:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6}{x^2 - 16} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 6)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 16)} \quad (\text{Sifat 2.5}).$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2) + \lim_{x \rightarrow 2} (-6)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2) + \lim_{x \rightarrow 2} (-16)} \quad (\text{Sifat 2.3}).$$

$$= \frac{(\lim_{x \rightarrow 2} x)^2 + \lim_{x \rightarrow 2} (-6)}{(\lim_{x \rightarrow 2} x)^2 + \lim_{x \rightarrow 2} (-16)} \quad (\text{Sifat 2.6}).$$

$$= \frac{(\lim_{x \rightarrow 2} x)^2 - 6 \lim_{x \rightarrow 2} (x)}{(\lim_{x \rightarrow 2} x)^2 - 16 \lim_{x \rightarrow 2} (x)} \quad (\text{Sifat 2.2}).$$

$$= \frac{2^2 - 6(2)}{2^2 - 16(2)} = \frac{4 - 12}{4 - 32} = \frac{18}{-28} = \frac{2}{7} \quad (\text{Sifat 2.1}).$$



Ayo Mencoba

Pada aktivitas Ayo Mencoba ini, guru dapat membimbing peserta didik untuk menggunakan sifat-sifat limit dalam menyelesaikan soal yang ada pada Latihan Soal 2.2.

Latihan Soal 2.2

Gunakanlah sifat-sifat limit yang sudah kalian pelajari untuk menyelesaikan soal berikut.

1. Tentukan nilai dari

a. $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 2)$

d. $\lim_{y \rightarrow 2} \sqrt{\frac{y^2}{2y^2 - 7y + 3}}$

b. $\lim_{x \rightarrow 2} (6x(x-3)(5x+6))$

e. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 - 4}{x - 2} \right)$

c. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\left(\sqrt{5x+4} - \sqrt{16-7x} \right) \right)$

Alternatif Penyelesaian:

a. $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 2) = \lim_{x \rightarrow 3} (x^2) + \lim_{x \rightarrow 3} 2 \quad (\text{Sifat 2.2}).$

$$= (\lim_{x \rightarrow 3} x)^2 + \lim_{x \rightarrow 3} 2 \quad (\text{Sifat 2.6}).$$

$$= 3^2 + 2 = 11 \quad (\text{Sifat 2.1}).$$

- b. $\lim_{x \rightarrow 2} (6x(x-3)(5x+6)) = \left(\lim_{x \rightarrow 2} (6x) \right) \left(\lim_{x \rightarrow 2} (x-3) \right) \left(\lim_{x \rightarrow 2} (5x+6) \right)$ (Sifat 2.4).
 $= 6 \left(\lim_{x \rightarrow 2} x \right) \left(\lim_{x \rightarrow 2} (x-3) \right) \left(\lim_{x \rightarrow 2} (5x+6) \right)$ (Sifat 2.2).
 $= 6 \left(\lim_{x \rightarrow 2} x \right) \left(\lim_{x \rightarrow 2} x - \lim_{x \rightarrow 2} 3 \right) \left(\lim_{x \rightarrow 2} 5x + \lim_{x \rightarrow 2} 6 \right)$ (Sifat 2.3).
 $= 6 \left(\lim_{x \rightarrow 2} x \right) \left(\lim_{x \rightarrow 2} x - \lim_{x \rightarrow 2} 3 \right) \left(5 \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 6 \right)$ (Sifat 2.2).
 $= 6(2)(2-3)(5(2)+6) = -192.$ (Sifat 2.1).
- c. Dengan menerapkan sifat-sifat limit yang sudah dipelajari oleh peserta didik, diperoleh bahwa $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\sqrt{5x+4} - \sqrt{16-7x} \right) = 0.$
- d. Dengan menerapkan sifat-sifat limit yang sudah dipelajari, diperoleh bahwa $\lim_{y \rightarrow 2} \sqrt{\frac{y^2}{2y^2-7y+3}} = \frac{2}{5}.$
- e. Dengan menerapkan sifat-sifat limit yang sudah dipelajari, oleh peserta didik diperoleh bahwa $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2-4}{x-2} \right) = 3.$

2. Jika $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 2$, tentukan $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{1 + \sqrt{x+1}}!$

Alternatif Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{1 + \sqrt{x+1}} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} g(x)}{\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sqrt{x+1})} && \text{(Sifat 2.5).} \\ &= \frac{2}{\lim_{x \rightarrow 0} 1 + \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x+1})} && \text{(Sifat 2.3).} \\ &= \frac{2}{\lim_{x \rightarrow 0} 1 + \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0} (x+1)}} && \text{(Sifat 2.7).} \\ &= \frac{2}{\lim_{x \rightarrow 0} 1 + \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0} x + \lim_{x \rightarrow 0} 1}} && \text{(Sifat 2.3).} \\ &= \frac{2}{1 + \sqrt{0+1}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1}} = \frac{2}{2} = 1. && \text{(Sifat 2.1).} \end{aligned}$$

3. Jika $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 2$, tentukan $\lim_{x \rightarrow 3} \left(g(x) \frac{-3}{\sqrt{x+\sqrt{3}}} \right)!$

Alternatif Penyelesaian:

Karena $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 2$, maka

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \left(g(x) \frac{-3}{\sqrt{x+\sqrt{3}}} \right) &= \lim_{x \rightarrow 3} \left(g(x) \right) \left(\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{-3}{\sqrt{x+\sqrt{3}}} \right) \right) && \text{(Sifat 2.3).} \\ &= 2 \left(\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{-3}{\sqrt{x+\sqrt{3}}} \right) \right) = 2 \left(\frac{\lim_{x \rightarrow 3} -3}{\lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{x+\sqrt{3}})} \right) && \text{(Sifat 2.5).} \\ &= 2 \left(\frac{\lim_{x \rightarrow 3} (-3)}{\lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{x}) + \lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{3})} \right) && \text{(Sifat 2.3).} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \left(\frac{\lim_{x \rightarrow 3} (-3)}{\sqrt{\lim_{x \rightarrow 3} x} + \sqrt{\lim_{x \rightarrow 3} 3}} \right) && \text{(Sifat 2.7).} \\
&= 2 \left(\frac{-3}{\sqrt{3} + \sqrt{3}} \right) = 2 \left(-\frac{3}{2\sqrt{3}} \right) && \text{(Sifat 2.1).} \\
&= 2 \left(-\frac{3}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \right) = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\sqrt{3}
\end{aligned}$$

C. Limit Fungsi Aljabar



Ayo Bereksplorasi

Eksplorasi 2.3 Nilai Limit fungsi Aljabar

Pada kegiatan Eksplorasi 2.3, guru dapat menggabungkan kegiatan ini dengan Eksplorasi 2.2.

Latihan Soal Terbimbing 2.6

Dengan menggunakan sifat-sifat yang kalian pelajari pada bagian sebelumnya, tentukan $\lim_{x \rightarrow 2} (x^4 - 5x^3 + x^2 - 7)$!

Alternatif Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 2} (x^4 - 5x^3 + x^2 - 7) &= \lim_{x \rightarrow 2} (x^4) - \lim_{x \rightarrow 2} (5x^3) + \lim_{x \rightarrow 2} (x^2) - \lim_{x \rightarrow 2} 7 && \text{(Sifat 2.3).} \\
&= \lim_{x \rightarrow 2} (x^4) - 5 \lim_{x \rightarrow 2} (x^3) + \lim_{x \rightarrow 2} (x^2) - \lim_{x \rightarrow 2} 7 && \text{(Sifat 2.2).} \\
&= \left(\lim_{x \rightarrow 2} x \right)^4 - 5 \left(\lim_{x \rightarrow 2} x \right)^3 + \left(\lim_{x \rightarrow 2} x \right)^2 - \lim_{x \rightarrow 2} 7 && \text{(Sifat 2.6).} \\
&= 2^4 - 5(2^3) + 2^2 - 7 && \text{(Sifat 2.1).} \\
&= -27.
\end{aligned}$$

Latihan Soal Terbimbing 2.7

Dengan menggunakan sifat-sifat yang peserta didik pelajari pada bagian sebelumnya, tentukan $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x + 1)$!

Alternatif Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x + 1) &= \lim_{x \rightarrow 1} x^2 - \lim_{x \rightarrow 1} 2x + \lim_{x \rightarrow 1} 1 && \text{(Sifat 2.3).} \\
&= \left(\lim_{x \rightarrow 1} x \right)^2 - \lim_{x \rightarrow 1} (2x) + \lim_{x \rightarrow 1} 1 && \text{(Sifat 2.6).} \\
&= \left(\lim_{x \rightarrow 1} x \right)^2 - 2 \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 1 && \text{(Sifat 2.2).} \\
&= 1^2 - 2 + 1 = 0. && \text{(Sifat 2.1).}
\end{aligned}$$



Ayo Berpikir Kritis

Pada kegiatan ini, guru membagi peserta didik menjadi beberapa kelompok untuk mendiskusikan hasil dari Latihan Soal Terbimbing 2.5 hingga 2.7 yaitu membandingkan:

1. Hasil Latihan Soal Terbimbing 2.5 dengan nilai $f(x) = \frac{x^2-6x+8}{x^2-16x+28}$ untuk $x = 2$.
2. Hasil Latihan Soal Terbimbing 2.6 dengan nilai $f(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 - 7$ untuk $x = 2$.
3. Hasil Latihan Soal Terbimbing 2.7 dengan nilai $f(x) = x^2 - 2x + 1$ untuk $x = 1$.

Kegiatan yang telah dilakukan pada Ayo Bereksplorasi dan Ayo Berpikir Kritis, akan menghasilkan sifat berikut.



Sifat-sifat

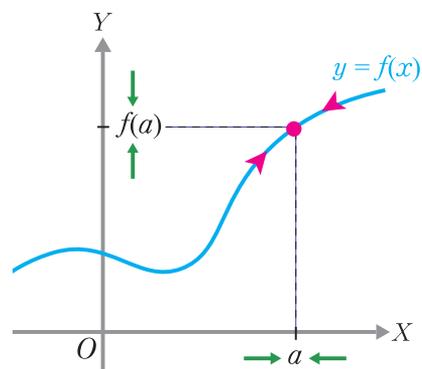
Sifat Nilai Limit Fungsi

Misalkan f sebuah fungsi $f : R \rightarrow R$ yang kontinu di c , maka $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

Catatan: fungsi polinomial, fungsi akar, fungsi rasional dan fungsi trigonometri merupakan fungsi yang kontinu di setiap titik dalam domainnya

Pada sifat nilai limit fungsi tersebut, terdapat istilah fungsi kontinu, lalu apa fungsi kontinu? Untuk mempelajari fungsi kontinu perhatikan Gambar 2.1.

Berdasarkan Gambar 2.1, jika f kontinu maka titik $(x, f(x))$ pada grafik f akan mendekati titik $(a, f(a))$. Untuk lebih jelas lagi, peserta didik dapat membandingkan dua buah fungsi $f(x) = x^2 - x$ dan $g(x) = \frac{1}{x-1}$. Dari kedua fungsi ini dapat dengan mudah diperoleh bahwa nilai $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - x) = 0$ dan $f(1) = 0$, artinya bahwa nilai $f(x)$ di $x = 1$ sama dengan nilai limitnya, yaitu 0. Fungsi $f(x)$ inilah yang disebut dengan fungsi kontinu di $x = 1$.



Gambar 2.1. Grafik Fungsi f Kontinu

Berbeda pada fungsi $g(x) = \frac{1}{x-1}$, untuk $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \infty$ dan $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = -\infty$ diperoleh $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \infty$, hal ini berarti $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ tidak ada. Begitu juga nilai fungsi $g(x)$ pada $x = 1$ adalah tidak terdefinisi. Beberapa temuan tersebut menunjukkan fungsi $g(x)$ tidak kontinu.



Definisi

Fungsi Kontinu

Fungsi $f : R \rightarrow R$ dikatakan kontinu di $a \in R$, jika

- i. $f(a)$ ada (tertentu);
- ii. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ada;
- iii. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

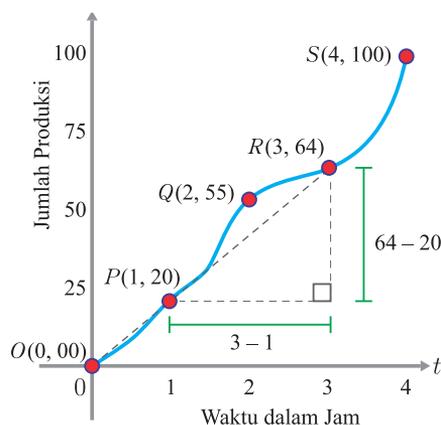
Untuk lebih memahami konsep fungsi kontinu, peserta didik dapat diarahkan untuk mempelajari Contoh Soal 2.4. Pada fungsi kontinu, terdapat beberapa kejadian khusus. Salah satu kejadian khusus tersebut adalah garis sekan. Guru dapat membimbing peserta didik dalam memahami garis sekan dengan meminta peserta didik untuk mencermati kegiatan Ayo Bereksplorasi berikut.



Ayo Bereksplorasi

Eksplorasi 2.4

Kurva pada Gambar 2.2 menunjukkan produksi sepatu sebuah industri rumah tangga di Jakarta Selatan, Indonesia, mulai dari pukul 08.00 WIB hingga pukul 12.00 WIB. Peserta didik diminta mendiskusikan bagaimana menentukan rata-rata produksi sepatu dari pukul 09.00 WIB hingga pukul 11.00 WIB? Pertanyaan tersebut dapat dijawab dengan melakukan kegiatan Ayo Mengingat Kembali.



Gambar 2.2. Kurva Laju Produksi Sepatu



Ayo Mengingat Kembali

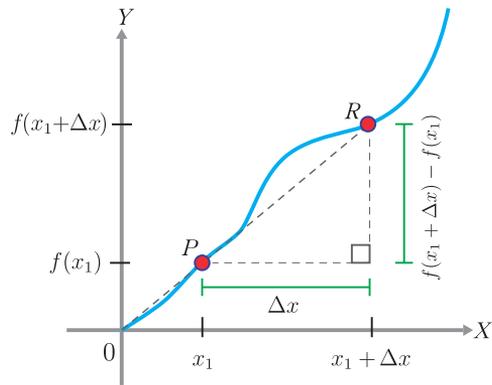
Masih ingatkah kalian bagaimana menentukan kemiringan suatu garis lurus yang melalui dua buah titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$? Kemiringan garis yang melalui dua buah titik tersebut dapat ditentukan menggunakan formula $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

1. Pada Gambar 2.2 terdapat garis lurus PR .
Kemiringan garis lurus PR adalah $= \frac{64-20}{3-1} = \frac{44}{2} = 22$.
2. Produksi dari jam 09.00 WIB sampai 11.00 WIB = $64 - 20 = 44$ buah sepatu.
interval waktu = $09.00 - 11.00 = 2$ jam.
Rata-rata laju produksi = $\frac{\text{Jumlah Produksi}}{\text{Waktu Produksi}} = \frac{44}{2} = 22$ buah sepatu per jam.
3. Kedua perhitungan menghasilkan nilai yang sama.



Ayo Berpikir Kritis

Pada kegiatan Ayo Berpikir Kritis, peserta didik diberikan kesempatan untuk berdiskusi dengan temannya terkait kegiatan Ayo Mengingat Kembali. Pada kegiatan ini, diharapkan peserta didik dapat menemukan bahwa laju perubahan dalam suatu kurva merupakan kemiringan dari garis sekannya. Pada kegiatan ini, peserta didik menemukan bahwa laju perubahan produksi sepatu sama dengan kemiringan garis PR . Apabila kita misalkan koordinat titik P adalah $(x_1, f(x_1))$ maka akan diperoleh hubungan seperti pada Gambar 2.3. Garis PR pada Gambar 2.3 merupakan garis sekan, yang didefinisikan sebagai berikut.



Gambar 2.3. Bentuk Lain dari Kurva Laju Produksi Sepatu



Definisi

Misalkan $f: R \rightarrow R$ fungsi kontinu, titik $P(x_1, f(x_1))$ dan $R(x_1 + \Delta x, f(x_1 + \Delta x))$ terletak pada kurva f . Garis yang menghubungkan titik P dan R adalah **Garis Sekan** dengan kemiringan

$$m = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$



Ayo Berpikir Kreatif

Pada aktivitas Ayo Berpikir Kreatif, guru dapat mengajak peserta didik untuk berpikir kreatif, berkolaborasi, dan percaya diri. Setiap kelompok peserta didik diharapkan dapat menemukan cara selain menerapkan sifat-sifat limit dalam menentukan nilai limit fungsi. Seperti pada Latihan Soal Terbimbing 2.7, peserta didik dapat menggunakan cara faktorisasi untuk menemukan nilai $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x + 1)$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x + 1) = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)(x - 1) = 0.$$

Guru menyampaikan bahwa terdapat dua kemungkinan untuk menentukan nilai limit fungsi aljabar. Kemungkinan pertama adalah dengan menyubstitusikan secara langsung nilai x ke fungsi limit yang dicari, sehingga peserta didik memperoleh

nilai limit yang diperoleh. Kemungkinan pertama ini sering disebut dengan nilai limit tentu karena fungsi yang didekati adalah fungsi kontinu. Kemungkinan kedua adalah dengan menyubstitusikan secara langsung nilai x ke fungsi limit yang dicari, peserta didik memperoleh nilai limit $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\infty \pm \infty$; 0^0 atau ∞^∞ . Kemungkinan kedua ini sering disebut dengan limit tak tentu.

Selanjutnya guru dapat menyampaikan bahwa untuk menentukan nilai limit tak tentu pada fungsi aljabar dapat dilakukan dengan 4 cara, yaitu (a) kaidah sifat-sifat limit fungsi, (b) ubah fungsi dengan cara memfaktorkan, (c) ubah fungsi dengan cara mengalikan dengan sekawannya, atau (d) bagi dengan pangkat tertingginya. Untuk membantu pemahaman peserta didik terkait dengan cara menentukan nilai limit bentuk tak tentu tersebut, guru dapat menyampaikan Contoh Soal 2.5 hingga 2.9.



Ayo Mencoba

Untuk memberikan penguatan kepada peserta didik, guru dapat memberikan Latihan Soal Terbimbing 2.8 hingga 2.11. Alternatif penyelesaian telah disediakan untuk membantu guru.

Latihan Soal Terbimbing 2.8

Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2}\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}$!

Alternatif Penyelesaian:

Untuk $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2}\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}$ merupakan bentuk limit tak tentu, karena nilai $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2}\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}$ adalah $\frac{0}{0}$. Dengan menggunakan faktorisasi, peserta didik dapat menyelesaikan $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2}\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2}\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x}(\sqrt{x+2})}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x+2}) = (0+2) = 2.$$

Jadi, nilai $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2}\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}$ adalah 2.

Latihan Soal Terbimbing 2.9

Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{x}$!

Alternatif Penyelesaian:

Untuk $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{x}$ merupakan bentuk limit tak tentu, karena nilai $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{x}$ adalah $\frac{0}{0}$.

Dengan menggunakan faktor sekawan, peserta didik dapat menentukan nilai limit tersebut.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{x} \right) \left(\frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{x-1})^2}{x\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x}{x\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} \right) = \frac{2}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = 1.\end{aligned}$$

Jadi, nilai $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{x}$ adalah 1.



Cek Dengan *Photomath*

Guru menyarankan kepada peserta didik untuk dapat memeriksa jawaban yang telah diperoleh menggunakan *Photomath*. Hasil yang diperoleh untuk Latihan Soal Terbimbing 2.9 adalah 1.

Latihan Soal Terbimbing 2.10

Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+3} - \sqrt{x-2})$!

Alternatif Penyelesaian:

Untuk $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+3} - \sqrt{x-2})$ merupakan bentuk limit tak tentu, karena nilai $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+3} - \sqrt{x-2})$ adalah $\infty - \infty$. Dengan menggunakan faktor sekawan, peserta didik dapat menyelesaikan $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+3} - \sqrt{x-2})$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+3} - \sqrt{x-2}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left((\sqrt{x+3} - \sqrt{x-2})(\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2}) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left((\sqrt{x+3})^2 - (\sqrt{x-2})^2 \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} ((x+3) - (x-2)) = \lim_{x \rightarrow \infty} (5) = 5.\end{aligned}$$

Jadi, nilai $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+3} - \sqrt{x-2})$ adalah 5.

Latihan Soal Terbimbing 2.11

Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4}{2x^2 + x + 1}$!

Alternatif Penyelesaian:

Untuk menyelesaikan $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4}{2x^2 + x + 1}$, peserta didik bisa menggunakan pembagi pangkat tertinggi. Dengan menggunakan x^2 untuk membagi fungsi $\frac{3x^2 - 4}{2x^2 + x + 1}$, diperoleh $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4}{2x^2 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x^2 - 4}{x^2}}{\frac{2x^2 + x + 1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{4}{x^2}}{2 + \frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \frac{3}{2}$.

Jadi, nilai $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4}{2x^2 + x + 1}$ adalah $\frac{3}{2}$.



Ayo Mencoba

Pada aktivitas Ayo Mencoba, guru dapat membimbing peserta didik untuk menerapkan beberapa strategi menentukan nilai limit fungsi yang telah dipelajari sebelumnya dalam menyelesaikan masalah pada Latihan Soal 2.3.

Latihan Soal 2.3

1. Tentukan nilai dari limit berikut

a. $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{x^3 - 7}{x - 3}}$

b. $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{\frac{x^2 - 16}{x - 4}}$

c. $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{(h-1)^3 + 1}{h} \right)$

d. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x} \right)$

Alternatif Penyelesaian:

a. $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{x^3 - 27}{x - 3}} = \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{(x-3)(x^2 + 3x + 9)}{x - 3}} = \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{(x^2 + 3x + 9)} = \sqrt{9 + 9 + 9} = 3\sqrt{3}$.

b. $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{(h-1)^3 + 1}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{h^3 - 3h^2 + 3h - 1 + 1}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{h(h^2 - 3h + 3)}{h} \right)$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} (h^2 - 3h + 3) = 0^2 - 3(0) + 3 = 3$.

c. $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{\frac{x^2 - 16}{x - 4}} = \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{\frac{(x-4)(x+4)}{x - 4}} = \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x + 4} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

d. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\left(\frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x} \right) \left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{1 + \sqrt{1 - x^2}} \right) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - (\sqrt{1 - x^2})^2}{x(1 + \sqrt{1 - x^2})} \right)$
 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2}{x(1 + \sqrt{1 - x^2})} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}} \right) = \frac{0}{2} = 0$.

2. Tentukan nilai limit berikut:

a. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 7}{\sqrt{4x^2 + 3x}} \right)$

b. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{x^2 - x + 1}}{2x - 2} \right)$

c. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 2x - x^2 + 6x^5 + 6}{3x^4 - 5 - 2x + 2x^5}$

d. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{4x^2 + 4x - 3} - (2x - 5) \right)$

Alternatif Penyelesaian:

a. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 7}{\sqrt{4x^2 + 3x}} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (x + 7)}{\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{4x^2 + 3x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (x + 7)}{\sqrt{\lim_{x \rightarrow \infty} (4x^2 + 3x)}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{7}{x} \right)}{\sqrt{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(4 + \frac{3}{x} \right)}} = \frac{1 + \frac{7}{\infty}}{4 + \frac{3}{\infty}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$.

b. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{x^2 - x + 1}}{2x - 2} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 - x + 1}}{\lim_{x \rightarrow \infty} (2x - 2)} = \frac{\sqrt{\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - x + 1)}}{\lim_{x \rightarrow \infty} (2x - 2)} = \frac{\sqrt{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{2}{x} \right)} = \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty}}}{2 - \frac{2}{\infty}} = \frac{1}{2}$.

$$c. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 2x - x^2 + 6x^5 + 6}{3x^4 - 5 - 2x + 2x^5} = \frac{6}{2} = 3.$$

$$\begin{aligned}
 d. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{4x^2 + 4x - 3} - (2x - 5) \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(\sqrt{4x^2 + 4x - 3} - (2x - 5) \right) \frac{(\sqrt{4x^2 + 4x - 3} + (2x - 5))}{(\sqrt{4x^2 + 4x - 3} + (2x - 5))} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{4x^2 + 4x - 3})^2 - (2x - 5)^2}{(\sqrt{4x^2 + 4x - 3} + (2x - 5))} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4x^2 + 4x - 3) - (4x^2 - 20x + 25)}{(\sqrt{4x^2 + 4x - 3} + (2x - 5))} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{24x - 28}{(\sqrt{4x^2 + 4x - 3} + (2x - 5))} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{24x}{x} - \frac{28}{x}}{\left(\sqrt{\frac{4x^2}{x^2} + \frac{4x}{x^2} - \frac{3}{x^2}} + \left(\frac{2x}{x} - \frac{5}{x} \right) \right)} = \frac{24}{\sqrt{4} + 2} = 6.
 \end{aligned}$$

3. Jika fungsi $f(x) = x + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 2x}}$, tentukan $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$!

Alternatif Penyelesaian:

Jika fungsi $f(x) = x + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 2x}}$, maka

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{x + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 2x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(x + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 2x}} \right) \left(\frac{1}{x} \right) \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 2x}} \right) = 2$$

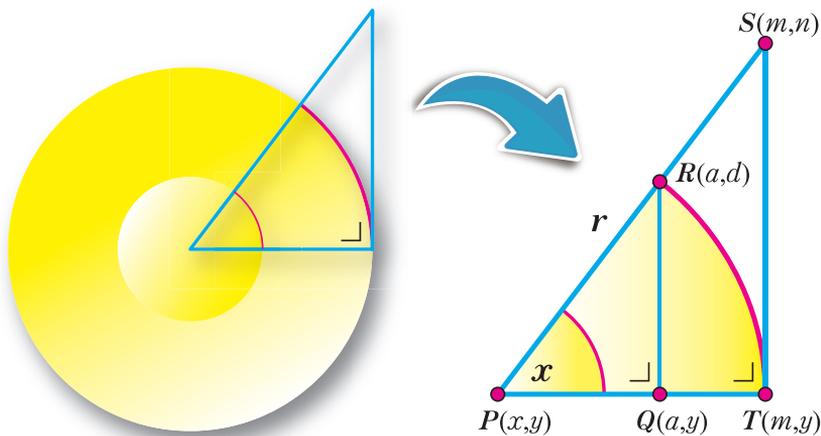
D. Limit Fungsi Trigonometri

Sebelum membahas tentang materi limit fungsi trigonometri, guru dapat memberikan tes diagnostik kognitif dan non kognitif yang terdapat pada kegiatan Ayo Mengingat Kembali materi Lingkaran di Bab 1 Geometri Analitik. Selanjutnya guru dapat memberikan penjelasan tentang $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ dan $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Adapun untuk menunjukkan $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ dan $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, guru dapat menggunakan kegiatan Eksplorasi 2.5.



Ayo Bereksplorasi

Pada kegiatan Eksplorasi 2.5, guru meminta peserta didik untuk memperhatikan Gambar 2.4 dan melengkapi beberapa pertanyaan yang muncul. Jawaban dari pertanyaan tersebut dapat diisikan pada bagian yang belum terisi. Dalam hal ini, bagian yang perlu diisi adalah bagian yang masih tertulis "...".



Gambar 2.4. Interpretasi Geometri Sudut Pusat Lingkaran.

Berdasarkan Gambar 2.4, titik $P(x,y)$ adalah pusat lingkaran yang berjari-jari $PR = PT = r$. Sudut $\angle TPR$ adalah sudut lancip, misalkan besar sudut tersebut adalah x (dalam radian). Garis singgung di titik $T(m,y)$ memotong garis PR di titik $S(m,n)$. Titik $Q(a,y)$ adalah proyeksi titik $R(a,d)$ pada garis PT . Dari pernyataan ini diperoleh:

1. Terdapat 2 buah segitiga, yaitu ΔPQR dan ΔPTS .
2. Terdapat juring lingkaran yaitu juring PTR .
3. Luas ΔPQR adalah

$$\begin{aligned} L_{\Delta PQR} &= \frac{1}{2}(PQ)(QR). \\ &= \frac{1}{2}(PR \cos x)(PR \sin x) = \frac{1}{2}(r)^2 \cos x \sin x. \end{aligned}$$

4. Luas ΔPTS adalah

$$\begin{aligned} L_{\Delta PTS} &= \frac{1}{2}(PT)(TS). \\ &= \frac{1}{2}(PT)(PT \tan x) = \frac{1}{2}(r)^2 \tan x. \end{aligned}$$

5. Luas juring $PTR = \frac{x}{2\pi}$ (luas lingkaran).

$$\text{Luas juring } PTR = \frac{x}{2\pi} \times (\pi r^2) = \frac{1}{2} x(r)^2.$$

Dari luas ΔPQR , ΔPTS dan luas juring PTR , dapat diperoleh hubungan Luas $\Delta PQR <$ Luas Juring $PTR <$ Luas ΔPTR , sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} r^2 \cos x \sin x &< \frac{1}{2} x r^2 < \frac{1}{2} r^2 \tan x. \\ \cos x \sin x &< x < \tan x. \\ \cos x &< \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}. \end{aligned}$$

Pada kegiatan Eksplorasi 2.5 ini peserta didik telah memperoleh hubungan antara luas ΔPQR , ΔPTS dan luas juring PTR adalah $\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$. Selanjutnya, Jika $x \rightarrow 0$, maka $\cos x = 1$. Hal ini berarti bahwa $1 < \frac{x}{\sin x} < 1$. Jadi, nilai $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$.

Di sisi lain, Bentuk $\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ dapat pula dinyatakan dalam $\cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}$. Oleh karena itu, jika $x \rightarrow 0$, maka $\cos x = 1$. Hal ini berarti bahwa $1 < \frac{\sin x}{x} < 1$. Jadi, nilai $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Dalam kegiatan ini diperoleh $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ dan $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.



Ayo Berdiskusi

Pada kegiatan Ayo Berdiskusi, peserta didik dapat mendiskusikan sifat

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$

Saat kegiatan, guru mengajak peserta didik untuk berani menyampaikan pendapatnya dan dapat belajar secara mandiri. Harapannya peserta didik dapat menemukan secara mandiri proses menemukan ketiga sifat tersebut. Apabila peserta didik mengalami kesulitan untuk menunjukkan sifat tersebut, guru dapat memberikan bimbingan untuk menjelaskan ketiga sifat tersebut. Dari persamaan

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, \text{ dengan mengalikan } \sin x \text{ pada setiap ruas diperoleh}$$

$$\cos x \sin x < x < \tan x.$$

- Dengan membagi $\tan x$ untuk setiap ruas diperoleh

$$\frac{\cos x \sin x}{\tan x} < \frac{x}{\tan x} < \frac{\tan x}{\tan x}$$

$$\cos^2 x < \frac{x}{\tan x} < 1$$

Jika $x = 0$ maka diperoleh $\cos x = \cos 0 = 1$, sehingga $1 < \frac{x}{\tan x} < 1$. Akibatnya $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = 1$ atau $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$.

- Dari $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \right) \cos x = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$.

Selanjutnya, guru dapat menjelaskan dan menyampaikan bahwa selain sifat-sifat limit fungsi yang telah dipelajari pada bagian sebelumnya, peserta didik harus mengetahui dan memahami sifat-sifat limit fungsi trigonometri. Adapun sifat limit trigonometri di antaranya adalah:



Sifat-sifat

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{bx}{\sin ax} = \frac{b}{a}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{bx}{\tan ax} = \frac{b}{a}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{bx} = \frac{a}{b}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$

Untuk penguatan pemahaman materi, guru dapat membimbing peserta didik untuk memperhatikan Contoh Soal 2.10 hingga 2.13 yang ada pada Buku Siswa. Guru dapat menggunakan contoh soal lain yang relevan agar peserta didik dapat memahami materi limit fungsi trigonometri.



Ayo Mencoba

Untuk mengetahui kemampuan peserta didik untuk memahami materi limit fungsi trigonometri, guru dapat melakukan tanya jawab berkaitan dengan limit fungsi trigonometri seperti pada Latihan Soal Terbimbing 2.12 hingga 2.14.

Latihan Soal Terbimbing 2.12

Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x + 2x}{\sin x + 2x}$!

Alternatif Penyelesaian:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x + 2x}{\sin x + 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{\sin x}{\cos x} + 2x}{\sin x + 2x} \right).$$

Dengan mengalikan $\frac{\cos x}{\cos x}$, diperoleh bahwa

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\left(\frac{\sin x}{\cos x} + 2x \right) \left(\frac{\cos x}{\cos x} \right) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x + 2x \cos x}{\sin x \cos x + 2x \cos x} \right).$$

Dengan mengingatkan bahwa identitas

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x, \text{ diperoleh}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x + 2x}{\sin x + 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x + 2x \cos x}{\frac{1}{2} \sin 2x + 2x \cos x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x \left(\frac{\sin x}{x} + 2 \cos x \right)}{x \left(\frac{\sin 2x}{2x} + 2 \cos x \right)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} + 2 \cos x \right)}{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x} + 2 \cos x \right)} \\
&= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cos x}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} + \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cos x} = \frac{1+2}{1+2} = 1.
\end{aligned}$$

Jadi, nilai $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x + 2x}{\sin x + 2x}$ adalah 1.



Cek Dengan *Photomath*

Guru menyarankan peserta didik memeriksa jawaban yang telah diperoleh menggunakan *Photomath*. Hasil yang diperoleh untuk Latihan Soal Terbimbing 2.12 adalah 1.

Latihan Soal Terbimbing 2.13

Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x}$!

Alternatif Penyelesaian:

Alternatif penyelesaian $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\left(\frac{1 - \cos x}{\sin x} \right) \left(\frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} \right) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos^2 x}{\sin x (1 + \cos x)} \right)$.

dengan mengingat identitas bahwa $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ atau $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$, diperoleh

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^2 x}{\sin x (1 + \cos x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{1 + \cos x} \right) = 0.$$

Jadi, nilai $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x}$ adalah 0.

Latihan Soal Terbimbing 2.14

Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x \sin x}$!

Alternatif Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x \sin x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x \sin^2 x}{\cos x \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\cos x - \sin x} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\cos x + \sin x) \\
&= \cos 45^\circ + \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{2} + \frac{1}{2} \sqrt{2} = \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Jadi, nilai $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x \sin x}$ adalah $\sqrt{2}$.



Ayo Mencoba

Pada aktivitas Ayo Mencoba, guru dapat membimbing peserta didik untuk menerapkan beberapa sifat limit fungsi trigonometri yang telah dipelajari sebelumnya dalam menyelesaikan masalah pada Latihan Soal 2.4.

Latihan Soal 2.4

1. Tentukan nilai dari:

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 6x}$ b. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 7x + \tan 3x - \sin 5x}{\tan 9x - \tan 3x - \sin x} \right)$ c. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x^2 + x}{\sin x} \right)$ d. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos^2 x}{5x^2} \right)$

Alternatif Penyelesaian:

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 6x} = \frac{2}{6}$.

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x^2 + x}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x^2}{\sin x} + \frac{x}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x^2}{\sin x} \right) + \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \right)$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} (2x) \left(\frac{x}{\sin x} \right) + \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \right) = (0)(1) + 1 = 1$.

d. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos^2 x}{5x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^2 x}{5x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x \sin x}{5xx} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{5x} \right) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = \frac{1}{5}(1) = \frac{1}{5}$.

2. Tentukan nilai dari

a. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 x}{\cos^2 x}$ b. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{2x - \pi}{\cos x} \right)$ c. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sec^2 x}{\tan^2 x} \right)$ d. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin x - \cos x}{1 - \tan x} \right)$

Alternatif Penyelesaian:

a. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 x}{\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 - \sin^2 x}{1 - \sin^2 x} \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} 1 = 1$.

b. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2x - \pi}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{2x - \pi}{\sin \frac{\pi}{2} \cos x - \cos \frac{\pi}{2} \sin x} \right) = 2 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\frac{\pi}{2} - x}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right)} \right)$
Misalkan $y = \frac{\pi}{2} - x$.
Perhatikan bahwa jika x mendekati $\frac{\pi}{2}$ maka y mendekati 0, sehingga
 $-2 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\frac{\pi}{2} - x}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right)} \right) = -2 \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{y}{\sin y} \right) = (-2)1 = -2$.

c. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sec^2 x}{\tan^2 x} \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \tan^2 x}{\tan^2 x} \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\tan^2 x} \right) + \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\tan^2 x}{\tan^2 x} \right)$
 $= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \right) + \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} 1 = \frac{\cos^2 \frac{\pi}{2}}{\sin^2 \frac{\pi}{2}} + 1 = 0 + 1 = 1$.

d. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin x - \cos x}{1 - \tan x} \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin x - \cos x}{1 - \frac{\sin x}{\cos x}} \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin x - \cos x}{\frac{\cos x - \sin x}{\cos x}} \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{(\sin x - \cos x) \cos x}{\cos x - \sin x} \right)$
 $= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (-\cos x) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2} \sqrt{2}$.

3. Tentukan nilai dari $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, untuk fungsi $f(x) = \sin 2x$.

Alternatif Penyelesaian:

Nilai dari $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, untuk fungsi $f(x) = \sin 2x$.

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin 2(x+h)-\sin 2x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(2x+2h)-\sin 2x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \cos 2h + \cos 2x \sin 2h - \sin 2x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x \cos 2h - \sin 2x}{h} \right) + \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\cos 2x \sin 2h}{h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x (\cos 2h - 1)}{h} \right) + \lim_{h \rightarrow 0} (\cos 2x) \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2h}{h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x (\cos 2h - 1)}{h} \right) + 2 \lim_{h \rightarrow 0} (\cos 2x) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (\sin 2x) \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\cos 2h - 1}{h} \right) + 2 \lim_{h \rightarrow 0} (\cos 2x) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (\sin 2x) \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1 - 2\sin^2 h - 1}{h} \right) + 2 \lim_{h \rightarrow 0} (\cos 2x) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (\sin 2x) \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{-2\sin^2 h - 1}{h} \right) + 2 \lim_{h \rightarrow 0} (\cos 2x) \\ &= (\sin 2x)(1)(-2\sin 0) + 2\cos 2x = 2\cos 2x.\end{aligned}$$

4. Tunjukkan bahwa $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{x} \right) = 1!$

Alternatif Penyelesaian:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x}}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\left(\frac{\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x}}{x} \right) \left(\frac{\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x}} \right) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(1+\sin x) - (1-\sin x)}{x(\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x})} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2\sin x}{x(\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x})} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 \left(\frac{\sin x}{x} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x}} \right) \right) \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x}} \right) \\ &= \left(2(1) \left(\frac{1}{\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x}} \right) \right) = 2(1) \left(\frac{1}{2} \right) = 1.\end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{x} \right) = 1$.

E. Aplikasi Limit Fungsi

Pada bagian akhir materi limit, guru dapat menyampaikan masalah limit yang berkaitan dengan masalah penyebaran virus Covid-19, seperti Contoh Soal 2.14 yang ada pada Buku Siswa. Dengan memberikan masalah limit yang disesuaikan dengan kondisi saat ini dan disesuaikan dengan masalah kehidupan sehari-hari, diharapkan peserta didik memiliki motivasi untuk mempelajari limit dan menganggap bahwa mempelajari matematika sangat bermanfaat untuk menyelesaikan permasalahan sehari-hari.

Masalah Penyebaran Virus

Permasalahan yang saat ini terjadi di seluruh dunia adalah adanya Covid-19. Seluruh negara di dunia menerapkan berbagai strategi untuk mengatasi penyebaran Covid-19. Salah satu strateginya adalah pemberian vaksin untuk seluruh penduduknya, dengan harapan vaksin tersebut dapat meringankan gejala bagi penduduk yang terpapar Covid-19 dan dapat memberikan imun yang baik bagi penduduk yang tidak terpapar Covid-19.



Gambar 2.5. Tenaga medis dan masyarakat yang menyukseskan program vaksin Covid-19
Sumber www.freepik.com/rawpixel-com (2021)

Permasalahannya, apakah vaksinasi tersebut dapat menekan jumlah penduduk positif Covid-19? Jika vaksinasi dilakukan untuk seluruh penduduk suatu kota, berapa estimasi jumlah kasus positif Covid-19 pada kota tersebut? Pertanyaan tersebut dapat dijawab dengan menerapkan konsep dasar limit fungsi.

Contoh Soal 2.14 yang ada pada Buku Siswa adalah: Salah satu kota di Indonesia akan melakukan vaksinasi untuk menekan jumlah kasus positif Covid-19. Target vaksinasi adalah penduduk dengan umur di atas 18 tahun karena belum ada vaksin untuk umur di bawahnya dan hanya bisa dilakukan pada penduduk yang belum pernah terpapar Covid-19. Jumlah penduduk kota tersebut adalah 57.260 orang, dengan 30% dari penduduk tersebut terkonfirmasi positif Covid-19. Satuan tugas penanganan Covid-19 di kota tersebut memodelkan fungsi $N(t) = 285000 - \sqrt{t^2 - t + (190,68)^3}$ yang mewakili jumlah penduduk positif Covid-19, dengan t menyatakan banyaknya vaksinasi. Jika terdapat 121.015 orang belum pernah terpapar Covid-19 berumur di bawah 18 tahun, berapakah penduduk yang positif Covid-19 dan sudah divaksin? Tentukan total kasus positif Covid-19 di kota tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

Berdasarkan permasalahan di atas, diketahui bahwa jumlah penduduk kota tersebut adalah 57.260, 30% dari penduduk positif Covid-19, dan terdapat 121.015 orang belum pernah terpapar Covid-19 yang berumur di bawah 18 tahun. Karena vaksin hanya bisa diberikan pada penduduk dengan umur tidak kurang dari 18 tahun, maka target vaksinasi dapat ditentukan dengan menggunakan formula $= (576260 - (\frac{30}{100} \times 576260)) - 121015 = 282367$ orang. Fungsi $N(t) = 285000 - \sqrt{t^2 - t + (190,68)^3}$ mewakili jumlah penduduk positif Covid-19 dengan t mewakili banyaknya vaksinasi. Untuk menentukan jumlah penduduk yang positif Covid-19 yang divaksin dan total kasus positif Covid-19 di kota tersebut, perhatikan penyelesaian di bawah ini.

1. Vaksinasi tidak bisa dilakukan secara serentak, sehingga jumlah vaksinasi akan mendekati 282.367 orang. Berdasarkan hal ini, jumlah penduduk yang positif Covid-19 selama vaksinasi dapat dicari dengan formula

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 282367} \left(285000 - \sqrt{t^2 - t + (190,68)^3} \right) &= 285000 - \sqrt{(282367)^2 - 282367 + (190,68)^3} \\ &= 2621,2238 \approx 2622 \text{ orang.} \end{aligned}$$

Jadi, jumlah penduduk yang positif Covid-19 selama vaksinasi adalah 2622 jiwa.

2. Total kasus positif Covid-19 di kota tersebut = $\left(\frac{30}{100} \times 576260\right) + 2622 = 175.500$ orang.

Selain menyampaikan Contoh Soal 2.14 yang ada pada Buku Siswa, guru juga dapat memberikan permasalahan limit dengan konteks kehidupan sehari-hari. Pada Buku Siswa, permasalahan tersebut dapat ditemukan pada Latihan Soal 2.5 dan kegiatan Eksplorasi 2.6.



Ayo Bereksplorasi

Pada kegiatan Ayo Bereksplorasi, guru membentuk kelompok yang terdiri dari 4-5 peserta didik. Guru mengajak peserta didik untuk belajar bekerja sama dan berani menyampaikan gagasannya. Selanjutnya, guru menyampaikan kepada peserta didik untuk mencari satu masalah limit yang ada di lingkungan sekitar. Setiap kelompok diminta untuk bersepakat masalah mana yang akan didiskusikan di setiap kelompok. Setelah disepakati bentuk masalahnya, bersama dengan teman sekelompok berdiskusi untuk menyelesaikan permasalahan tersebut. Guru memfasilitasi setiap kelompok untuk mempresentasikan hasil diskusinya.



Soal Berpikir Kreatif

Guru dapat mengarahkan peserta didik untuk menyelesaikan masalah Soal Berpikir Kreatif yaitu Latihan Soal 2.5, yang berkaitan dengan limit fungsi trigonometri.

Latihan Soal 2.5

1. Seorang dokter melakukan pemeriksaan denyut nadi pada pasiennya yang baru saja sembuh dari penyakit jantung. Pemeriksaan tersebut dilakukan untuk mengetahui apakah pasien tersebut kemungkinan akan mengalami serangan jantung lagi atau tidak. Banyaknya denyut nadi pasien tersebut dihitung dengan mengikuti fungsi estimasi $f(x) = 85 + \frac{(x^2 + x - 2)\cos(\frac{1}{x-1})}{x^2 - 2x + 1}$ dengan x adalah waktu jantung berdetak. Apabila variabel yang menyebabkan penyakit jantung kambuh atau tidak hanya dilihat dari denyut nadi seseorang (standar denyut nadi manusia 60 – 100 kali per menit), apakah pasien tersebut berpeluang mengalami serangan jantung lagi? Berikan alasanmu!

Alternatif Penyelesaian:

Guru dapat menyampaikan kepada peserta didik bahwa jantung akan selalu berdetak sepanjang manusia hidup, sehingga waktu jantung berdetak akan mendekati tak hingga.

Diketahui bahwa banyaknya denyut jantung pasien dihitung mengikuti fungsi estimasi $f(x) = 85 + \frac{(x^2+x-2)\cos(\frac{1}{x-1})}{x^2-2x+1}$ dengan x adalah waktu jantung berdetak. Jantung manusia akan terus berdetak selama ia hidup, sehingga nilai x akan mendekati tak hingga. Berdasarkan informasi ini, maka banyaknya denyut nadi pasien dapat dicari menggunakan formula:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(85 + \frac{(x^2+x-2)\cos(\frac{1}{x-1})}{x^2-2x+1} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(85 + \frac{(x+2)(x-1)\cos(\frac{1}{x-1})}{(x-1)(x-1)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(85 + \frac{(x+2)\cos(\frac{1}{x-1})}{(x-1)} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} 85 + \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(x+2)}{(x-1)} \right) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos\left(\frac{1}{x-1}\right) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} 85 + \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(1+\frac{2}{x})}{(1+\frac{1}{x})} \right) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos\left(\frac{1}{x-1}\right) \right) = 85 + \frac{(1+\frac{2}{\infty})}{(1+\frac{1}{\infty})} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos\left(\frac{1}{x-1}\right) \right) \\ &= 85 + 1 \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos\left(\frac{1}{x-1}\right) \right) = 85 + \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos\left(\frac{1}{x-1}\right) \right).\end{aligned}$$

Misalkan $\frac{1}{x-1} = y$, maka untuk x mendekati ∞ , y akan mendekati 0, sehingga

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} 85 \left(\frac{(x^2+x-2)\cos(1+\frac{2}{x})}{x^2-2x+1} \right) = 85 + \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos\left(\frac{1}{x-1}\right) \right) = 85 + \lim_{y \rightarrow 0} (\cos y) = 85 + 1 = 86.$$

Hal ini berarti banyaknya denyut nadi pasien sebesar 86 kali per menit.

Guru dapat menyampaikan kepada peserta didik bahwa untuk orang dewasa dengan denyut nadi diluar rentang 60–100 kali per menit dapat memicu penyakit jantung. Karena banyaknya denyut nadi pasien masih di antara 60 sampai 100, maka pasien tersebut tidak berpeluang mengalami serangan jantung lagi.

2. Posisi suatu benda di udara yang jatuh dari ketinggian h_0 (dalam meter) dapat dinyatakan dengan persamaan $h(t) = h_0 - gt^2$ dengan $g = 10 \text{ m/s}^2$ merupakan percepatan gravitasi di tempat benda jatuh dan t (dalam detik) menyatakan lama benda telah berada di udara. Apabila suatu benda dijatuhkan dari ketinggian 250 meter dari permukaan tanah, tentukan setelah t detik benda ini berada pada ketinggian $h(t) = 250 - 10t^2$!

Alternatif Penyelesaian:

$$v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(t+h) - h(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{250 - 10(t+h)^2 - (250 - 10t^2)}{h}$$

$$v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-20th - 10h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-20t - 10h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-20t - 10h) = (-20 - 10(0)).$$

$$v(t) = -20t$$

Dengan menyubstitusikan $t = 1$, maka kecepatan benda adalah -20 m/s . Tanda negatif tersebut mewakili arah gerak benda, karena kecepatan adalah besaran yang memiliki nilai dan arah.

3. Jumlah penduduk kota A untuk t tahun dari sekarang ditaksir dan dinyatakan oleh fungsi berikut $f(t) = 50.000 + 10.000(t + 2)^2$. Berapa perkiraan jumlah penduduk kota A dalam waktu yang sangat lama di masa yang akan datang?

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan jumlah penduduk tersebut dinyatakan dengan N , maka

$$N = \lim_{t \rightarrow \infty} 50.000 + 10.000(t + 2)^2 = \lim_{t \rightarrow \infty} 50.000 + 10.000(t^2 + 4t + 4)$$

$$N = \lim_{t \rightarrow \infty} 50.000 + 10.000(t + 2)^2 = \lim_{t \rightarrow \infty} 50.000 + 10.000(t^2 + 4t + 4).$$

$$N = 50.000 + 10.000 = 60.000.$$

Jadi jumlah penduduk dalam waktu yang lama di masa mendatang adalah 60.000 jiwa.



Interaksi Guru dengan Orang Tua

Guru memberitahukan kepada peserta didik, bahwa mereka belajar di rumah untuk mengerjakan tugas pada Buku Siswa Latihan Soal 2.1 sampai Latihan Soal 2.5 dan Uji Kompetensi bersama orang tua atau wali murid. Guru memberi tahu orangtua atau wali murid untuk mengingatkan, membimbing, dan mengawasi putra-putrinya untuk mengerjakan tugas di rumah, serta memberi paraf pada hasil kerjanya. Dijelaskan pula bahwa yang harus dilakukan orang tua adalah membimbing, bukan mengerjakan tugas. Interaksi ini dapat dilakukan melalui pertemuan, sms, telepon, grup media sosial, atau buku penghubung. Jika orang tua belum jelas cara membimbingnya dipersilakan menghubungi guru.

Uji Kompetensi

1. Tentukan nilai dari:

a. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{(x+1) - \sqrt{10+2x}}$

b. $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 2x + 5)$

c. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{x-4} - \sqrt{9x-1}}{\sqrt{4x+5} - \sqrt{x-7}} \right)$

d. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{10x^3 + 8x}{x+1} \right)^{\frac{1}{5}}$

Alternatif Penyelesaian:

a. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{(x+1) - \sqrt{10+2x}} = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^2 - 9}{(x+1) - \sqrt{10+2x}} \right) \left(\frac{(x+1) + \sqrt{10+2x}}{(x+1) + \sqrt{10+2x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - 9)((x+1) + \sqrt{10+2x})}{(x+1)^2 - (\sqrt{10+2x})^2}$
 $= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - 9)((x+1) + \sqrt{10+2x})}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+1) + \sqrt{10+2x} = 8.$

b. $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 2x + 5) = 3(1)^2 - 2(1) + 5 = 6.$

c. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x-4} - \sqrt{9x-1}}{\sqrt{4x+5} - \sqrt{x-7}} = \frac{\sqrt{1} - \sqrt{9}}{\sqrt{4} - \sqrt{1}} = \frac{1-3}{2-1} = -2.$

d. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{10x^3 + 8x}{x+1} \right)^{\frac{1}{5}} = \left(\frac{10(2)^3 + 8(2)}{(2)+1} \right)^{\frac{1}{5}} = 32^{\frac{1}{5}}.$

2. Tentukan nilai dari:

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 2x}{(x+1) - \sqrt{10+2x}}$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cos x}{\sin 3x + \sin x}$

c. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{8}} \left(\frac{\tan(6x - \frac{3}{4}\pi)}{\tan(2x - \frac{1}{4}\pi)} \right)$

d. $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\cos x - \cos a}{x - a} \right)$

Alternatif Penyelesaian:

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 2x}{(x+1) - \sqrt{10+2x}} = 0.$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cos x}{\sin 3x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cos x}{2 \sin 2x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin 2x} \right) = \frac{1}{2}.$

c. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{8}} \left(\frac{\tan(6x - \frac{3}{4}\pi)}{\tan(2x - \frac{1}{4}\pi)} \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{8}} \left(\frac{\tan(3(2x - \frac{1}{4}\pi))}{\tan(2x - \frac{1}{4}\pi)} \right).$

Misalkan $y = 2x - \frac{1}{4}\pi$, maka untuk $x \rightarrow \frac{\pi}{8}$, $y \rightarrow 0$, sehingga

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{8}} \left(\frac{\tan(6x - \frac{3}{4}\pi)}{\tan(2x - \frac{1}{4}\pi)} \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{8}} \left(\frac{\tan(3(2x - \frac{1}{4}\pi))}{\tan(2x - \frac{1}{4}\pi)} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{\tan 3y}{\tan y} \right) = 3.$$

$$\begin{aligned}
 \text{d. } \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\cos x - \cos a}{x - a} \right) &= \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{-2 \sin \frac{1}{2}(x+a) \sin \frac{1}{2}(x-a)}{x-a} \right) \\
 &= -2 \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin \frac{1}{2}(x-a)}{x-a} \sin \frac{1}{2}(x+a) \right) \\
 &= -2 \left(\frac{1}{2} \right) \lim_{x \rightarrow a} \left(\sin \frac{1}{2}(x+a) \right) = -2 \left(\frac{1}{2} \right) \left(\sin \frac{1}{2}(a+a) \right) = -\sin a.
 \end{aligned}$$

3. Sebuah mobil bergerak dapat dinyatakan dengan suatu fungsi $S(t) = t^2 + 5t$ (s dalam meter dan t dalam detik). Tentukan kecepatan mobil pada $t = 2$ detik!!

Alternatif Penyelesaian:

$$v = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}.$$

$$\text{Untuk } t = 2, \text{ maka } v = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(2+h)^2 + 5(2+h)] - (2^2 + 5 \cdot 2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9h + h^2}{h}.$$

$$\text{Sehingga } v = \lim_{h \rightarrow 0} (9 + h) = 9.$$

Jadi, kecepatan sesaat pada $t = 2$ detik adalah 9 m/detik.



Soal Berpikir Kreatif

4. Suatu lembaga sensus diminta memprediksi kepadatan penduduk maksimal di sebuah kota dengan luas 100 km^2 . Lembaga menyatakan jumlah penduduk di kota tersebut dalam bentuk fungsi estimasi $f(x) = 35.000 + x \sin \frac{40.000}{x}$ dengan x mewakili tahun. Berapakah kepadatan penduduk maksimal kota tersebut? Apakah kota tersebut layak dihuni hingga jangka panjang? Berikan alasannya! (Catatan: suatu kota dikatakan layak huni jika tingkat kepadatan penduduknya tidak lebih dari 500 penduduk per km^2).

Alternatif Penyelesaian:

Guru dapat menyampaikan kepada peserta didik bahwa untuk menyelesaikan permasalahan yang berkaitan dengan perkiraan jumlah penduduk pada waktu tertentu, peserta didik dapat melakukan perhitungan menggunakan konsep *doomsday model* yang ditemukan oleh H. Von Foerster pada tahun 1960.

Karena pada masalah tertulis “hingga jangka panjang”, dan keberadaan kota tersebut tidak dapat diprediksi kapan kota tersebut berakhir (kota tersebut tidak ada), maka guru dapat menggunakan limit mendekati tak hingga untuk menyelesaikan masalah ini.

Karena waktu yang sangat lama maka $x \rightarrow \infty$. Misalkan $y = \frac{1}{x}$ maka $x = \frac{1}{y}$, ketika $x \rightarrow \infty$ maka $y = \frac{1}{\infty}$ atau $y \rightarrow 0$, sehingga $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(35.000 + x \sin \frac{40.000}{x} \right)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(35.000 + x \sin \frac{40.000}{x} \right). \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} 35.000 + \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \sin \frac{40.000}{x} \right). \\ &= 35.000 + \lim_{\frac{1}{x} \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \sin \frac{40.000}{x} \right). \\ &= 35.000 + \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{1}{y} \sin \frac{40.000}{\frac{1}{y}} \right). \\ &= 35.000 + \lim_{y \rightarrow 0} \left(\sin \frac{40.000 y}{y} \right). \\ &= 35.000 + 40.000. \\ &= 75.000. \end{aligned}$$

Jadi, pertumbuhan penduduk kota tersebut dalam jangka waktu yang lama adalah 75.000 orang. Tingkat kepadatan penduduk di kota tersebut adalah $75.000 : 100 = 750$ penduduk per km^2 , sehingga kota tersebut tidak layak huni.

5. Sejenis penyakit menular disebabkan oleh bakteri yang memiliki spesifikasi kerja menyerang paru-paru. Bakteri tersebut biasanya menyebabkan batuk hebat pada orang yang terinfeksi saat jumlah bakteri mencapai 4000. Misalkan jumlah bakteri dinyatakan sebagai fungsi $N(t) = \frac{12000t}{15 + 2t}$ dalam puluhan, dengan t menyatakan waktu membelah diri dalam jam.
 - a. Berapakah jumlah maksimum bakteri tersebut selama ia hidup?
 - b. Kapankah orang yang terinfeksi dapat berpotensi menularkan kepada orang lain?

Alternatif Penyelesaian:

a. Berdasarkan permasalahan di atas, diketahui jumlah bakteri dinyatakan sebagai fungsi $N(t) = \frac{12000t}{15+2t}$ dalam puluhan, dengan t menyatakan waktu membelah diri dalam jam. Jumlah maksimum bakteri selama hidup dapat dicari dengan formula:

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{12000t}{15+2t} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{12000}{t}}{\frac{15}{t} + \frac{2t}{t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{12000}{\frac{15}{t} + 2} \\ &= \frac{12000}{2} = 6000 \text{ dalam puluhan.}\end{aligned}$$

Jadi, jumlah maksimum bakteri selama hidup adalah 60000 bakteri.

b. Orang yang terinfeksi dapat berpotensi menularkan bakteri saat jumlah bakteri mencapai 4000, karena pada saat itu bakteri menyebabkan batuk hebat pada orang yang terinfeksi. Waktu yang diperlukan bakteri untuk mencapai jumlah 4000 dapat dicari dengan formula:

$\lim_{t \rightarrow a} \frac{12000t}{15+2t} = 4000$, dengan a mewakili waktu untuk mencapai jumlah 4000 bakteri.

Diperoleh:

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{12000t}{15+2t} = 4000.$$

$$\frac{12000a}{15+2a} = 4000.$$

$$12000a = 4000(15 + 2a).$$

$$12000a - 8000a = 60000.$$

$$4000a = 60000.$$

$$a = 15.$$

Jadi, orang yang terinfeksi bakteri akan berpotensi menularkan kepada orang lain saat terinfeksi selama 15 jam.

Bab 3 Turunan Fungsi

Pengalaman Belajar

Setelah mempelajari bab ini, peserta didik diharapkan dapat:

1. Menemukan konsep turunan fungsi;
2. Menemukan sifat-sifat turunan fungsi meliputi: formula turunan fungsi aljabar dan trigonometri, turunan hasil jumlah, selisih, kali, dan bagi dua fungsi, serta turunan komposisi fungsi;
3. Menentukan turunan fungsi aljabar dan trigonometri menggunakan sifat-sifat turunan;
4. Mengidentifikasi konsep kemonotonan fungsi, titik dan nilai stasioner, serta jenis ekstrimnya;
5. Menyelesaikan masalah sehari-hari dengan menerapkan konsep kemonotonan fungsi, titik dan nilai stasioner, serta jenis ekstrimnya.

Peta Konsep

Turunan Fungsi



Alternatif Skema Pembelajaran

Subbab	Waktu (JP)	Tujuan	Pokok Materi	Kosakata	Bentuk metode dan aktivitas	Sumber utama	Sumber lain (Daftar Pustaka)
Definsi Turunan Fungsi	1	1. Menemukan konsep turunan fungsi.	<ul style="list-style-type: none"> Konsep Turunan Fungsi Penulisan Turunan Fungsi 	<ul style="list-style-type: none"> Turunan Turunan Fungsi 	Eksplorasi, diskusi, pemaparan, latihan soal terbimbing, dan latihan	Buku Siswa	<ul style="list-style-type: none"> [1] [6] [15] [17] [18] [20] [21] [23] [24] [27] [29] [30] [34] [32] [33] [39]
Sifat-sifat Turunan Fungsi	2	2. Menemukan sifat-sifat turunan fungsi. 3. Menentukan turunan fungsi aljabar dan trigonometri menggunakan sifat-sifat turunan.	<ul style="list-style-type: none"> Turunan Fungsi Aljabar Turunan Fungsi Trigonometri Aturan Rantai pada Turunan 	<ul style="list-style-type: none"> Fungsi Aljabar Fungsi Trigonometri Aturan Rantai 			
Aplikasi Turunan Fungsi	2	Mengidentifikasi konsep kemonotonan fungsi, titik dan nilai stasioner, serta jenis ekstrimnya	<ul style="list-style-type: none"> Persamaan Garis Singgung pada Kurva Fungsi Naik, Turun, dan Diam Titik Ekstrim, Nilai Maksimum dan Minimum 	<ul style="list-style-type: none"> Persamaan Garis Singgung Fungsi Naik, Fungsi Turun, Fungsi Diam Titik Ekstrim, Nilai Maksimum, Nilai Balik Maksimum, Nilai Balik Minimum 			
Aplikasi Turunan di berbagai Ilmu	1	Menyelesaikan masalah sehari-hari dengan menerapkan konsep kemonotonan fungsi, titik dan nilai stasioner, serta jenis ekstrimnya.	<ul style="list-style-type: none"> Aplikasi Turunan 	<ul style="list-style-type: none"> Kemonotonan Fungsi, Titik Stasioner, Nilai Stasioner, Jenis Ekstrim 			

Catatan:

- Waktu (JP) adalah jumlah atau rentang jam yang disarankan untuk pelajaran. Guru dapat beradaptasi dengan kondisi pembelajaran yang sebenarnya.
- Untuk melakukan pemeriksaan ulang jawaban yang dituliskan oleh peserta didik, guru dapat menyarankan untuk menggunakan GeoGebra. GeoGebra memiliki versi daring yang dapat digunakan secara offline di laptop dan Android. GeoGebra dapat digunakan untuk perhitungan seperti kalkulator. Hal ini juga dapat digunakan untuk menghasilkan grafik.

Elemen kalkulus yang dibahas pada bab sebelumnya adalah limit. Materi berikutnya yang masih berada pada elemen kalkulus adalah turunan. Materi ini bertujuan agar peserta didik dapat menerapkan konsep dasar kalkulus di dalam konteks pemecahan masalah dan aplikasinya diberbagai ilmu. Bagian turunan membahas tentang definisi turunan fungsi, sifat-sifat turunan fungsi, aplikasi turunan fungsi, dan aplikasi turunan fungsi diberbagai ilmu. Secara umum, bagian ini memberikan alternatif pedoman bagi guru untuk melakukan pembelajaran turunan kepada peserta didik.

Panduan Pembelajaran

Sebelum memulai aktivitas pembelajaran, guru memandu peserta didik untuk berdoa menurut agama dan kepercayaan masing-masing. Hal ini bertujuan untuk menguatkan salah satu elemen Profil Pelajar Pancasila, yaitu beriman, bertakwa kepada Tuhan YME, dan berakhlak mulia. Setelah itu, peserta didik diberikan tes diagnostik kognitif dan non kognitif. Pada tes diagnostik non kognitif, guru dapat menggunakan alternatif pertanyaan yang ada pada kegiatan Ayo Mengingat Kembali pada materi Lingkaran di Bab 1 Geometri Analitik. Selanjutnya, guru dapat memberikan pertanyaan diagnostik kognitif untuk mengetahui capaian kompetensi peserta didik, menyesuaikan pembelajaran di kelas dengan kompetensi rata-rata peserta didik, dan memberikan pembelajaran tambahan kepada peserta didik dengan kompetensi di bawah rata-rata. Tes diagnostik kognitif dapat dilakukan dengan tanya jawab berkaitan dengan kemiringan garis, limit, fungsi kontinu, dan trigonometri.

Setelah memberikan tes diagnostik non kognitif dan tes diagnostik kognitif, guru memberikan apersepsi kontekstual berupa Rencana Anggaran Pendapatan dan Belanja (RAPB) pabrik pembuatan sepatu di Indonesia. RAPB meliputi banyaknya produksi, bahan produksi, anggaran biaya produksi, pendapatan minimal dan sebagainya. Beberapa rancangan tersebut biasanya dinyatakan dalam suatu fungsi tertentu, dengan tujuan fungsi tersebut dapat digunakan untuk memprediksi dalam jangka waktu yang panjang.

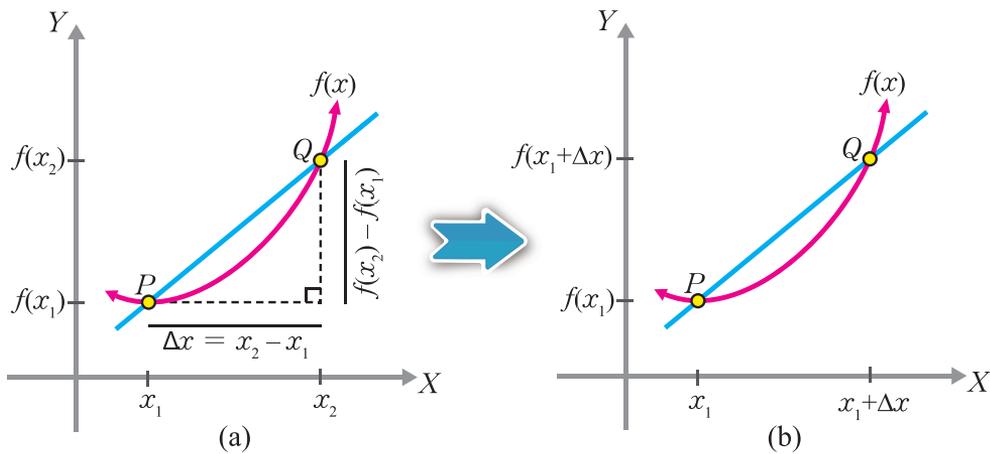
Guru dapat menggunakan konteks lain yang dapat memberikan pengalaman (pengetahuan) awal tentang turunan. Hal ini bertujuan untuk memotivasi peserta didik untuk mempelajari materi turunan, sehingga anggapan peserta didik bahwa mempelajari matematika tidak ada kaitannya dengan kehidupan sehari-hari lambat laun mulai berubah dan menyadari bahwa mempelajari matematika sangat berhubungan dengan lingkungan sekitar dan ilmu pengetahuan lainnya.

A. Definisi Turunan Fungsi

1. Konsep Turunan Fungsi

Guru menyampaikan kepada peserta didik untuk mengingat kembali simpulan yang diperoleh dalam kegiatan Eksplorasi 2.4 pada Bab II Limit, bahwa laju perubahan titik pada kurva sama dengan kemiringan garis lurus yang melalui titik-titik tersebut. Guru dapat meminta peserta didik mendiskusikan simpulan yang diperoleh dalam kegiatan Eksplorasi 2.4, apabila fungsi diperumum menjadi sebarang fungsi $f(x)$ yang dapat diamati pada Gambar 3.1. Dari Hasil diskusi tersebut, diharapkan dapat mengarahkan peserta didik bahwa laju perubahan sembarang titik pada sembarang kurva $f(x)$ sama dengan kemiringan garis lurus yang melalui titik-titik tersebut. Garis lurus tersebut yaitu Garis \overline{PQ} pada Gambar 3.1 disebut sebagai garis sekan dengan kemiringan

$$m = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}.$$



Gambar 3.1. Kurva $f(x)$



Ayo Berpikir Kritis

Pada Gambar 3.1, jika titik Q bergerak mendekati titik P , dapatkah kalian menentukan kemiringan garis sekan?

Pada aktivitas Ayo Berpikir Kritis ini, guru dapat meminta peserta didik untuk mendiskusikan bagaimana menentukan kemiringan garis sekan \overline{PQ} jika titik Q bergerak mendekati titik P pada Gambar 3.1. Peserta didik diberikan kebebasan

untuk menyampaikan hasil diskusi yang telah dilakukan, sedangkan guru dapat mengarahkan peserta didik untuk menentukan kemiringan garis sekan PQ dengan tepat. Pergerakan titik Q mendekati titik P mengakibatkan Δx mendekati 0, sehingga kemiringan garis sekan ketika titik Q mendekati titik P dapat dicari menggunakan formula $m = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

Kemiringan dari garis sekan tersebut selanjutnya yang disebut dengan turunan fungsi $f(x)$. Hasil diskusi ini, memberikan kesimpulan definisi turunan sebagai berikut.



Definisi

Turunan fungsi $f(x)$ di x dinotasikan $f'(x)$ adalah

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \text{ jika limitnya ada.}$$



Ayo Gunakan Teknologi

Guru mengajak peserta didik untuk menggunakan teknologi yang ada, untuk mengembangkan keterampilan Abad 21. Guru dapat menyarankan peserta didik untuk melihat penjelasan definisi limit fungsi dengan cara scan gambar barcode di samping, atau berselancar pada *link* youtube <https://www.youtube.com/watch?v=eYC3V4tsYbM&t=8s>



2. Penulisan Turunan Fungsi

Guru menjelaskan bahwa jika nilai limit dari $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ ada, fungsi f' dikatakan diferensiabel di x dan f' disebut sebagai turunan dari f . Guru meminta peserta didik berdiskusi tentang penulisan turunan fungsi, kemudian guru memberikan penjelasan bahwa terdapat berbagai cara penulisan turunan fungsi sehingga peserta didik diberikan kebebasan dalam menuliskan simbol turunan, yaitu:

- Notasi Newton, berbentuk $f(x)$ atau y' dan dikatakan turunan pertama fungsi $f(x)$.
- Notasi Leibniz, berbentuk $\frac{df(x)}{dx}$ atau $\frac{dy}{dx}$ dan dikatakan turunan pertama fungsi $f(x)$.

B. Sifat-Sifat Turunan Fungsi



Ayo Bereksplorasi

Eksplorasi 3.1

Pada kegiatan Ayo Bereksplorasi ini, peserta didik diarahkan untuk mengingat kembali sifat-sifat limit fungsi dan menggunakannya untuk menemukan sifat-sifat turunan fungsi. Guru dapat mencontohkan terlebih dahulu bagaimana proses menemukan satu atau dua sifat turunan fungsi menggunakan sifat-sifat limit fungsi, sehingga peserta didik menjadi lebih mudah dalam menemukan sifat-sifat turunan fungsi yang lain.

Misalkan fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ kontinu pada R , dan didefinisikan oleh $f(x) = k$, $g(x) = ax^n$, dengan n bilangan asli maka:

$$\begin{aligned} 1. \quad f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{k - k}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0. \\ 2. \quad g'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a(x + \Delta x)^n - ax^n}{\Delta x} \quad (\text{Gunakan Binomial Newton}). \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(a(x^n + nx^{n-1}\Delta x + c_2^n x^{n-2}\Delta x^2 + \dots + \Delta x^n)) - ax^n}{\Delta x}. \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{ax^n + anx^{n-1}\Delta x + ac_2^n x^{n-2}\Delta x^2 + \dots + a\Delta x^n - ax^n}{\Delta x}. \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{anx^{n-1}\Delta x + ac_2^n x^{n-2}\Delta x^2 + \dots + a\Delta x^n}{\Delta x}. \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(anx^{n-1} + ac_2^n x^{n-2}\Delta x + \dots + a\Delta x^n)}{\Delta x}. \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (anx^{n-1} + ac_2^n x^{n-2}\Delta x + \dots + a\Delta x^n) = anx^{n-1} + 0 = anx^{n-1}. \end{aligned}$$

Sebelum menemukan sifat turunan fungsi yang lain, guru dapat memberikan kegiatan Ayo Berpikir Kritis berikut.



Ayo Berpikir Kritis

Apakah nilai turunan $g(x)$ pada kegiatan Eksplorasi 3.1 juga berlaku untuk $n \neq 0$ dan $n \in R$? Selidikilah!

Kegiatan Ayo Berpikir Kritis ini merupakan tugas mandiri tidak terstruktur yang dapat diberikan guru kepada peserta didik sebagai bentuk pendalaman materi sifat-sifat turunan fungsi. Guru dapat membimbing peserta didik yang memerlukan bantuan dalam kegiatan ini. Bimbingan dapat dilakukan secara langsung maupun virtual menggunakan video *meeting*. Dalam bimbingan virtual tersebut, guru dapat menjelaskan bahwa nilai turunan $g(x)$ pada kegiatan Eksplorasi 3.1 juga berlaku untuk $n \neq 0$, tetapi tidak berlaku untuk setiap $n \in R$ (bilangan real), misalnya untuk n bilangan irasional.

Guru kemudian menyampaikan sifat-sifat turunan fungsi dan meminta peserta didik mencari turunan fungsi sebuah fungsi menggunakan sifat-sifat limit fungsi sebagai bentuk latihan. Guru membagi peserta didik dalam kelompok untuk melakukan kegiatan Ayo Berpikir Kreatif berikut.



Ayo Berpikir Kreatif

Bagaimana cara kalian menunjukkan Sifat 3.2 hingga Sifat 3.6? Buatlah kegiatan untuk menunjukkan sifat-sifat tersebut, berkolaborasi dengan teman kalian!

Pada kegiatan Ayo Berpikir Kreatif ini, guru mengajak peserta didik untuk berpikir kreatif, berani menyampaikan gagasan, dan berkolaborasi dalam kelompok. Peserta didik diberikan kebebasan untuk menunjukkan Sifat 3.2 hingga Sifat 3.6 turunan fungsi dengan mendiskusikan bersama kelompoknya. Guru dapat memeriksa kemajuan diskusi dengan cara mengunjungi setiap kelompok dan memberikan arahan apabila mereka mengalami kesulitan. Pada kegiatan ini, diharapkan peserta didik dapat menunjukkan sifat-sifat turunan fungsi berikut.

Pembuktian Sifat 3.2 hingga Sifat 3.6.

Sifat 3.2 $f(x) = k u(x) \Rightarrow f'(x) = k u'(x)$.

Bukti:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{ku(x+\Delta x) - ku(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} k \left(\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \right) \\ &= k \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} = k u'(x). \end{aligned}$$

Sifat 3.3 $f(x) = u(x) \pm v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$.

Bukti:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[u(x+\Delta x) \pm v(x+\Delta x)] - [u(x) \pm v(x)]}{\Delta x} \\ f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[u(x+\Delta x) - u(x)] \pm [v(x+\Delta x) - v(x)]}{\Delta x}. \end{aligned}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}.$$

$$f'(x) = u'(x) \pm v'(x).$$

Sifat 3.4 $f(x) = u(x)v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.

Bukti:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x}.$$

Jika $u(x+\Delta x) \cdot v(x)$ dikurangi dan ditambahkan di dalam pembilang, maka

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x+\Delta x)v(x)+u(x+\Delta x)v(x)-u(x)v(x)}{\Delta x}. \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[u(x+\Delta x) \cdot \frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x} + v(x) \frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} \right]. \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[u(x+\Delta x) \cdot \frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x} \right] + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[v(x) \frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} \right]. \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} u(x+\Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Karena u diferensiabel di x , maka u kontinu di x , karena itu

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} u(x+\Delta x) = u(x), \text{ juga}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x} = v'(x).$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} = u'(x).$$

dan

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} v'(x) = v'(x).$$

sehingga $f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$.

Sifat 3.5 $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2}$, dengan $v(x) \neq 0$

Sifat ini berakibat $f(x) = \frac{1}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{-v'(x)}{v(x)^2}$, dengan $v(x) \neq 0$.

Bukti:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x)-u(x)v(x+\Delta x)}{\Delta x v(x)v(x+\Delta x)}$$

Karena g diferensiabel di x , maka v kontinu di x ; jadi kita memperoleh

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(x+\Delta x) = v(x). \text{ Selanjutnya } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(x) = v(x) \text{ dan } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} u(x) = u(x).$$

Dengan hasil ini dan definisi $u'(x)$ dan $v'(x)$ diperoleh

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2}.$$

Sifat 3.6 $f(x) = [u(x)]^n \Rightarrow f'(x) = n[u(x)]^{(n-1)} u'(x)$ dengan $u'(x)$ ada.

Bukti:

Jika $f(x) = x^n$ maka $f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = nx^{n-1} (1)$.

Dengan mengambil $u(x) = x$ maka $u'(x) = 1$, sehingga $f'(x)$ dapat ditulis menjadi

$$f'(x) = nx^{n-1}(1) = n(u(x)^{n-1})u'(x).$$

Hal ini menunjukkan bahwa:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{du^n}{dx} \cdot \frac{du}{du} = \frac{du^n}{du} \cdot \frac{du}{dx} = n[u(x)]^{n-1} u'(x).$$

1. Turunan Fungsi Aljabar

Untuk memahami turunan fungsi aljabar, guru dapat menggunakan beberapa contoh seperti Contoh Soal 3.1 kemudian guru dapat mendampingi peserta didik untuk melakukan kegiatan Ayo Berpikir Kreatif dan menyelesaikan latihan soal terbimbing seperti yang ada pada Buku Siswa bagian turunan fungsi aljabar.



Ayo Berpikir Kreatif

Carilah strategi lain untuk menyelesaikan Contoh Soal 3.1 bagian c!

Hasil yang diperoleh dapat didiskusikan dengan teman dengan arahan dari guru. Selanjutnya, guru dapat mengelompokkan peserta didik menjadi beberapa kelompok untuk menyelesaikan masalah turunan fungsi aljabar seperti pada Latihan Soal Terbimbing 3.1. Guru mengajak peserta didik untuk aktif dalam kelompoknya dan saling berkolaborasi.

Latihan Soal Terbimbing 3.1

Tentukan turunan pertama dari $y = \frac{\sqrt{x+x^2}}{2x}$!

Alternatif Penyelesaian:

Menentukan turunan pertama dari $y = \frac{\sqrt{x+x^2}}{2x}$ dapat dilakukan dengan dua cara, yaitu:

Cara I

Guru dapat mengubah persamaan $y = \frac{\sqrt{x+x^2}}{2x}$ menjadi $y = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{x+x^2}}{x} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{x^{\frac{1}{2}+x^2}}{x} \right)$.

Misalkan $u(x) = x^{\frac{1}{2}} + x^2$ dan $v(x) = \frac{1}{2x}$ maka

$$y' = \frac{1}{2} \left(\frac{u(x)v(x) - u'(x)v'(x)}{v(x)^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} + 2x^{2-1}\right)x - \left(x^{\frac{1}{2}+x^2}\right)x^{-1-1}}{x^2} \right) \text{ (Sifat 3.5, dan 3.1).}$$

$$y' = \frac{1}{2} \left(\frac{\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 2x\right)x - (x^{\frac{1}{2}} + x^2)x^0}{x^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + 2x^2\right) - (x^{\frac{1}{2}} + x^2)}{x^2} \right) \quad (\text{Sifat Aljabar}).$$

$$y' = \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + 2x^2 - x^{\frac{1}{2}} - x^2}{x^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{-\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + x^2}{x^2} \right) = \frac{1}{2} \left(-\frac{\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}}{x^2} + 1 \right) \quad (\text{Sifat Aljabar}).$$

$$y' = \left(-\frac{1}{4} \left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2} \right) \right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{Sifat Aljabar}).$$

Jadi, turunan pertama dari $y = \frac{\sqrt{x+x^2}}{2x}$ adalah $y' = \frac{1}{2} - \frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}}$.

Cara II

Guru dapat merubah persamaan $y = \frac{\sqrt{x+x^2}}{2x}$ menjadi $y = \frac{1}{2x} (\sqrt{x} + x^2)$.

Misalkan $u(x) = x^{\frac{1}{2}} + x^2$ dan $v(x) = \frac{1}{2x}$ maka

$$y' = u'(x)v(x) + v'(x)u(x) \quad (\text{Sifat 3.4}).$$

$$y' = \left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} + 2x \right) \left(\frac{1}{2x} \right) + \left(x^{\frac{1}{2}} + x^2 \right) \left(\frac{1}{2}x^{-1-1} \right).$$

$$y' = \left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 2x \right) \left(\frac{1}{2x} \right) + \left(x^{\frac{1}{2}} + x^2 \right) \left(-\frac{1}{2x^2} \right) \quad (\text{Sifat Aljabar}).$$

$$y' = \left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 2x \right) \left(\frac{1}{2x} \right) + \left(x^{\frac{1}{2}} + x^2 \right) \left(-\frac{1}{2x^2} \right) \quad (\text{Sifat Aljabar}).$$

$$y' = \left(\frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}} + 1 \right) + \left(-\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{2} \right) \quad (\text{Sifat Eksponen}).$$

$$y' = -\frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{Sifat Aljabar}).$$

Jadi, turunan pertama $y = \frac{\sqrt{x+x^2}}{2x}$ adalah $y' = \frac{1}{2} - \frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}}$.



Cek Dengan Photomath

Guru dapat menyarankan peserta didik untuk mengecek jawaban yang telah peserta didik peroleh menggunakan *Photomath*. Hasil yang diperoleh untuk Latihan Soal Terbimbing 3.1 adalah $y' = -\frac{1}{4x\sqrt{x}} + \frac{1}{2}$.

Guru mengarahkan peserta didik untuk melakukan kegiatan Ayo Berpikir Kreatif berikut.



Ayo Berpikir Kreatif

Carilah strategi lain untuk menyelesaikan Latihan Soal Terbimbing 3.1!

Pada kegiatan ini, peserta didik dapat berdiskusi untuk mencari strategi lain dalam menyelesaikan Latihan Soal Terbimbing 3.1. Kegiatan ini bertujuan untuk melatih peserta didik berpikir kreatif dalam menentukan strategi yang lebih efektif dan efisien. Salah satu strategi lain dalam menyelesaikan Latihan Soal Terbimbing 3.1 adalah sebagai berikut.

Guru dapat mengubah persamaan $y = \frac{\sqrt{x+x^2}}{2x}$ menjadi $y = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{x+x^2}}{x} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} + x \right)$. Misalkan $\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} + x = u(x)$, maka

$$y' = \frac{1}{2} u'(x) \quad (\text{Sifat 3.2}).$$

$$y' = \frac{1}{2} \left(-\frac{\frac{1}{2} \left(x^{-\frac{1}{2}} \right)}{x} + 1 \right) \quad (\text{Sifat 3.5, dan 3.3}).$$

$$y' = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \right) + 1 \right) \quad (\text{Sifat Eksponen}).$$

$$y' = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}} + 1 \right) \quad (\text{Sifat Aljabar}).$$

$$y' = -\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{Sifat Aljabar}).$$

2. Turunan Fungsi Trigonometri



Ayo Bereksplorasi

Eksplorasi 3.2

Pada kegiatan Eksplorasi 3.2 ini tidak jauh beda dengan kegiatan Eksplorasi 3.1. Perbedaannya, fungsi pada kegiatan ini adalah fungsi trigonometri dasar.

Misalkan fungsi f, g kontinu pada R , dan didefinisikan oleh $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$.

a. Menentukan turunan $f(x) = \sin x$.

Sesuai definisi turunan $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, maka

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin(x)}{\Delta x}.$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cos\left(\frac{1}{2}(2x + \Delta x)\right) \sin\left(\frac{1}{2} \Delta x\right)}{\Delta x} \quad (\text{Identitas Trigonometri})$$

$$f'(x) = \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2 \cos \left(\frac{1}{2} (2x + \Delta x) \right) \right) \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{1}{2} \Delta x}{\Delta x} \right) \right) \quad (\text{Sifat 2.4})$$

$$f'(x) = \left(2 \cos \left(\frac{1}{2} (2x) \right) \right) \left(\frac{1}{2} \right) = (2 \cos x) \left(\frac{1}{2} \right) \quad (\text{Sifat Limit Fungsi Trigonometri})$$

$$f'(x) = 2 \left(\frac{1}{2} \right) \cos x = \cos x$$

Jadi, jika $f(x) = \sin x$ maka $f'(x) = \cos x$.

b. Menentukan turunan $g(x) = \cos x$.

Sesuai definisi turunan $g'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$, maka

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos(x)}{\Delta x}$$

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{1}{2} (2x + \Delta x) \sin \frac{1}{2} \Delta x}{\Delta x} \quad (\text{Identitas Trigonometri}).$$

$$g'(x) = \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} -2 \sin \left(\frac{1}{2} (2x + \Delta x) \right) \right) \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{1}{2} \Delta x}{\Delta x} \right) \quad (\text{Sifat 2.4}).$$

$$g'(x) = \left(-2 \sin \left(\frac{1}{2} (2x) \right) \right) \left(\frac{1}{2} \right) = (-2 \sin x) \left(\frac{1}{2} \right) \quad (\text{Sifat Limit Fungsi Trigonometri}).$$

$$g'(x) = (-2) \left(\frac{1}{2} \right) \sin x = -\sin x.$$

Jadi, jika $f(x) = \cos x$ maka $f'(x) = -\sin x$.

Guru kemudian menyampaikan sifat-sifat turunan fungsi trigonometri dan meminta peserta didik mencari turunan sebuah fungsi dengan menerapkan sifat-sifat limit fungsi sebagai bentuk latihan. Peserta didik dapat dikelompokkan dalam beberapa kelompok untuk melakukan kegiatan Ayo Berpikir Kreatif berikut.



Ayo Berpikir Kreatif

Bagaimana cara kalian menunjukkan Sifat Turunan Trigonometri 3.2 hingga Sifat Turunan Trigonometri 3.5? Buatlah kegiatan untuk menunjukkan sifat-sifat tersebut, berkolaborasi dengan teman kalian!

Pada kegiatan Ayo Berpikir Kreatif ini, tidak jauh beda dengan kegiatan untuk menunjukkan Sifat 3.2 hingga Sifat 3.6 turunan fungsi. Perbedaannya, fungsi pada kegiatan ini merupakan fungsi trigonometri. Cara menunjukkan Sifat Turunan Trigonometri 3.2 hingga Sifat Turunan Trigonometri 3.5 sebagai berikut.

Sifat Turunan Trigonometri 3.2 $f(x) = \tan x \Rightarrow f'(x) = \sec^2 x$.

Bukti: $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, sehingga $f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$.

Sifat Turunan Trigonometri 3.3 $f(x) = \operatorname{ctg} x \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{csc}^2 x$.

Bukti: $f(x) = \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, sehingga $f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{csc}^2 x$.

Sifat Turunan Trigonometri 3.4 $f(x) = \sec x \Rightarrow f'(x) = \sec x \tan x$.

Bukti: $f(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x}$, sehingga $f'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \sec x \tan x$.

Sifat Turunan Trigonometri 3.5 $f(x) = \operatorname{csc} x \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{csc} x \cot x$.

Bukti: $f(x) = \operatorname{csc} x = \frac{1}{\sin x}$, sehingga $f'(x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\operatorname{csc} x \cot x$.

Untuk memahami turunan fungsi trigonometri, guru dapat menggunakan beberapa contoh seperti Contoh Soal 3.2 dan peserta didik dapat mencoba menyelesaikan contoh soal dengan strategi lain sesuai dengan kegiatan Ayo Berpikir Kreatif berikut.



Ayo Berpikir Kreatif

Carilah strategi lain untuk menyelesaikan Contoh Soal 3.2 nomor c!

Pada kegiatan ini, peserta didik dapat berdiskusi untuk mencari strategi lain dalam menyelesaikan Contoh Soal 3.2 nomor c. Kegiatan ini bertujuan untuk melatih peserta didik berpikir kreatif dalam menentukan strategi yang lebih efektif dan efisien. Salah satu strategi lain dalam menyelesaikan Contoh Soal 3.2 nomor c adalah sebagai berikut.

Guru dapat merubah persamaan $y = \frac{1 + \cos x}{\sin x}$ menjadi $y = \frac{1}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{csc} x + \cot x$, sehingga

$$y' = -\operatorname{csc} x \cot x - \operatorname{csc}^2 x \quad (\text{Sifat Turunan Trigonometri 3.3}).$$

$$y' = -\operatorname{csc}^2 x \cos x - \operatorname{csc}^2 x \quad (\text{Identitas Trigonometri}).$$

$$y' = -\operatorname{csc}^2 x (\cos x - 1) \quad (\text{Sifat Aljabar}).$$

Hasil tersebut tidak sama dengan hasil pada Contoh Soal 3.2 nomor c, karena penyederhanaan yang berbeda.

Latihan Soal Terbimbing 3.2

Tentukan turunan fungsi $y = \frac{2\sqrt{x} + \sin x}{\cos x}$!

Alternatif Penyelesaian:

Menentukan turunan fungsi $y = \frac{2\sqrt{x} + \sin x}{\cos x}$.

Misalkan $2\sqrt{x} + \sin x = u(x)$ dan $\cos x = v(x)$, maka

$$y' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} \quad (\text{Sifat 3.5}).$$

$$y' = \frac{\left(\left(2\left(\frac{1}{2}\right)x^{\frac{1}{2}} \right) + \cos x \right) \cos x - (2\sqrt{x} \sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x} \quad (\text{Sifat Turunan Trigonometri 3.1, TD 1}).$$

$$y' = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \cos x \right) \cos x + \sin x (2\sqrt{x} + \sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\frac{\cos x}{\sqrt{x}} + \cos^2 x + \sin^2 x + 2\sqrt{x} \sin x}{\cos^2 x} \quad (\text{Sifat Aljabar}).$$

$$y' = \frac{\frac{\cos x}{\sqrt{x}} + 1 + 2\sqrt{x} \sin x}{\cos^2 x} \quad (\text{Identitas Trigonometri}).$$

$$y' = \frac{\cos x}{\sqrt{x} \cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{2\sqrt{x} \sin x}{\cos^2 x} \quad (\text{Sifat Aljabar}).$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x} \cos x} + \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{2\sqrt{x} \tan x}{\cos x} \quad (\text{Identitas Trigonometri}).$$

$$y' = \frac{1}{\cos x} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\cos x} + 2\sqrt{x} \tan x \right) \quad (\text{Sifat Aljabar}).$$

$$y' = \sec x \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sec x + 2\sqrt{x} \tan x \right) \quad (\text{Identitas Trigonometri}).$$

Jadi turunan fungsi $y = \frac{2\sqrt{x} + \sin x}{\cos x}$ adalah $y' = \sec x \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sec x + 2\sqrt{x} \tan x \right)$.

Guru mengarahkan peserta didik untuk mencoba kegiatan Ayo Berpikir Kreatif.



Ayo Berpikir Kreatif

Carilah strategi lain untuk menyelesaikan Latihan Soal Terbimbing 3.2!

3. Aturan Rantai pada Turunan

Guru menyampaikan materi tentang aturan rantai pada turunan.

Misalkan suatu fungsi komposisi $y = (f \circ g)(x)$ yang didefinisikan dengan $f(g(x))$, sehingga $y = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(u)$, dengan $u = g(x)$.

Jika $u = g(x)$ mengalami perubahan sebesar Δx menjadi $(x + \Delta x)$, maka

- » $u = g(x)$ mengalami perubahan sebesar $\Delta g(x)$ menjadi $g(x + \Delta x)$, sehingga diperoleh $\Delta g(x) = g(x + \Delta x) - g(x)$ atau $g(x + \Delta x) = g(x) + \Delta g(x)$.

- » $u = g(x)$ mengalami perubahan sebesar $\Delta g(x)$ menjadi $g(x+\Delta x)$, sehingga terdapat hubungan $\Delta f(g(x)) = f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))$
atau $f(g(x+\Delta x)) = f(g(x)) + \Delta f(g(x))$.

Diharapkan kegiatan eksplorasi dapat mempermudah peserta didik dalam memahami aturan rantai.



Sifat-sifat

Jika fungsi $y = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(u)$, dengan $u = g(x)$, maka turunan fungsi komposisi $(f \circ g)(x)$ ditentukan oleh

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \text{ atau } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Sifat ini sering disebut dengan aturan rantai atau dalil rantai. Untuk memahami aturan rantai pada turunan, guru dapat menggunakan beberapa Contoh Soal 3.3.



Ayo Mencoba

Guru membagi peserta didik menjadi beberapa kelompok untuk menyelesaikan masalah aturan rantai pada turunan seperti pada Latihan Soal Terbimbing 3.3. Diharapkan guru dapat mengajak peserta didik untuk berkolaborasi, menyampaikan gagasan dengan berani dan sopan, serta mendengarkan pendapat rekannya.

Latihan Soal Terbimbing 3.3

Tentukan turunan dari $y = \sqrt[4]{(3x^2 - 1)^3}$!

Alternatif Penyelesaian:

$y = \sqrt[4]{(3x^2 - 1)^3}$, misalkan $u = 3x^2 - 1$ maka $\frac{du}{dx} = 6x$.

$y = \sqrt[4]{u^3}$ maka y dapat dinyatakan dengan $y = u^{\frac{3}{4}}$, sehingga $\frac{dy}{du} = \frac{3}{4}u^{-\frac{1}{4}}$.

Dengan menggunakan aturan rantai, maka diperoleh

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = \frac{3}{4}u^{-\frac{1}{4}} (6x)$$

Substitusikan $u = 3x^2 - 1$ pada persamaan, sehingga diperoleh $\frac{dy}{dx} = \frac{9}{2}x(3x^2 - 1)^{-\frac{1}{4}}$

Jadi, turunan dari $y = \sqrt[4]{(3x^2 - 1)^3}$ adalah $\frac{dy}{dx} = \frac{9}{2}x(3x^2 - 1)^{-\frac{1}{4}}$.

Guru meminta peserta didik untuk memperhatikan Contoh Soal 3.4 sebelum masuk ke kegiatan Ayo Berdiskusi.



Ayo Berdiskusi

Alternatif menyelesaikan masalah:

- a. Persamaan yang menunjukkan pergerakan laba-laba pada bidang kartesius XOY adalah

$$r(x,y) = (t^2-4)i + (t^2-2t+6)j.$$

- b. Posisi laba-laba pada $t = 2$ detik

$$r(x,y) = (t^2-4)i + (t^2-2t+6)j.$$

Jadi posisi laba-laba pada $t = 2$ detik adalah $(0,6)$.

- c. Kecepatan laba-laba pada $t = 2$ detik

$$dr/dt = 2ti + (2t-2)j = 4i+2j.$$

$$|v| = 2\sqrt{5}.$$

Jadi kecepatan laba-laba pada $t = 2$ detik adalah $2\sqrt{5}$.



Ayo Mencoba

1. Tentukan turunan dari fungsi:

a. $y = (3x^2-5) \cos x$. b. $y = \left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right)^{-4}$.

c. $y = \sqrt{\frac{1}{(2x+3)^2}}$. d. $y = (2+\cos x)^4$.

Alternatif Penyelesaian:

- a. $y = (3x^2-5) \cos x$.

Misal: $u = 3x^2-5$ maka $u' = 6x$.

$v = \cos x$ maka $v' = -\sin x$.

$$y = u \cdot v = (3x^2-5) \cdot \cos x, \text{ maka}$$

$$y' = u'v + uv' = (6x)(\cos x) + (3x^2-5)(-\sin x).$$

$$y' = 6x \cos x - (3x^2-5)\sin x.$$

- b. $y = \left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right)^{-4}$.

$$y' = [u(x)^n]' = n \cdot u(x)^{n-1} \cdot u'(x).$$

$$u(x) = x^3 + \frac{1}{x^2}, \text{ maka } u'(x) = 3x^2 + \frac{-2x}{(x^2)^2} = 3x^2 - \frac{2}{x^3}.$$

$$y' = -4\left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right)^{-5} \left(3x^2 - \frac{2}{x^3}\right).$$

c. $y = \sqrt{\frac{1}{(2x+3)^2}}.$

$$y' = [u(x)^n]' = n \cdot u(x)^{n-1} \cdot u'(x).$$

Misal: $u(x) = 2x+3$ maka $u'(x) = 2,$

$$n = -\frac{3}{2}.$$

$$y = u(x)^n = y = (2x+3)^{-\frac{3}{2}}, \text{ maka}$$

$$y' = \left(-\frac{3}{2}\right) (2x+3)^{-\frac{3}{2}-1} (2) = -\frac{3}{(2x+3)^{\frac{3}{2}}}.$$

d. $y = (2+\cos x)^4.$

$$y' = [u(x)^n]' = n \cdot u(x)^{n-1} \cdot u'(x).$$

Misal: $u(x) = 2+\cos x$ maka $u'(x) = -\sin x.$

$$n = 4.$$

$$y = u(x)^4, \text{ maka } y' = 4(u(x))^{4-1} u'(x) = 4(u(x))^3 u'(x).$$

$$\text{Sehingga } y' = 4(2+\cos x)^3 (-\sin x) = -4(2+\cos x)^3 (\sin x).$$

2. Jari-jari sebuah balon berbentuk bola bertambah panjang dengan laju 2 cm per detik. Tentukan laju bertambahnya luas permukaan dan volume balon berbentuk bola, jika jari-jari balon tersebut 30 cm!

Alternatif Penyelesaian:

Laju bertambahnya luas permukaan balon berbentuk bola.

$$\text{Luas balon } (L) = 4\pi r^2, \text{ sehingga } \frac{dL}{dr} = 8\pi r.$$

Laju pertambahan panjang jari-jari 2 cm per detik, maka laju bertambahnya luas permukaan balon adalah

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dL}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = 8\pi r(2) = 16\pi r = 16\pi(30) = 480\pi \text{ cm}^2/\text{detik}.$$

Laju bertambahnya volume balon berbentuk bola.

$$\text{Volume balon } (V) = \frac{4}{3}\pi r^3, \text{ sehingga } \frac{dV}{dr} = 4\pi r^2.$$

Laju pertambahan panjang jari-jari 2 cm per detik, maka laju bertambahnya volume balon adalah

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = 4\pi r^2(2) = 7200\pi \text{ cm}^3/\text{detik}.$$

3. Diketahui persamaan fungsi trigonometri $f(x) = 2 - 2 \sin \left(\frac{1}{2} \pi x \right)$ didefinisikan pada daerah asal $D_f = \{x \mid 0 \leq x \leq 4, x \in \mathbb{R}\}$.

Tentukan turunan pertama dari $f(x)$!

Jika $f'(x)$ bernilai nol pada $x = x_1$ dan $x = x_2$, tentukan nilai dari $x_1^2 + x_2^2$!

Alternatif Penyelesaian:

Diketahui $f(x) = 2 - 2 \sin \left(\frac{1}{2} \pi x \right)$.

$$f'(x) = -2 \cos \left(\frac{1}{2} \pi x \right) \left(\frac{1}{2} \pi \right) = -\pi \left(\cos \left(\frac{1}{2} \pi x \right) \right).$$

$$f'(x) = 0, \text{ maka } -\pi \left(\cos \left(\frac{1}{2} \pi x \right) \right) = 0.$$

$f'(x)$ akan bernilai 0 jika dan hanya jika $\cos \left(\frac{1}{2} \pi x \right) = 0$ pada daerah asal $D_f = \{x \mid 0 \leq x \leq 4, x \in \mathbb{R}\}$, sehingga nilai x yang memenuhi adalah $x = 1$ dan $x = 3$.

Jadi $x_1^2 + x_2^2 = 1^2 + 3^2 = 10$.

C. Aplikasi Turunan

1. Persamaan Garis Singgung pada Kurva



Ayo Bereksplorasi

Eksplorasi 3.3

Pada kegiatan ini peserta didik akan mempelajari tentang turunan fungsi $f(x)$ pada $x = a$ dengan persepsi geometri. Diberikan Gambar 3.3, terdapat kurva $y = f(x)$ dengan P dan Q adalah titik pada kurva tersebut. Titik $P(a, b)$ merupakan titik tetap dan titik Q adalah titik yang bergerak sepanjang lintasan kurva. Apabila ditarik garis lurus yang melalui titik P dan titik Q , maka garis lurus tersebut merupakan tali busur. Jika Q bergerak mendekati P sepanjang lintasan kurva $y = f(x)$, maka tali busur tersebut merupakan garis singgung kurva $y = f(x)$ pada titik $P(a, b)$. Jadi dengan kata lain, garis singgung kurva $y = f(x)$ pada titik $P(a, b)$ merupakan proses limit dari tali busur PQ ketika titik Q bergerak mendekati titik P .

Pada Gambar 3.3, titik $P(a, b)$ atau $P(a, f(a))$, dan titik $Q(a+h, f(a+h))$, sehingga absis titik Q adalah $(a+h)$ dan ordinat titik Q adalah $f(a+h)$. Dengan menggunakan konsep kemiringan, diperoleh bahwa

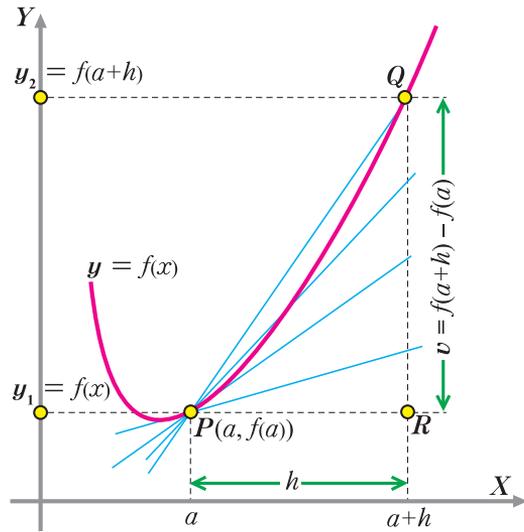
$$m_{PQ} = \frac{QR}{PR} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Jika titik Q mendekati titik P maka nilai h akan mendekati nol, sehingga kemiringan tali busur PQ mendekati kemiringan garis singgung kurva $y = f(x)$ di titik P ,

sehingga kemiringan garis singgung kurva $y = f(x)$ dapat menggunakan konsep perhitungan limit.

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} m_{PQ} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Berdasarkan definisi turunan bahwa $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$, maka untuk menentukan kemiringan persamaan garis singgung kurva $y = f(x)$ di titik $P(a, f(a))$, peserta didik dapat menggunakan konsep turunan fungsi $y = f(x)$ pada $x = a$. Dengan kata lain, kemiringan persamaan garis singgung $y = f(x)$ pada titik $(a, f(a))$ dapat dinyatakan dengan $f'(a) = \frac{d}{dx} f(a)$.



Gambar 3.2. Garis Singgung Kurva $f(x)$

Untuk menentukan persamaan garis singgung kurva $y = f(x)$ pada titik $P(a, b)$ yang telah diketahui kemiringan garis singgung, peserta didik dapat menggunakan konsep menentukan persamaan garis yang diketahui kemiringan dan satu titik

$$(y - y_a) = m(x - x_a).$$



Sifat-sifat

Misalkan $P(a, b)$ adalah titik singgung kurva $y = f(x)$, maka

- kemiringan garis singgung kurva y pada titik P adalah $m = f'(a)$;
- persamaan garis singgung kurva y pada titik P adalah $(y - b) = m(x - a)$.

Untuk memahami persamaan garis singgung pada kurva, guru dapat menggunakan Contoh Soal 3.5, dan peserta didik dapat mencoba menyelesaikan contoh soal dengan strategi lain.



Ayo Mencoba

Guru mengelompokkan peserta didik menjadi beberapa kelompok untuk menyelesaikan masalah aturan rantai pada turunan seperti pada Latihan Soal Terbimbing 3.4 dan 3.5. Ajaklah mereka untuk aktif berdiskusi dalam kelompok.

Latihan Soal Terbimbing 3.4

Tentukan persamaan garis singgung kurva $y = x^2 - x + 2$ di titik A dengan absis 1!

Alternatif Penyelesaian:

Titik singgung (x,y) dapat ditentukan dengan cara menyubstitusikan $x = 1$ pada kurva $y = x^2 - x + 2$. Diperoleh $y = (1)^2 - 1 + 2 = 2$, sehingga titik singgungnya adalah $A(1,2)$. Setelah itu, peserta didik dapat menentukan kemiringan persamaan garis singgung dengan cara menentukan $\frac{d}{dx} f(1)$.

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 1, \quad \frac{d}{dx} f(1) = 1$$

Berikutnya, persamaan garis singgung kurva $y = x^2 - x + 2$ di titik $A(1,2)$, adalah

$$(y - y_a) = m(x - x_a).$$

$$(y - 2) = (x - 1).$$

$$y = x + 1.$$

Latihan Soal Terbimbing 3.5

Tentukan persamaan garis singgung di titik potong garis $y = x + 1$ dengan parabola $y = x^2 + 2x + 1$!

Alternatif Penyelesaian:

Titik potong garis $y = x + 1$ dengan parabola $y = x^2 + 2x + 1$ adalah

$$x + 1 = x^2 + 2x + 1.$$

$$x^2 + x = 0,$$

diperoleh $x_1 = 0$ dan $x_2 = -1$.

Untuk $x_1 = 0$, maka $y = 0 + 1 = 1$, sehingga titik singgungnya adalah $(0,1)$.

Untuk menentukan kemiringan persamaan garis singgung parabola $y = x^2 + 2x + 1$ di titik $(0, 1)$ adalah $\frac{d}{dx} f(0)$.

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 2,$$

$$\frac{d}{dx} f(0) = 2.$$

Berikutnya, persamaan garis singgung kurva $y = f(x) = x^2 - x + 2$ di titik $A(0,1)$, adalah

$$(y - y_a) = m(x - x_a).$$

$$(y - 1) = 2(x - 0).$$

$$y = 2x + 1.$$

Untuk $x_2 = -1$, maka $y = -1 + 1 = 0$, sehingga titik singgungnya adalah $(-1,0)$.

Untuk menentukan kemiringan persamaan garis singgung parabola $y = x^2 + 2x + 1$ di titik $(-1,0)$ adalah $\frac{d}{dx} f(-1)$.

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 2,$$

$$\frac{d}{dx} f(-1) = 0.$$

Berikutnya, persamaan garis singgung kurva $y = x^2 + 2x + 1$ di titik $A(-1,0)$ adalah

$$(y - y_a) = m(x - x_a).$$

$$(y - 0) = 0(x - (-1)).$$

$$y = 0 \text{ atau sumbu } X.$$



Ayo Mencoba

Pada kegiatan Ayo Mencoba, guru mengarahkan peserta didik untuk menggunakan sifat-sifat turunan dalam menyelesaikan soal yang ada pada Latihan Soal 3.2.

Latihan Soal 3.2

1. Carilah persamaan garis singgung dari:
 - a. kurva $y = x^2 - 6\frac{1}{5}x + 14\frac{1}{2}$ yang sejajar dengan garis $x + 2y + 3 = 0$.
 - b. parabola $y = 2x^2 - 3x + 5$ pada titik yang berordinat 4.

Alternatif Penyelesaian:

- a. Persamaan garis singgung dari kurva $y = x^2 - 6\frac{1}{5}x + 14\frac{1}{2}$ yang sejajar dengan garis $x + 2y + 3 = 0$.

Kemiringan garis $x + 2y + 3 = 0$ adalah $m_1 = -\frac{a}{b} = -\frac{1}{2}$.

Garis singgung kurva $y = x^2 - 6\frac{1}{5}x + 14\frac{1}{2}$ sejajar dengan garis $x + 2y + 3 = 0$, maka kemiringannya adalah $m_2 = m_1 = -\frac{1}{2}$.

$$y = x^2 - 6\frac{1}{5}x + 14\frac{1}{2} = x^2 - \frac{31}{5}x + \frac{29}{2}.$$

$$y' = 2x - \frac{31}{5}.$$

$$m_2 = y' = 2x - \frac{31}{5}, \text{ sehingga } -\frac{1}{2} = 2x - \frac{31}{5}.$$

$$2x = -\frac{1}{2} + \frac{31}{5} = \frac{57}{10}$$

$$x = \frac{57}{20}.$$

Substitusikan $x = \frac{57}{20}$ pada $y = x^2 - \frac{31}{5}x + \frac{29}{2}$, diperoleh $y = \left(\frac{57}{20}\right)^2 - \frac{31}{5}\left(\frac{57}{20}\right) + \frac{29}{2} = \frac{1981}{400}$

Persamaan garis singgung di titik $y = \left(\frac{57}{20}, \frac{1981}{400}\right)$ dengan $m = -\frac{1}{2}$ adalah

$$y - \frac{1981}{400} = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{57}{20}\right).$$

$$2y - \frac{1981}{200} = -x + \frac{57}{20}.$$

$$x + 2y - \frac{2551}{200} = 0.$$

Jadi, persamaan garis singgung kurva $y = x^2 - 6\frac{1}{5}x + 14\frac{1}{2}$ yang sejajar dengan garis $x + 2y + 3 = 0$ adalah $x + 2y - \frac{2551}{200} = 0$.

b. Persamaan garis singgung dari parabola $y = 2x^2 - 3x + 5$ pada titik yang berordinat 4.

Substitusikan $y = 4$ ke persamaan kurva $y = 2x^2 - 3x + 5$, diperoleh $2x^2 - 3x + 1 = 0$. Cara pemfaktoran dapat diterapkan pada persamaan $2x^2 - 3x + 1 = 0$ untuk memperoleh $x_1 = \frac{1}{2}$ atau $x_2 = 1$.

Turunan pertama kurva $y = 2x^2 - 3x + 5$ adalah $y' = 4x - 3$.

Untuk $x_1 = \frac{1}{2}$ maka $m_1 = y'(\frac{1}{2}) = -1$, sehingga persamaan garis singgung melalui titik $(\frac{1}{2}, 4)$ dengan $m_1 = -1$ adalah

$$y - 4 = -1\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

$$y - 4 = -x + \frac{1}{2}.$$

$$2y - 8 = -2x + 1.$$

$$2x + 2y - 9 = 0.$$

Untuk $x_2 = 1$ maka $m_2 = y'(1) = 1$, sehingga persamaan garis singgung melalui titik $(1, 4)$ dengan $m_2 = 1$ adalah

$$y - 4 = 1(x - 1).$$

$$y = x - 1 + 4.$$

$$y = x + 3.$$

Jadi, persamaan garis singgung dari parabola $y = 2x^2 - 3x + 5$ pada titik berordinat 4 adalah $2x + 2y - 9 = 0$ dan $y = x + 3$.

2. Suatu kurva $y = 3x - \frac{3}{x^2}$. memotong sumbu X di P . Carilah persamaan garis singgung kurva tersebut pada titik P !

Alternatif Penyelesaian:

Kurva $y = 3x - \frac{3}{x^2}$.

Menentukan titik P .

P merupakan titik potong kurva di sumbu- X artinya $y = 0$, sehingga $3x - \frac{3}{x^2} = 0$.

$$3x^3 - 3 = 0.$$

$$x^3 - 1 = 0.$$

$$x = 1.$$

Jadi, titik P adalah $(1,0)$.

Menentukan kemiringan yang melalui titik P

$$y = 3x - \frac{3}{x^2}.$$

$$y' = 3 + \frac{6}{x^3}.$$

Diperoleh $m = y'(1) = 3 + \frac{6}{1^3} = 9$.

Sehingga, persamaan garis singgung melalui titik $(1,0)$ dengan $m = 9$ yaitu $y - 0 = 9(x - 1)$ atau dapat dinyatakan dengan $y = 9x - 9$.

Jadi, persamaan garis singgung kurva di titik P adalah $y = 9x - 9$.

3. Kurva $y = (x^2 + 2)^2$ memotong sumbu Y pada titik A . Tunjukkan bahwa garis singgung pada kurva tersebut melalui titik A sejajar sumbu X dan berjarak 4 satuan terhadap titik pusat koordinat!

Alternatif Penyelesaian:

Mencari titik A yang merupakan titik potong kurva di sumbu Y artinya $x = 0$. Ordinat titik A adalah $y(0) = (0^2 + 2)^2 = 4$. Diperoleh koordinat titik A adalah $(0,4)$.

Misalkan titik $A(0,4)$ merupakan titik singgung kurva $y = (x^2 + 2)^2$, maka kemiringan garis singgung kurva tersebut adalah $m = y'(0) = 4(0)((0)^2 + 2) = 0$. Akibatnya, garis singgung tersebut sejajar sumbu X . Diperoleh persamaan garis singgungnya adalah $y = 4$.

Jadi, persamaan garis singgung kurva di titik A adalah $y = 4$.

4. Tentukan koordinat titik pada kurva $y = 2x^2 - 7x + 1$, jika garis singgung kurva melalui titik tersebut dan membentuk sudut 45° terhadap sumbu X positif. Tentukan pula persamaan garis singgung kurva yang melalui titik tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

Menentukan kemiringan garis singgung.

$$m = \tan \alpha = \tan 45^\circ = 1.$$

Menentukan titik singgung kurva $y = 2x^2 - 7x + 1$.

Kemiringan garis singgung merupakan nilai turunan pertama untuk x absis titik singgung, sehingga $y'(x) = 4x - 7$.

$$1 = 4x - 7.$$

$$x = 2.$$

Maka ordinat titik singgung adalah $y = 2(2)^2 - 7(2) + 1 = -5$. Diperoleh koordinat titik singgung $(2, -5)$.

Persamaan garis singgung melalui titik $(2, -5)$ dengan $m = 1$ adalah

$$\begin{aligned}y + 5 &= 1(x - 2). \\y + 5 &= x - 2. \\x - y - 7 &= 0.\end{aligned}$$

Jadi, persamaan garis singgung kurva $y = 2x^2 - 7x + 1$ melalui titik $(2, -5)$ dengan $m = 1$ yaitu $x - y - 7 = 0$.

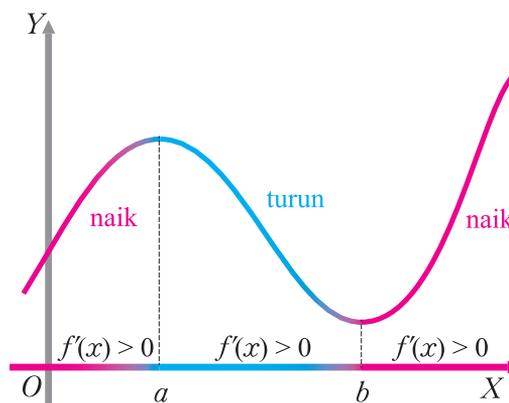
2. Fungsi Naik, Fungsi Turun, dan Diam (Stasioner)



Ayo Bereksplorasi

Eksplorasi 3.4

Perhatikan grafik fungsi $y = f(x)$ pada Gambar 3.4, untuk $x < a$ fungsi $f(x)$ naik, hal ini dikarenakan nilai absis (x) bergerak ke kanan tetapi grafik fungsi tersebut bergerak ke atas atau naik. Begitu juga pada $x > b$ merupakan fungsi naik. Untuk x di antara a hingga b atau $a < x < b$ merupakan fungsi turun karena nilai absis (x) bergerak ke kanan tetapi grafik fungsi tersebut bergerak ke bawah atau turun. Berdasarkan pernyataan tersebut, maka diharapkan peserta didik dapat memahami definisi fungsi naik dan fungsi turun sebagai berikut.



Gambar 3.3. Kemonotonan Grafik Fungsi $f(x)$



Definisi

Misalkan fungsi $f(x)$ terdefinisi dalam interval I .

Fungsi $f(x)$ dikatakan fungsi naik dalam interval I , jika untuk setiap bilangan x_1, x_2 dalam interval I dengan $x_1 < x_2$ maka berlaku $f(x_1) < f(x_2)$, atau ditulis

$$\text{Jika } x_1 < x_2 \text{ maka } f(x_1) < f(x_2).$$

Fungsi $f(x)$ dikatakan fungsi turun dalam interval I , jika untuk setiap bilangan x_1, x_2 dalam interval I dengan $x_1 < x_2$ maka berlaku $f(x_1) > f(x_2)$ atau ditulis

$$\text{Jika } x_1 < x_2 \text{ maka } f(x_1) > f(x_2).$$

Peserta didik harus ingat turunan pertama dari fungsi $f(x)$ yaitu $f'(x)$ secara geometris merupakan kemiringan suatu kurva $f(x)$ pada titik $(x, f(x))$. Interpretasi ini dapat digunakan untuk memeriksa perilaku suatu fungsi, yaitu:

- Pada interval $x < a$, untuk $f(x)$ fungsi naik, kemiringan garis singgungnya bernilai positif. Dengan kata lain $f'(x) > 0$.
- pada interval $x > a$, untuk $f(x)$ fungsi turun, kemiringan garis singgungnya bernilai negatif. Dengan kata lain $f'(x) < 0$.
- pada $x = a$, untuk $f(x)$ tidak naik dan tidak turun atau dikatakan bahwa $f(x)$ mempunyai nilai stasioner di $x = a$, kemiringan garis singgungnya pada titik $x = a$ bernilai nol atau $f'(x) = 0$.

Dari ketiga tingkah laku suatu fungsi tersebut peserta didik dapat memahami teorema yang berkaitan dengan fungsi naik, fungsi turun, dan stasioner.



Sifat-sifat

Misalkan fungsi $y = f(x)$ kontinu pada interval I dan $f(x)$ terdiferensiabel untuk setiap titik dalam I , jika x dalam interval tersebut jika

1. $f'(x) > 0$ maka fungsi $f(x)$ naik pada I ;
2. $f'(x) < 0$ maka fungsi $f(x)$ turun pada I ;
3. $f'(x) = 0$ maka fungsi $f(x)$ diam (stasioner) pada I .

Untuk memahami fungsi naik, turun, dan diam, guru dapat menggunakan beberapa Contoh Soal 3.6. Selanjutnya, guru mengelompokkan peserta didik menjadi beberapa kelompok untuk menyelesaikan masalah aturan rantai pada turunan seperti pada Latihan Soal Terbimbing 3.6 hingga 3.8.



Ayo Mencoba

Latihan Soal Terbimbing 3.6

Diberikan kurva $g(x) = x(6 - x)^2$, tentukan batasan kurva $g(x)$ agar tidak pernah turun!

Alternatif Penyelesaian:

Diketahui bahwa kurva $g(x) = x(6 - x)^2$. Dengan mengingat sifat fungsi $f(x) = u(x)v(x)$ maka turunan fungsi tersebut adalah $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$, sehingga $g'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = (6-x)^2 + x(-2(6-x)) = 36 - 24x + 3x^2$.

Untuk melihat hasil perhitungan, bisa dilihat hasil akhir $g'(x) = 36 - 24x + 3x^2$.

$$36 - 24x + 3x^2 = 0.$$

$$12 - 8x + x^2 = 0.$$

$$(x - 6)(x - 2) = 0.$$

Diperoleh $x = 2$ dan $x = 6$.

Grafik fungsi $g(x)$ tidak akan pernah turun jika $g'(x) > 0$, sehingga dengan menggunakan bantuan garis bilangan diperoleh bahwa



Jadi, $g(x)$ tidak pernah turun pada $x < 2$ atau $x > 6$.

Latihan Soal Terbimbing 3.7

Diketahui fungsi $f(x) = \frac{x}{x^2 - x - 1}$. Tentukan dalam interval berapa $f(x)$ naik dan dalam interval berapa $f(x)$ turun!

Alternatif Penyelesaian:

Untuk masalah fungsi $f(x) = \frac{x}{x^2 - x - 1}$, interval berapa $f(x)$ naik dan dalam interval berapa $f(x)$ turun. Untuk menentukan turunan pertama, perlu diingat bahwa jika $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ maka $f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$. Berdasarkan persamaan fungsi $f(x) = \frac{x}{x^2 - x - 1}$, Misalkan $u(x) = x$ dan $v(x) = x^2 - x + 1$, sehingga

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 - x + 1)^2}.$$

$$f(x) \text{ naik, maka } f'(x) > 0, \text{ sehingga } \frac{-x^2 + 1}{(x^2 - x + 1)^2} > 0.$$

Tidak ada x yang membuat $f(x)$ naik.

$$f(x) \text{ turun, maka } f'(x) < 0, \text{ sehingga } \frac{-x^2 + 1}{(x^2 - x + 1)^2} < 0.$$

$f(x)$ turun untuk semua $x \in \mathbb{R}$.

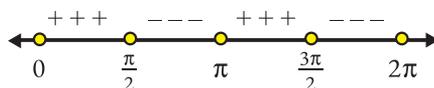
Latihan Soal Terbimbing 3.8

Diketahui fungsi $f(x) = \sin^2 x$ dengan $0 < x < 2\pi$. Tentukan dalam interval berapa $f(x)$ dalam kondisi naik!

Alternatif Penyelesaian:

Diketahui bahwa $f(x) = \sin^2 x$ maka $f'(x) = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$. Syarat bahwa fungsi $f(x)$ naik adalah ketika $f'(x) > 0$, yaitu $\sin 2x > 0$. Pembuat nol fungsi $\sin 2x$

adalah $(0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi)$. Dengan bantuan garis bilangan diperoleh bahwa



$f'(x)$ bernilai positif pada interval $0 < x < \frac{\pi}{2}$ atau $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

Jadi, diperoleh $f(x)$ merupakan fungsi naik jika berada pada interval $0 < x < \frac{\pi}{2}$ dan $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.



Ayo Mencoba

Pada aktivitas Ayo Mencoba untuk Latihan Soal 3.3, guru dapat mengarahkan kepada peserta didik untuk menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan fungsi naik, fungsi turun, dan diam (stasioner).

Latihan Soal 3.3

1. Tentukan interval fungsi naik dan interval fungsi turun pada kurva
 - a. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 15$.
 - b. $f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 24$.
 - c. $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}, x \neq 1$.

Alternatif Penyelesaian:

Interval fungsi naik dan interval fungsi turun pada kurva

a. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 15$.

$$f'(x) = 3x^2 - 3.$$

Fungsi naik apabila $f'(x) > 0$,

$$3x^2 - 3 > 0.$$

$$x < -1 \text{ atau } x > 1.$$

Fungsi turun apabila $f'(x) < 0$,

$$3x^2 - 3 < 0.$$

$$-1 < x < 1.$$

Jadi, interval fungsi naik pada $x < -1$ atau $x > 1$ dan interval fungsi turun pada $-1 < x < 1$.

b. Jika $f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 24$ maka $f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x$

Fungsi naik apabila $f'(x) > 0$,

$$4x^3 - 24x^2 + 36x > 0.$$

$$x > 0.$$

Fungsi turun apabila $f'(x) < 0$,

$$4x^3 - 24x^2 + 36x < 0.$$

$$x < 0.$$

Jadi, interval fungsi naik pada $x > 0$ dan interval fungsi turun pada $x < 0$.

c. Jika $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$ maka $f'(x) = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$

Fungsi naik apabila $f'(x) > 0$, sehingga

$$\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} > 0.$$

Penyebut bernilai positif untuk $x \neq 1$, sehingga

$$x^2 - 2x - 3 > 0.$$

$$x < -1 \text{ atau } x > 3.$$

Fungsi turun apabila $f'(x) < 0$, sehingga

$$x^2 - 2x - 3 < 0.$$

$$-1 < x < 3.$$

Karena $x \neq 1$ maka intervalnya diperoleh

Untuk $x < -1$, maka $f'(x) > 0$.

Untuk $-1 < x < 1$, maka $f'(x) < 0$.

Untuk $1 < x < 3$, maka $f'(x) < 0$.

Untuk $x > 3$, maka $f'(x) > 0$.

Jadi, interval fungsi naik pada $x < -1$ atau $x > 3$ dan interval fungsi turun pada $-1 < x < 3$.

2. Jika fungsi $f(x) = ax^3 + x^2 + 5$ selalu naik dalam interval $0 < x < 2$, tentukanlah nilai dari koefisien a !

Alternatif Penyelesaian:

Fungsi $f(x) = ax^3 + x^2 + 5$ selalu naik dalam interval $0 < x < 2$, maka $(x-0)(x-2) < 0$
 $x^2 - 2x < 0$.

Persamaan ini dikalikan dengan (-1) , sehingga diperoleh $-x^2 + 2x > 0$ (1).

Karena $f(x) = ax^3 + x^2 + 5$ maka $f'(x) = 3ax^2 + 2x$.

Karena selalu naik maka $f'(x) > 0$, sehingga diperoleh $3ax^2 + 2x > 0$ (2).

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh

$$3ax^2 + 2x = -x^2 + 2x.$$

$$3ax^2 = -x^2.$$

$$a = -\frac{x^2}{3x^2} = -\frac{1}{3}.$$

Jadi, nilai koefisien $a = -\frac{1}{3}$.

3. Tentukan interval fungsi naik dan turun jika diketahui kurva $f(x) = \sin 2x \cos 2x$ dengan $x \geq 0$!

Alternatif Penyelesaian:

Jika $f(x) = \sin 2x \cos 2x$ maka $f'(x) = 2 \cos 4x$.

Periode fungsi $f(x) = \sin 2x \cos 2x$ adalah $\frac{\pi}{2}$.

Titik stasioner fungsi adalah $f'(x) = 0$, maka $2 \cos 4x = 0$, sehingga diperoleh,

$$\begin{aligned} \cos 4x &= \cos \frac{\pi}{2} & \text{atau} & \cos 4x = \cos \frac{3\pi}{2} \\ x &= \frac{\pi}{8} & & x = \frac{3\pi}{8} \end{aligned}$$

Titik kritis untuk tiap periode adalah $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n$ dan $x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n$, dengan $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

- Fungsi naik saat $f'(x) > 0$, maka $2 \cos 4x > 0$, sehingga, $2 \cos 4x = 0$.

$$\begin{aligned} \cos 4x &= \cos \frac{\pi}{2} & \text{atau} & \cos 4x = \cos \frac{3\pi}{2} \\ x &= \frac{\pi}{8} & & x = \frac{3\pi}{8} \end{aligned}$$

Sehingga $f(x)$ naik untuk $\frac{\pi}{2}n < x < \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n$ dan $\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n < x < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}n$ untuk $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

- Fungsi turun saat $f'(x) < 0$, maka $2 \cos 4x < 0$, sehingga $2 \cos 4x = 0$.

$$\begin{aligned} \cos 4x &= \cos \frac{\pi}{2} & \text{atau} & \cos 4x = \cos \frac{3\pi}{2} \\ x &= \frac{\pi}{8} & & x = \frac{3\pi}{8} \end{aligned}$$

Sehingga $f(x)$ turun untuk $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n < x < \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n$ untuk n bilangan asli.

Jadi, interval fungsi naik pada saat $\frac{\pi}{2}n < x < \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n$ dan $\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n < x < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}n$ dan interval fungsi turun pada $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n < x < \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n$.

4. Sebuah partikel bergerak sepanjang kurva $s(t) = t^3 - \frac{15}{2}t^2 + 18t - 1$, untuk $t \neq 0$.
- Tentukan kecepatan dan percepatan partikel dalam fungsi waktu t !
 - Tentukan nilai t saat kecepatan partikel sama dengan nol!
 - Tentukan pada interval mana kecepatan partikel negatif dan pada interval mana kecepatan partikel positif!
 - Berapakah nilai t saat percepatan partikel sama dengan 0!

Alternatif Penyelesaian:

Partikel bergerak sepanjang kurva $s(t) = t^3 - \frac{15}{2}t^2 + 18t - 1$, untuk $t \neq 0$.

- a. Untuk menentukan kecepatan dilakukan dengan $V(t) = \frac{ds}{dt}$, sehingga

$$V(t) = \frac{ds}{dt} = s'(t) = 3t^2 - 15t + 18.$$

Percepatan diperoleh dari $a(t) = s''(t) = 6t - 15$.

- b. Nilai t ketika kecepatan partikel sama dengan nol, sehingga $V(t) = 0$. Diperoleh bahwa $3t^2 - 15t + 18 = 0$, dengan memfaktorkan persamaan ini diperoleh bahwa $t_1 = 3$ atau $t_2 = 2$.

Jadi, nilai t ketika kecepatan nol adalah $t_1 = 3$ atau $t_2 = 2$.

- c. $V(t) < 0$ (bernilai negatif).

Interval: $2 < t < 3$.

$V(t) > 0$ (bernilai positif).

Interval: $t < 2$ atau $t > 3$.

- d. Nilai t ketika percepatan partikel sama dengan 0.

$$a(t) = 0.$$

$$6t - 15 = 0.$$

$$t = \frac{15}{6} = 2,5.$$

Jadi, nilai t ketika percepatan 0 adalah $t = 2,5$.

3. Titik Ekstrim, Nilai Balik Minimum, dan Nilai Balik Maksimum

Dalam titik stasioner peserta didik akan mengenal istilah nilai maksimum, nilai minimum, titik balik minimum, dan titik balik maksimum. Peserta didik secara berkelompok diarahkan untuk untuk membedakan keempat istilah tersebut.!



Ayo Berdiskusi

Guru mengelompokkan peserta didik dan berdiskusi. Guru mengajak peserta didik untuk bekerja sama dan percaya diri dalam menyampaikan pendapatnya. Dengan memperhatikan bahwa $f'(x) > 0$ merupakan fungsi naik dan $f'(x) < 0$ merupakan fungsi turun.

- Kapan kondisi suatu titik disebut dengan titik ekstrim minimum (stasioner minimum)?
- Kapan kondisi suatu titik disebut dengan titik ekstrim maksimum (stasioner minimum)?

Untuk memahami titik stasioner guru dapat menggunakan beberapa contoh seperti Contoh Soal 3.7a, dan dapat mencoba menyelesaikan Contoh Soal 3.7b

Contoh Soal 3.7

Tentukan titik stasioner untuk fungsi

- $y = f(x) = x^2$.
- $y = f(x) = x^2 + 2x - 3$.

Alternatif Jawaban Contoh Soal 3.7b

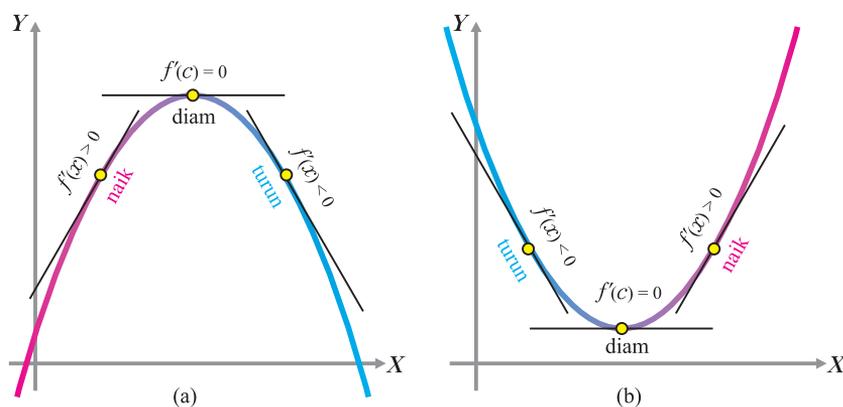
$y = x^2 + 2x - 3$ maka $y' = 2x + 2 = 0$.

Nilai x yang menyebabkan suatu fungsi stasioner adalah nilai $f'(x) = y' = 0$, sehingga diperoleh $x = -1$.

Dengan mensubstitusikan $x = -1$ ke persamaan $y = x^2 + 2x - 3$ diperoleh $y = -4$.

Jadi, titik stasioner terletak pada $(-1, -4)$.

a. Uji Turunan Pertama

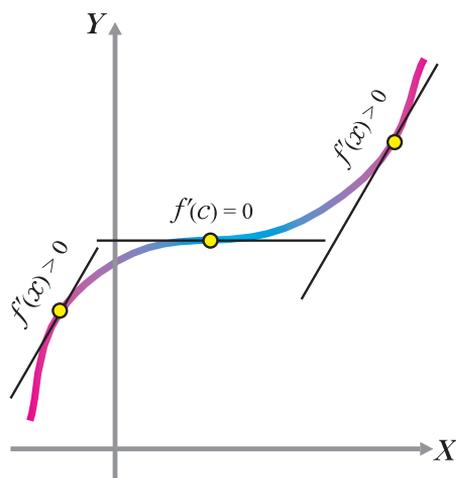


Gambar 3.4. Nilai Balik dari Kurva $f(x)$

Jika $f'(c) = 0$, maka $f(c)$ adalah nilai stasioner f pada c . Nilai stasioner pada grafik f dapat bernilai balik maksimum, minimum, atau balik horizontal. Jenis nilai stasioner ini dapat diidentifikasi dengan melihat tanda $f'(x)$ di sekitar $x = c$, seperti:

- Jika $f(x)$ berubah tanda dari positif menjadi negatif setelah melalui nol, maka $f(c)$ merupakan **nilai balik maksimum** dari $f(x)$ sedangkan titik $(c, f(c))$ merupakan titik balik maksimum dari $f(x)$ (lihat Gambar 3.4 (a)).

2. Jika $f(x)$ berubah tanda dari negatif menjadi positif setelah melalui nol, maka $f(c)$ merupakan nilai balik minimum dari $f(x)$ sedangkan $(c, f(c))$ merupakan titik balik minimum dari $f(x)$ (lihat Gambar 3.4 (b)).
3. Jika $f(x)$ tidak berubah tanda saat melalui nol, maka $f(x)$ mempunyai titik belok horizontal pada c atau $(c, f(c))$ merupakan titik belok horizontal $f(x)$ (lihat Gambar 3.5).



Gambar 3.5. Kurva Titik Belok Horizontal pada c dengan Titik Belok $(c, f(c))$



Untuk memahami jenis titik stasioner dan jenisnya, titik stasioner guru dapat menggunakan beberapa Contoh Soal 3.7, dilanjutkan dengan Latihan Soal Terbimbing 3.9.

Latihan Soal Terbimbing 3.9

Tentukan titik stasioner dari fungsi $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$ dan tentukan jenis titik stasioner tersebut, berikanlah alasannya!

Alternatif Penyelesaian:

Turunan pertama dari $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$ adalah $f'(x) = x^3 - 4x$. Syarat untuk menentukan titik stasioner adalah $f'(x) = 0$, sehingga $x^3 - 4x = 0$.

$$x(x-2)(x+2)=0.$$

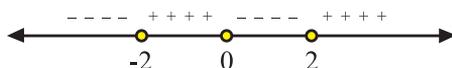
Dari persamaan $f'(x) = 0$ diperoleh bahwa $x = 0, x = -2, x = 2$.

Untuk $x = -2$, diperoleh $f(-2) = -4$.

Untuk $x = 0$, diperoleh $f(0) = 0$.

Untuk $x = 2$, diperoleh $f(2) = -4$, sehingga diperoleh titik stasioner $(-2, -4), (0, 0), (2, -4)$.

Dengan menggunakan bantuan garis bilangan diperoleh bahwa nilai turunan pertama fungsi $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$ di sekitar absis $-2, 0$, dan 2 .



Berdasarkan garis bilangan tersebut, dapat dikatakan bahwa:

- Titik $(-2, -4)$ adalah titik balik minimum, karena nilai $f'(x)$ berganti tanda dari negatif menjadi positif setelah melalui titik $(-2, -4)$.
- Titik $(0, 0)$ adalah titik balik maksimum, karena nilai $f'(x)$ berganti tanda dari positif menjadi negatif setelah melalui titik $(0, 0)$.
- Titik $(2, -4)$ adalah titik balik minimum, karena nilai $f'(x)$ berganti tanda dari negatif menjadi positif setelah melalui titik $(2, -4)$.



Cek Dengan Photomath

Guru dapat memberikan saran kepada peserta didik untuk memeriksa jawaban yang telah peserta didik peroleh menggunakan *Photomath*. Hasil yang diperoleh untuk Latihan Soal terbimbing 3.9 adalah:

Nilai Maksimum relatif adalah 0 pada $x = 0$.

Nilai Maksimum relatif adalah -4 pada $x = 2$ dan $x = -2$.

b. Uji Turunan Kedua

Guru menjelaskan mengenai uji turunan kedua untuk menentukan jenis titik ekstrim dari suatu fungsi sehingga peserta didik dapat menggunakan sifat berikut.

Diberikan interval I yang memuat c . Fungsi $f(x)$ kontinu dan terdiferensiabel dalam interval I . Turunan pertama dan turunan kedua $f(x)$ pada interval I , serta $f''(c)$ dengan $f(c)$ nilai stasioner.

1. Jika $f''(c) < 0$, maka $f(c)$ merupakan nilai balik maksimum fungsi f .
2. Jika $f''(c) > 0$, maka $f(c)$ merupakan nilai balik minimum fungsi f .
3. Jika $f''(c) = 0$, maka $f(c)$ bukan nilai ekstrim fungsi f dan titik $(c, f(c))$ adalah titik beloknya.

Untuk memperjelas materi ini peserta didik dapat mendiskusikan dengan teman Contoh Soal 3.9.



Ayo Mencoba

Pada aktivitas Ayo Mencoba untuk Latihan Soal 3.4, guru dapat mengarahkan kepada peserta didik untuk menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan titik ekstrim, nilai balik minimum, dan nilai balik maksimum.

Latihan Soal 3.4

1. Tentukan nilai titik balik maksimum dan minimum dari
 - a. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$.
 - b. $f(x) = \frac{x^2 + 6x + 9}{3x^2}$.

Alternatif Penyelesaian:

Titik balik minimum dan maksimum

- a. Jika $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$, maka $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ dan $f''(x) = 6x - 12$.

Untuk $3x^2 - 12x + 9 = 0$, dengan menggunakan pemfaktoran, maka diperoleh $x_1 = 1$ atau $x_2 = 3$.

Dengan menyubstitusikan $x_1 = 1$ ke persamaan $f''(x) = 6x - 12$, diperoleh bahwa $f''(1) < 0$. Maka untuk $f(1)$ merupakan nilai balik maksimum.

Untuk mengetahui titik balik maksimum, dapat dilakukan dengan menyubstitusikan $x_1 = 1$ ke $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$. Diperoleh bahwa $f(1) > 0$, sehingga titik balik maksimumnya adalah $(1, 8)$.

Dengan menyubstitusikan $f(3)$, ke persamaan $f''(x) = 6x - 12$ sehingga $f''(3) > 0$. Maka $x_2 = 3$ merupakan nilai balik minimum.

Untuk mengetahui titik balik minimum, dapat dilakukan dengan menyubstitusikan $x_2 = 3$ ke $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$. Diperoleh bahwa $f(3) > 0$, sehingga titik balik maksimumnya adalah $(3, 4)$.

Jadi, titik balik maksimum terletak pada titik $(1, 8)$, sedangkan titik balik minimum terletak pada titik $(3, 4)$.

- b. Jika $f(x) = \frac{x^2 + 6x + 9}{3x^2}$ maka $f'(x) = \frac{-2x - 6}{x^3}$ dan $f''(x) = \frac{4x + 18}{x^4}$.

Pada $\frac{-2x - 6}{x^3} = 0$, diperoleh bahwa $x = -3$. Karena $f''(-3) > 0$, maka ini merupakan nilai balik minimum. Untuk menentukan titik balik minimum dilakukan dengan menyubstitusikan $x = -3$ ke persamaan $f(x) = \frac{x^2 + 6x + 9}{3x^2}$.

Diperoleh bahwa $f(-3) = \frac{(-3)^2 + 6(-3) + 9}{3(-3)^2} = 0$.

Jadi, titik balik minimumnya adalah $(-3, 0)$.

2. Tentukan titik belok dari fungsi

a. $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2$.

b. $f(x) = x^3 - 6x + 12x + 5$.

Alternatif Penyelesaian:

Titik belok fungsi

- a. Jika $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2$ maka $f'(x) = \frac{1}{2}x$ dan $f''(x) = \frac{1}{2}$.

Perhatikan bahwa, titik belok $f(x)$ diperoleh saat $f'(x) = 0$. Karena $f''(x) \neq 0$, maka $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2$ tidak memiliki titik belok.

- b. Jika $f(x) = x^3 - 6x + 12x + 5$, maka $f'(x) = 3x^2 - 12x + 12$ dan $f''(x) = 6x - 12$. Syarat untuk menentukan titik belok adalah $f''(x) = 0$, sehingga $6x - 12 = 0$ atau $x = 2$. Dengan menyubstitusikan $x = 2$ ke $f(x) = x^3 - 6x + 12x + 5$, diperoleh bahwa $f(2) = (2)^3 - 6(2)^2 + 12(2) + 5 = 13$.

Jadi, titik beloknya adalah $(2, 13)$.

3. Tentukan nilai ekstrim dari fungsi berikut, dan tentukan jenis titik ekstrimnya

a. $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

b. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$.

Alternatif Penyelesaian:

Nilai ekstrim dari fungsi dan jenis titik ekstrim.

- a. Jika $f(x) = x^2 - 5x + 6$, maka $f'(x) = 2x - 5$ dan $f''(x) = 2$.

Pada $2x - 5 = 0$ diperoleh bahwa $x = \frac{5}{2}$. Dengan menyubstitusikan $x = \frac{5}{2}$ ke $f(x)$ dan $f''(x)$ diperoleh

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{5}{2}\right) + 6 = -\frac{1}{4}.$$

$$f''\left(\frac{5}{2}\right) = 2.$$

Karena $f''\left(\frac{5}{2}\right) > 0$, maka $f\left(\frac{5}{2}\right)$ merupakan nilai balik minimum.

Jadi, $f(x) = x^2 - 5x + 6$ memiliki nilai ekstrim minimum di $f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{1}{4}$.

- b. Jika $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$ maka $f'(x) = x^2 + x - 2$ dan $f''(x) = 2x + 1$.

Pada $x^2 + x - 2 = 0$, dengan menggunakan pemfaktoran diperoleh bahwa $x_1 = 1$ atau $x_2 = -2$.

Jika $x_1 = 1$ maka $f(1) = \frac{23}{6}$, dan $f''(x) = 2x + 1$, sehingga $f''(1) = 2(1) + 1 = 3 > 0$, maka $f(1)$ merupakan nilai balik minimum.

Jika $x_2 = -2$ maka $f(-2) = \frac{25}{3}$, dan $f''(-2) = 2(-2) + 1 = -3 < 0$, maka $f(-2)$ merupakan nilai balik maksimum.

Jadi, $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$ memiliki nilai balik minimum di $f(1) = \frac{23}{6}$ dan memiliki nilai balik maksimum di $f(-2) = \frac{25}{3}$.



Soal Berpikir Kreatif

4. Diketahui a dan b adalah akar-akar dari persamaan $x^2 + 5px + p^3 - 4p + 1 = 0$. Tentukan nilai p agar $a + ab + b$ bernilai maksimum pada $-3 < p < 3$!

Alternatif Penyelesaian:

a dan b merupakan akar-akar dari persamaan $x^2+5px+p^3-4p+1=0$, akan dicari nilai p agar $a+ab+b$ bernilai maksimum pada $-3 < p < 3$.

Diperoleh jumlah akar dan hasil akar dari persamaan $x^2+5px+p^3-4p+1=0$ yaitu:

$$a+b=-5p.$$

$$ab=p^3-4p+1.$$

sehingga $a+ab+b=-5p+(p^3-4p+1)=p^3-9p+1$.

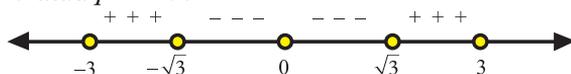
Misal: $f(p)=p^3-9p+1$.

Nilai maksimum dari $f(p)$ akan tercapai jika $f'(p)=0$, maka $f'(p)=3p^2-9$

$$0=3(p^2-3).$$

$$0=3(p-\sqrt{3})(p+\sqrt{3}).$$

Diperoleh $p=-\sqrt{3}$ atau $p=\sqrt{3}$.



Dari garis bilangan diperoleh bahwa $f(p)$ maksimum atau pada $p=-\sqrt{3}$ atau $p=\sqrt{3}$.

Uji/cek dengan substitusi nilai p ke $f(p)$.

$$p=-\sqrt{3}, \text{ maka } f(-\sqrt{3})=(-\sqrt{3})^3-9(-\sqrt{3})+1=6\sqrt{3}+1.$$

$$p=\sqrt{3}, \text{ maka } f(\sqrt{3})=(\sqrt{3})^3-9(\sqrt{3})+1=-6\sqrt{3}+1.$$

Jadi, agar $a+ab+b$ bernilai maksimum pada $-3 < p < 3$, maka nilai p adalah $-\sqrt{3}$.

5. Buktikan bahwa setiap fungsi kuadrat $f(x)=ax^2+bx+c$, dengan $a \neq 0$ mempunyai tepat satu titik ekstrim!

Alternatif Penyelesaian:

Karena $f(x)=ax^2+bx+c$ maka $f'(x)=2ax+b$.

Untuk menentukan titik ekstrim, terlebih dahulu dicari $f'(x)=0$, maka

$$2ax+b=0.$$

$$x=-\frac{b}{2a}.$$

Substitusikan $x=-\frac{b}{2a}$ pada $f(x)$, sehingga diperoleh

$$f(x)=ax^2+bx+c=a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2+b\left(-\frac{b}{2a}\right)+c=-\frac{2b^2-4ac}{4a}.$$

Jadi, terbukti bahwa setiap fungsi kuadrat $f(x)=ax^2+bx+c$ dengan $a \neq 0$ mempunyai tepat satu titik ekstrem yaitu $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{2b^2-4ac}{4a}\right)$.

D. Aplikasi Turunan di Berbagai Bidang Ilmu

Setelah peserta didik mempelajari konsep turunan, pada bagian ini peserta didik akan mempelajari aplikasi turunan fungsi pada berbagai bidang keilmuan. Untuk menguasai aplikasi turunan di berbagai bidang, guru dapat menggunakan beberapa contoh seperti Contoh Soal 3.10 dan 3.11, dan peserta didik dapat mencoba menyelesaikan contoh soal dengan strategi lain.

Selanjutnya, guru mengelompokkan peserta didik menjadi beberapa kelompok untuk menyelesaikan masalah aturan rantai pada turunan seperti pada Latihan Soal Terbimbing 3.10.



Ayo Mencoba

Latihan Soal Terbimbing 3.10

Sebuah partikel bergerak dengan lintasan kurva $s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, dimana s adalah jarak yang ditempuh partikel dalam satuan meter, dan t adalah waktu yang diperlukan partikel dalam satuan detik. Tentukan:

- Panjang lintasan partikel pada $t = 0$ detik, $t = 1$ detik, dan $t = 2$ detik.
- Kecepatan partikel pada waktu $t = 0$ detik, $t = 1$ detik, dan $t = 2$ detik.
- Percepatan partikel pada $t = 0$ detik, $t = 1$ detik, dan $t = 2$ detik.

Alternatif Penyelesaian:

Bagian a)

Untuk menentukan panjang lintasan s atau nilai ketinggian, kalian dapat mensubstitusikan t pada persamaan $s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ sehingga

$$\text{untuk } t = 0, \text{ maka } f(0) = 0^3 - 6(0)^2 + 9(0) = 0 \text{ meter.}$$

$$\text{untuk } t = 1, \text{ maka } f(1) = 1^3 - 6(1)^2 + 9(1) = 4 \text{ meter.}$$

$$\text{untuk } t = 2, \text{ maka } f(2) = 2^3 - 6(2)^2 + 9(2) = 2 \text{ meter.}$$

Bagian b)

Untuk menentukan nilai kecepatan dapat menggunakan konsep turunan pertama suatu fungsi, sehingga $f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, maka persamaan kecepatan adalah

$$v = \frac{df(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(t^3 - 6t^2 + 9t) = 3t^2 - 12t + 9.$$

Maka kecepatan pada $t = 0$ detik adalah $v = 3(0)^2 - 12(0) + 9 = 9$ meter/detik.

Kecepatan pada $t = 1$ detik adalah $v = 3(1)^2 - 12(1) + 9 = 0$ meter/detik.

Kecepatan pada $t = 2$ detik adalah $v = 3(2)^2 - 12(2) + 9 = -9$ meter/detik.

Bagian c)

Untuk menentukan nilai percepatan dapat menggunakan konsep turunan kedua suatu fungsi, sehingga $f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, maka persamaan percepatan adalah

$$a = \frac{d^2 f(t)}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(t^3 - 6t^2 + 9t) = 6t - 12.$$

Maka percepatan pada $t = 0$ detik adalah $6(0) - 12 = -12 \text{ m/s}^2$

percepatan pada $t = 1$ detik adalah $6(1) - 12 = -6 \text{ m/s}^2$

percepatan pada $t = 2$ detik adalah $6(2) - 12 = 0 \text{ m/s}^2$.

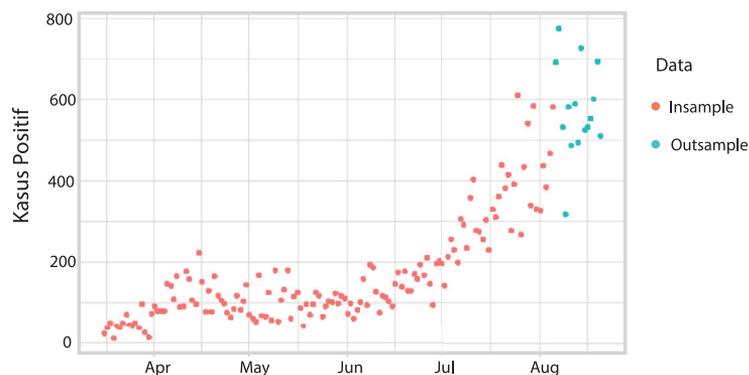
Secara berkelompok, guru mengarahkan peserta didik diarahkan untuk mempelajari Ayo Berpikir Kritis. Guru mengajak peserta didik untuk percaya diri dalam menyampaikan gagasannya dan berpikir kritis.



Ayo Berpikir Kritis

Diketahui grafik perkembangan jumlah kasus baru positif harian Covid-19 di DKI Jakarta mulai tanggal 16 Maret 2020 sampai dengan 20 Agustus 2020 terlihat pada Gambar 3.6.

Pada Gambar 3.6, jumlah kasus baru positif harian Covid-19 setiap harinya selalu naik turun, namun secara umum grafik tersebut cenderung naik. Berkaitan kondisi ini, Rory dan Rita Diana telah mempublikasikan hasil estimasi pemodelan data covid tersebut menggunakan regresi polinomial lokal pada tahun 2021. Misalkan estimasi fungsi kasus baru di DKI Jakarta tersebut adalah $f(x) = 48,26x^3 + 44,37x^2 - 22,18x + 17,57$, dengan X adalah estimasi bulan.



Gambar 3.6. Jumlah Orang Terkonfirmasi Covid di DKI Jakarta sejak 16 Maret – 20 Agustus 2020
Sumber: Seminar Official Official Statistics/R. Rory & R. Diana (2020)

Kemudian Setelah itu, peserta didik secara berkelompok melakukan kegiatan Ayo Berdiskusi. Guru mengajak peserta didik untuk berani menyampaikan pendapat dan menghargai pendapat rekannya.



Ayo Berdiskusi

Berdasarkan pemodelan data tersebut, diskusikan dengan kelompok untuk mengestimasi laju penambahan orang terkonfirmasi Covid-19! Kapan estimasi fungsi tersebut mengalami puncaknya?.

Alternatif Penyelesaian:

Diperoleh suatu $f(x) = 48,26x^3 + 44,37x^2 - 22,18x + 17,57$ maka

$$f'(x) = 144,78x^2 + 88,74x - 22,18 = 0.$$

Dengan menggunakan rumus abc , diperoleh $x_1 = 0,191$ dan $x_2 = -0,804$.

$$\text{Untuk } x_1 = 0,191 \text{ maka } f(0,191) = 18,715783.$$

$$\text{Untuk } x_2 = -0,804, \text{ maka } f(-0,804) = 6,832358.$$

Estimasi fungsi tersebut mengalami puncaknya pada saat $x = 0,191$ dengan nilai $f(0,191) = 18,715783$. Jadi, kasus covid mengalami puncaknya pada bulan ke 19 setelah bulan Maret 2020 atau kurang lebih bulan Oktober 2021.



Ayo Mencoba

Pada aktivitas Ayo Mencoba untuk Latihan Soal 3.5, guru dapat mengarahkan kepada peserta didik untuk menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan limit fungsi aljabar.

Latihan Soal 3.5

1. Pembangunan sebuah jembatan dapat diselesaikan dalam x hari, dengan biaya $y = 3x - 900 + \frac{120}{x}$ dan y dalam ratusan ribu. Berapa hari pembangunan jembatan tersebut harus diselesaikan agar biaya yang dikeluarkan oleh pemborong minimum!

Alternatif Penyelesaian:

Menentukan lamanya pembangunan jembatan agar dapat meminimumkan biaya

$$y = (3x - 900 + \frac{120}{x})x = 3x^2 - 900x + 120.$$

$$y' = 6x - 900.$$

$$0 = 6x - 900.$$

$$x = \frac{900}{6} = 150.$$

Jadi, lama pembangunan jembatan agar biaya minimum adalah 150 hari.

2. Tentukan dua buah bilangan real positif dengan jumlahan kedua bilangan itu minimum dan mempunyai hasil kali 80!

Alternatif Penyelesaian:

Dua buah bilangan jika dikalikan hasilnya 80 dan jumlah keduanya minimum.

Misalkan kedua bilangan adalah x dan y , maka $x \cdot y = 80$ atau dapat dinyatakan dengan $y = \frac{80}{x}$.

Misal $A = x + y$ maka $A = x + \frac{80}{x}$.

Syarat A minimum yaitu $A' = 0$, maka

$$A = x + \frac{80}{x}.$$

$$A' = 1 - 80x^{-2}.$$

Karena $A' = 0$, maka $1 - 80x^{-2} = 0$ sehingga $x = 4\sqrt{5}$ atau $x = -4\sqrt{5}$. Karena x bilangan real positif, maka nilai x yang mungkin adalah $x = 4\sqrt{5}$.

Substitusikan $x = 4\sqrt{5}$ ke persamaan $y = \frac{80}{x}$. Diperoleh $y = \frac{80}{4\sqrt{5}} = \frac{20}{\sqrt{5}} = 4\sqrt{5}$

Jadi, kedua bilangan real positif tersebut adalah $4\sqrt{5}$ dan $4\sqrt{5}$.

3. Sebuah talang air akan dibuat dari sebuah plat seng dengan lebar 50 cm, dengan cara melipat kedua sisi plat seng sama panjang. Tentukan ukuran penampang tegak talang air tersebut sehingga talang dapat dialiri air semaksimal mungkin!

Alternatif Penyelesaian:

Ukuran penampang tegak talang air.

Misal: x = panjang sisi yang dilipat .

Maka: $p = 30 - 2x$ dan $l = x$.

Agar talang dapat dialiri air sebanyak-banyaknya, maka luas maksimal talang

$$L(x) = p \cdot l = (30 - 2x)(x) = 30x - 2x^2 = -2x^2 + 30x.$$

$$L'(x) = -4x + 30.$$

$$0 = -4x + 30.$$

$$4x = 30.$$

$$x = \frac{30}{4} = 7,5.$$

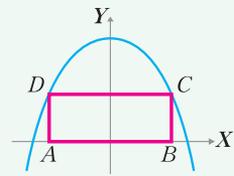
Maka ukuran panjang dan lebarnya adalah

$$p = 30 - 2x = 30 - 2(7,5) = 15 \text{ cm}.$$

$$l = x = 7,5 \text{ cm}.$$

Jadi, agar talang dapat dialiri air sebanyak-banyaknya, maka ukuran penampang tegak talang air tersebut adalah panjang 15 cm dan lebar 7,5 cm.

4. Suatu parabola mempunyai persamaan $y = 12 - x^2$. Dibentuk sebuah persegi panjang yang dua titiknya berada pada kurva tersebut, seperti pada gambar di samping. Tentukan luas maksimum persegi panjang $ABCD$!



Alternatif Penyelesaian:

Luas maksimum persegi panjang $ABCD$

$$L(x) = p \cdot l = 2x \cdot y = 2x(12 - x^2) = 24x - 2x^3.$$

$L'(x) = 24 - 6x^2$ akan mencapai maksimum jika $L'(x) = 0$, maka

$$0 = 24 - 6x^2.$$

$$6x^2 = 24.$$

$$x^2 = \frac{24}{6}.$$

$$x = \pm\sqrt{4} = \pm 2.$$

$$x = -2, \text{ maka } L(-2) = 24(-2) - 2(-2)^3 = -48 + 16 = -32.$$

$$x = 2, \text{ maka } L(2) = 24(2) - 2(2)^3 = 48 - 16 = 32.$$

Jadi, luas maksimum persegi panjang $ABCD$ adalah 32 satuan luas.

5. Keuntungan produksi sebuah barang dalam suatu perusahaan dinyatakan dengan fungsi $f(x) = (225x - x^2)$ dengan $f(x)$ dalam rupiah dan x menyatakan banyaknya barang. Tentukan jumlah barang yang harus diproduksi agar keuntungan mencapai maksimum!

Alternatif Penyelesaian:

Diketahui fungsi keuntungan $f(x) = 225x - x^2$, maka $f'(x) = -2x + 225$.

Keuntungan mencapai maksimum jika $f'(x) = 0$, maka $-2x + 225 = 0$.

$$x = \frac{225}{2} = 112,5.$$

Jadi, banyaknya barang yang harus diproduksi agar keuntungan maksimum adalah 113 buah barang (dilakukan pembulatan karena tidak ada pembuatan sebesar 0,5 barang).



Interaksi Guru dengan Orang Tua

Guru memberitahukan kepada peserta didik, bahwa mereka belajar di rumah untuk mengerjakan tugas pada Buku Siswa Latihan Soal 3.1 sampai Latihan Soal 3.5 dan Uji Kompetensi bersama orang tua atau wali murid. Guru memberi tahu orang tua atau wali murid untuk mengingatkan, membimbing, dan mengawasi putra-putrinya untuk mengerjakan tugas di rumah, serta memberi paraf pada hasil kerjanya. Dijelaskan pula bahwa yang harus dilakukan orang tua adalah membimbing, bukan mengerjakan tugas. Interaksi ini dapat dilakukan melalui pertemuan, sms, telepon, grup media sosial, atau buku penghubung. Jika orang tua belum jelas cara membimbingnya dipersilakan menghubungi guru.

Uji Kompetensi

1. Tentukan turunan pertama dari:

a. $f(x) = \sqrt{4x + \sqrt{4+x}}$

b. $g(z) = \frac{\sin z + \cos z}{2z}$

Alternatif Penyelesaian:

Turunan pertama dari fungsi:

a. $f(x) = \sqrt{4x + \sqrt{4+x}}$.

Misal: $u = 4x + \sqrt{4+x}$ maka $f(x) = \sqrt{4x + \sqrt{4+x}}$ dapat dinyatakan dengan

$$f(x) = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}, \text{ sehingga } \frac{d}{du}(u^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2u^{\frac{1}{2}}}.$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \left[\sqrt{4x + \sqrt{4+x}} \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{4x + \sqrt{4+x}}} \left[\frac{d}{dx}(4x + \sqrt{4+x}) \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{4x + \sqrt{4+x}}} \left[4 + \left(\frac{d}{dx}(\sqrt{4+x}) \right) \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{4x + \sqrt{4+x}}} \left[4 + \frac{1}{2\sqrt{4+x}} \right] \\ &= \frac{4}{2\sqrt{4x + \sqrt{4+x}}} + \frac{1}{2\sqrt{4x + \sqrt{4+x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{4+x}} \\ &= \frac{4}{2\sqrt{4x + \sqrt{4+x}}} + \frac{1}{4\sqrt{4x + \sqrt{4+x}} \sqrt{4+x}} \\ &= \frac{8\sqrt{4+x} + 1}{4\sqrt{4x + \sqrt{4+x}} \sqrt{4+x}}. \end{aligned}$$

b. $g(z) = \frac{\sin z + \cos z}{2z}$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left(\frac{z \left(\frac{d}{dz}(\sin z + \cos z) \right) - (\sin z + \cos z) \left(\frac{d}{dz}(z) \right)}{z^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{z \left(\frac{d}{dz}(\sin z) + \frac{d}{dz}(\cos z) \right) - (\sin z + \cos z) \left(\frac{d}{dz}(z) \right)}{z^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{z \left[\left(\frac{d}{dz}(\sin z) \right) + \left(\frac{d}{dz}(\cos z) \right) \right] - [(\sin z + \cos z) \left(\frac{d}{dz}(z) \right)]}{z^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{z(\cos z - \sin z) - (\sin z + \cos z)}{z^2} \right) = \frac{z \cdot \cos z - z \cdot \sin z - \sin z - \cos z}{2z^2}. \end{aligned}$$

2. Sejenis bakteri dapat membelah diri karena ada nutrisi untuk berkembang biak. Seorang laboran mengamati kadar nutrisi dalam bakteri tersebut untuk mengetahui laju perkembangbiakannya. Hasil dari pengamatan tersebut menunjukkan bahwa kadar nutrisi bakteri mendekati fungsi $y = \csc\left(\frac{\pi}{10}x\right) + 50$ mg dengan x adalah waktu dalam jam. Berapakah laju perubahan kadar nutrisi pada saat $x = \frac{\pi}{6}$?

Alternatif Penyelesaian:

Diketahui bahwa kadar nutrisi bakteri mendekati fungsi $y = \csc\left(\frac{\pi}{10}x\right) + 50$ mg dengan x adalah waktu dalam jam. Laju perubahan kadar nutrisi pada saat $x = \frac{\pi}{6}$ dapat dihitung dengan formula $y = \csc\left(\frac{\pi}{10}x\right) + 50$, sehingga

$$y' = \frac{\pi}{10} \left(-\csc \frac{\pi x}{10} \cot \frac{\pi x}{10} \right).$$

$$\text{Kelajuan saat } x = \frac{\pi}{6}.$$

$$v = y' = \frac{\pi}{10} \left(-\csc \frac{\pi^2}{60} \cot \frac{\pi^2}{60} \right) \approx 11,56.$$

Jadi laju perubahan kadar nutrisi pada saat $x = \frac{\pi}{6}$ adalah 11,56.

3. Sebuah pabrik sepatu merancang pemodelan matematika yang mewakili besarnya biaya dan pendapatan. Besarnya pendapatan dimodelkan dalam fungsi $R(Q) = -2Q^2 + 1000Q$, sedangkan besarnya biaya dimodelkan dalam fungsi $C(Q) = Q^3 - 59Q^2 + 1315Q + 2000$ dengan Q mewakili banyak barang yang diproduksi dalam ribuan dan C, R dalam juta rupiah.
- Apakah pabrik sepatu tersebut mengalami keuntungan atau kerugian?
 - Berapakah keuntungan atau kerugian maksimumnya?

Alternatif Penyelesaian:

Keuntungan atau kerugian pabrik:

$$K(Q) = R(Q) - C(Q).$$

$$= -2Q^2 + 1000Q - (Q^3 - 59Q^2 + 1315Q + 2000).$$

$$K(Q) = -Q^3 + 57Q^2 - 315Q - 2000.$$

$K''(Q) < 0$, maka mengalami keuntungan maksimum.

$K''(Q) > 0$, maka mengalami kerugian maksimal

$$K(Q) = -Q^3 + 57Q^2 - 315Q - 2000.$$

$$K'(Q) = -3Q^2 + 114Q - 315.$$

$$0 = (-3Q + 105)(Q - 3).$$

Diperoleh, $Q_1 = 3$ atau $Q_2 = 35$.

$$K''(Q) = -6Q + 114.$$

Pada saat $Q_1 = 3$.

$$K''(3) = -6(3) + 114 = 96.$$

Sehingga, pada saat $Q_1 = 3$, $K''(Q) > 0$ (kerugian maksimum).

Pada saat $Q_2 = 35$.

$$K''(35) = -6(35) + 114 = -96.$$

Sehingga, pada saat $Q_2 = 35$, $K''(Q) < 0$ (keuntungan maksimal).

Pabrik sepatu akan mengalami kerugian apabila barang yang terjual (Q) kurang dari 3 unit dan pabrik sepatu akan mengalami keuntungan apabila barang yang terjual (Q) lebih dari 35 unit.

Besar keuntungan maksimum adalah $Q = 35$ unit.

$$K(Q) = -Q^3 + 57Q^2 - 315Q - 2000.$$

$$K(35) = -(35)^3 + 57(35)^2 - 315(35) - 2000 = 13925.$$

Jadi, keuntungan maksimal yang diperoleh adalah 13925.

Besar kerugian maksimum adalah $Q = 3$ "unit".

$$K(Q) = -Q^3 + 57Q^2 - 315Q - 2000.$$

$$K(3) = -(3)^3 + 57(3)^2 - 315(3) - 2000 = 2459.$$

Jadi, kerugian maksimal yang diperoleh adalah 2459.

4. Sebuah anak panah ditembakkan secara vertikal ke udara dan jaraknya setelah t detik dalam keadaan melayang diberikan oleh: $s(t) = -16t^2 + 80t$.
- Berapakah kecepatan anak panah setelah 2 detik?
 - Berapa tinggi maksimum anak panah tersebut?
 - Berapa detik setelah anak panah itu ditembakkan akan tiba di tanah?
 - Berapa percepatan anak panah tersebut?

Alternatif Penyelesaian:

Fungsi ketika anak panah ditembakkan secara vertikal ke udara dan jaraknya setelah t detik dalam keadaan melayang $s(t) = -16t^2 + 80t$.

- a. Kecepatan setelah 2 detik.

$$V = \frac{ds}{dt} = s'(t) = -32t + 80.$$

$$V(t) = -32t + 80.$$

$$V(2) = -32(2) + 80.$$

$$= -64 + 80.$$

$$= 16 \text{ m/s}.$$

Jadi, kecepatan anak panah setelah 2 detik adalah 16 m/s.

- b. Tinggi maksimum anak panah $s'(t) = -32t + 80$.

$$s'(t) = 0.$$

$$-32t + 80 = 0.$$

$$t = -\frac{80}{-32}.$$

$$= 2,5.$$

Dengan menyubstitusikan $t = 2,5$ pada $s(t) = -16t^2 + 80t$, diperoleh

$$s(2,5) = -16(2,5)^2 + 80(2,5).$$

Jadi, tinggi maksimum anak panah itu adalah 100 m.

- c. Detik setelah anak panah ditembakkan akan tiba di tanah $s(t) = 0$.

$$-16t^2 + 80t = 0.$$

$$16t(-t+5) = 0.$$

Maka diperoleh $t_1 = 0$ atau $t_2 = 5$.

Jadi, waktu yang dibutuhkan anak panah untuk menyentuh tanah adalah 5 detik setelah anak panah ditembakkan.

- d. Percepatan anak panah $a = \frac{dV}{dt} = -32$, sehingga $a(t) = \frac{dV}{dt} = -32$.

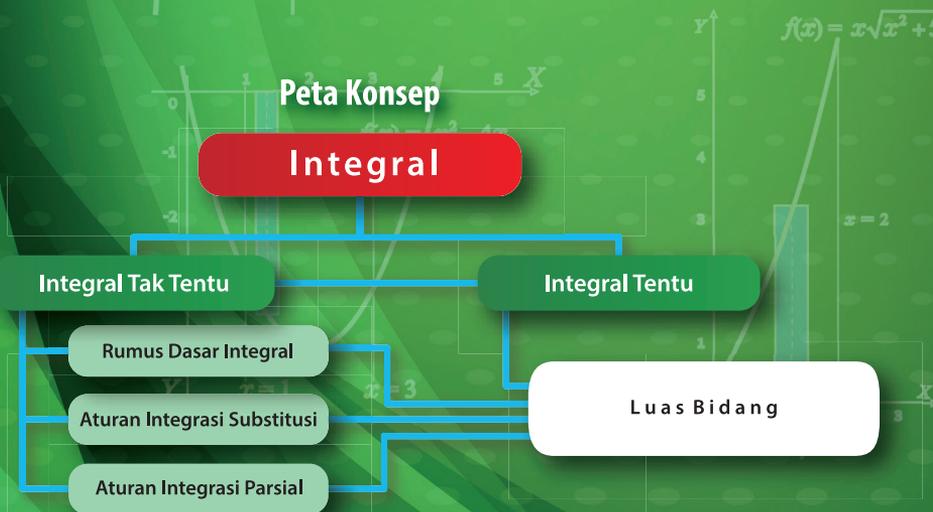
Jadi, percepatannya adalah -32 m/s^2 .

Bab 4 Integral

Pengalaman Belajar

Setelah mempelajari bab ini, peserta didik diharapkan dapat:

1. Mengidentifikasi konsep integral;
2. Menerapkan konsep integral melalui penyelesaian masalah.



Alternatif Skema Pembelajaran

Subbab	Waktu (JP)	Tujuan	Pokok Materi	Kosakata	Bentuk metode dan aktivitas	Sumber utama	Sumber lain (Daftar Pustaka)
Integral Tak Tentu	2JP	<ol style="list-style-type: none"> Menemukan konsep integral tak tentu Menerapkan konsep integral tak tentu melalui pemecahan masalah 	Integral Tak Tentu Sifat Integral Tak Tentu	Integral Tak Tentu	Eksplorasi, Diskusi, Pemaparan, Latihan Soal Terbimbing,	Buku Siswa	[1] [2] [3] [6] [15] [17] [18] [20] [21] [23] [24] [27] [29] [30] [32] [33] [34] [35] [39]
Integral Tentu	4JP	<ol style="list-style-type: none"> Menemukan konsep integral tentu melalui Menerapkan konsep integral tentu melalui pemecahan masalah 	Jumlahan Riemann Integral Tentu Sifat-sifat integral Teorema Dasar Kalkulus' Penerapan Integral	Jumlahan Riemann Integral Tentu Integral Tentu Teorema Dasar Kalkulus	dan Latihan Soal		

Catatan:

- Waktu (JP) adalah jumlah atau rentang jam yang disarankan untuk pelajaran. Guru dapat beradaptasi dengan kondisi pembelajaran yang sebenarnya.
- Untuk melakukan pemeriksaan ulang jawaban yang dituliskan oleh peserta didik, guru dapat menyarankan untuk menggunakan GeoGebra. GeoGebra memiliki versi daring yang dapat digunakan secara offline di laptop dan Android. GeoGebra dapat digunakan untuk perhitungan seperti kalkulator. Hal ini juga dapat digunakan untuk menghasilkan grafik.

Elemen kalkulus berikutnya yang akan dipelajari adalah integral. Materi ini bertujuan agar peserta didik dapat menerapkan konsep dasar kalkulus di dalam konteks pemecahan masalah aplikasi dalam berbagai bidang.

Pada bagian pertama, guru menjelaskan tentang integral tak tentu. Subbab ini mengulas tentang sifat-sifat integral tak tentu, aturan integrasi substitusi, dan aturan integrasi parsial. Pada subbab kedua, guru menjelaskan tentang integral tentu. Peserta didik akan mempelajari tentang jumlahan Riemann, integral tentu, sifat-sifat integral tentu, dan teorema dasar kalkulus. Untuk subbab terakhir, guru akan menjelaskan mengenai penerapan integral. Secara umum, bagian ini memberikan alternatif pedoman bagi guru untuk melakukan pembelajaran integral kepada peserta didik.

Panduan Pembelajaran

Sebelum memulai aktivitas pembelajaran, guru memandu peserta didik untuk berdoa menurut agama dan kepercayaan masing-masing. Hal ini bertujuan untuk menguatkan salah satu elemen Profil Pelajar Pancasila, yaitu beriman, bertakwa kepada Tuhan YME, dan berakhlak mulia. Setelah itu, guru dapat memberikan tes diagnostik kognitif dan non kognitif kepada peserta didik. Kedua bentuk tes ini dapat dilihat pada panduan pembelajaran pada Bab 2 materi limit dan Bab 3 materi turunan. Pada tes diagnostik non kognitif, guru dapat menggunakan alternatif pertanyaan yang ada pada kegiatan Ayo Mengingat Kembali yang pada materi Lingkaran di Bab 1 Geometri Analitik. Selanjutnya, guru dapat memberikan apersepsi kontekstual berupa berjalannya perusahaan selama masa pandemi. Perusahaan mencoba bertahan dengan melakukan beberapa strategi. Salah satu strateginya adalah melakukan penghematan biaya operasional perusahaan dalam jangka waktu yang lama, misalnya dengan pembelian alat produksi. Demi kelancaran hidup, perusahaan juga mengestimasi lama waktu yang diperlukan perusahaan agar mendapatkan pengembalian dari harga pembelian alat produksi tersebut.

Guru dapat menggunakan konteks lain yang dapat memberikan pengalaman (pengetahuan) awal tentang integral. Hal ini bertujuan untuk memotivasi peserta didik untuk mempelajari materi integral, sehingga peserta didik mulai menyadari bahwa belajar matematika erat kaitannya dengan lingkungan dan ilmu-ilmu lainnya, serta dapat membantu menyelesaikan berbagai masalah dalam kehidupan sehari-hari.

A. Integral Tak Tentu

Sebelum memulai aktivitas pembelajaran, guru diharapkan melakukan tes diagnostik non kognitif dan tes diagnostik kognitif. Pada tes diagnostik non kognitif, guru dapat menggunakan alternatif pertanyaan yang ada pada kegiatan Ayo Mengingat Kembali yang ada pada materi Lingkaran di Bab 1 Geometri Analitik. Tes diagnostik kognitif diberikan kepada peserta didik pada awal pembelajaran untuk mengetahui capaian kompetensi peserta didik, menyesuaikan pembelajaran di kelas dengan kompetensi rata-rata peserta didik, dan memberikan pembelajaran tambahan kepada peserta didik dengan kompetensi di bawah rata-rata. Tes diagnostik kognitif dapat dilakukan melalui tanya jawab mengenai turunan fungsi aljabar dan fungsi trigonometri. Setelah tes diagnostik kognitif selesai, peserta didik diminta mengingat kembali mengenai sifat-sifat turunan.



Ayo Mengingat Kembali

Sifat turunan

Jika c suatu bilangan tetap dan jika $f(x) = c$ untuk semua x , maka $f'(x) = 0$.
Jika n bilangan bulat positif dan $f(x) = x^n$, maka $f'(x) = nx^{(n-1)}$.



Ayo Bereksplorasi

Eksplorasi 4.1

Sebelum peserta didik melakukan eksplorasi terkait dengan definisi integral tak tentu, guru dapat membentuk kelompok yang terdiri dari 4-5 peserta didik. Kemudian Setelah itu, guru menanyakan kembali materi lampau yapada bab sebelumnya, yaitu sifat-sifat turunan. Selanjutnya, guru menyajikan masalah soal yang disajikan pada Tabel 4.1

Tabel 4.1 Tabel fungsi $F(x)$ dan $f(x)$

$F(x)$	$f(x)$
$F(x) = 2x^2 + 1$	$f(x) = 4x$
$F(x) = 2x^2 + 2$	$f(x) = 4x$
$F(x) = 2x^2 + 3$	$f(x) = 4x$
$F(x) = 2x^2 - 4$	$f(x) = 4x$

$F(x)$	$f(x)$
$F(x) = 2x^2 - 5$	$f(x) = 4x$
$F(x) = 2x^2 - 6$	$f(x) = 4x$

Kemudian Guru mengarahkan peserta didik untuk menjawab pertanyaan.

Jika, $F(x) = 2x^2 + C$ maka $f(x) = 4x$.

Guru dapat memberikan arahan agar mendapatkan jawaban sebagai berikut:

1. Pada kegiatan Eksplorasi 4.1 yang telah peserta didik lakukan memberikan turunan yang sama.
2. Jika $F(x) = C$, dengan C adalah anggota bilangan real maka turunan dari $F(x) = C$ adalah $f(x) = 0$.
3. Misalkan $f(x) = 2$ maka $F(x) = 2x + C$.



Miskonsepsi

Ada kemungkinan saat awal diskusi, peserta didik akan menjawab bahwa konstanta hanya bilangan bulat. Guru dapat mengarahkan dengan memberikan contoh sebuah fungsi dengan konstanta yang bukan bilangan bulat.

Setelah melakukan kegiatan eksplorasi, peserta didik diarahkan untuk menjawab pertanyaan Ayo Berpikir Kritis dan mendiskusikan dengan kelompok lain.



Ayo Berpikir Kritis

Bagaimana bentuk umum dari $F(x)$ apabila yang diketahui adalah $f(x)$ nya?

Bentuk umum dari $F(x)$ apabila $f(x)$ nya diketahui adalah $F(x) = ax + C$. Jika ada pendapat yang berbeda, guru dapat memberikan contoh sederhana dan menggambarkan grafiknya. Diharapkan peserta didik mendapat memberikan gambaran mengenai definisi integral tak tentu.

1. Definisi Integral Tak Tentu



Guru dapat meminta pendapat kepada peserta didik terkait dengan definisi integral tak tentu dari beberapa definisi yang telah dituliskan pada Buku Siswa. Guru dapat

mengarahkan pada kata kunci untuk definisi integral tak tentu yaitu turunan dan anti turunan. Kegiatan ini bertujuan agar peserta didik dapat mengkonstruksi pengetahuan terkait dengan definisi integral tak tentu dan penyimbolannya.

2. Sifat-Sifat Integral Tak Tentu

Integral tak tentu merupakan kebalikan dari turunan, maka peserta didik secara berkelompok menunjukkan sifat-sifat integral tak tentu pada kegiatan Ayo Berpikir Kreatif. Guru mengajak peserta didik untuk belajar berkolaborasi dan berpikir kritis.



Ayo Berpikir Kreatif

Cobalah kalian menunjukkan Sifat 4.2, Sifat 4.4 sampai Sifat 4.8! Kemudian presentasikan hasil tersebut.

Pembuktian:

Sifat 4.1 $\int dx = x + C.$

(Guru bersama peserta didik dapat menunjukkan sifat ini)

Sifat 4.2 Jika n bilangan rasional dan $n \neq 0$, maka $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C.$

Bukti:

$$\frac{d}{dx}(x^{n+1} + c) = (n+1)x^n.$$

Kalikan kedua ruas dengan $\frac{1}{n+1}$, sehingga

$$\frac{1}{n+1} \cdot \frac{d}{dx}(x^{n+1} + c) = \frac{1}{n+1}(n+1)x^n.$$

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} + c \right] = x^n,$$

$$\text{sehingga } \int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C.$$

Sifat 4.3 $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$, dengan a adalah sebuah konstanta.

(Guru bersama peserta didik dapat menunjukkan sifat ini).

Sifat 4.4 Jika f_1 dan f_2 didefinisikan pada interval yang sama, maka

$$\int [f_1(x) + f_2(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx.$$

Bukti:

$$\frac{d}{dx} \left[\int f(x)dx + \int g(x)dx \right] = \frac{d}{dx} \left[\int f(x)dx \right] + \frac{d}{dx} \left[\int g(x)dx \right] = f(x) + g(x).$$

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Sifat 4.5 Jika f_1 dan f_2 didefinisikan pada interval yang sama, maka

$$\int [f_1(x) - f_2(x)] dx = \int f_1(x) dx - \int f_2(x) dx.$$

Bukti:

$$\frac{d}{dx} \left[\int f(x) dx - \int g(x) dx \right] = \frac{d}{dx} \left[\int f(x) dx \right] - \frac{d}{dx} \left[\int g(x) dx \right] = f(x) - g(x).$$

$$\text{Diperoleh } \int (f(x) - g(x)) dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx.$$

Sifat 4.6 Aturan Integrasi Substitusi.

Jika g suatu fungsi yang dapat didiferensialkan, dan n sebuah bilangan rasional, maka

$$\int [g(x)]^n g'(x) dx = \frac{1}{n+1} [g(x)]^{n+1} + C; n \neq -1.$$

Bukti:

Misal: $u = g(x) \rightarrow du = g'(x) dx$, sehingga diperoleh,

$$\int [g(x)]^n g'(x) dx = \int u^n du = \frac{1}{n+1} u^{n+1} + C = \frac{1}{n+1} [g(x)]^{n+1} + C.$$

$$\text{Jadi, terbukti bahwa } \int [g(x)]^n g'(x) dx = \frac{1}{n+1} [g(x)]^{n+1} + C.$$

Sifat 4.7 Aturan Integrasi Parsial.

Jika u dan v fungsi-fungsi yang dapat didiferensialkan, maka

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Bukti:

$$\int \frac{d}{dx} [u(x) \cdot v(x)] = \int u(x) \cdot v'(x) dx + \int v(x) \cdot u'(x) dx.$$

$$u(x) \cdot v(x) = \int u(x) \cdot v'(x) dx + \int v(x) \cdot u'(x) dx.$$

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot u'(x) dx.$$

Karena $v'(x) dx = dv$ dan $u'(x) dx = du$, maka persamaan dapat ditulis

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Sifat 4.8 Aturan Integral Trigonometri

$$\int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + C.$$

Bukti:

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x.$$

$$\frac{d}{dx}(-\cos x) = -(-\sin x) = \sin x.$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \tan x.$$

Jika terdapat kesulitan yang dialami oleh peserta didik, guru dapat memberikan bimbingan atau memberi beberapa contoh yang sesuai dengan sifat-sifat integral tak tentu.



Ayo Mencoba

Aktivitas Ayo Mencoba, terdiri dari latihan soal terbimbing yang harus dilengkapi oleh peserta didik dengan bimbingan guru. Bentuk bimbingan yaitu dengan melakukan tanya jawab dan melengkapi pada bagian yang kosong pada latihan soal terbimbing.

Latihan Soal Terbimbing 4.1

Tentukan $\int(x^4 - x^3)dx$!

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan $f_1(x) = x^4$ dan $f_2(x) = x^3$.

$$\int(x^4 - x^3)dx = \int x^4 dx - \int x^3 dx. \quad (\text{Sifat 4.5}).$$

$$\int(x^4 - x^3)dx = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + C. \quad (\text{Sifat 4.2}).$$

Latihan Soal Terbimbing 4.2

Tentukan $\int(x^3 + \sqrt{x})dx$!

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan $f_1(x) = x^3$. dan $f_2(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.

$$\int(x^3 + \sqrt{x})dx = \int x^3 dx - \int x^{\frac{1}{2}} dx. \quad (\text{Sifat 4.4}).$$

$$\int(x^3 + \sqrt{x})dx = \left(\frac{1}{4}x^4 + C_1\right) - \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C_2\right).$$

$$\int(x^3 + \sqrt{x})dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C. \quad (\text{Sifat 4.2}).$$



Cek Dengan *Photomath*

Guru dapat memberikan saran kepada peserta didik untuk memeriksa jawaban yang telah peserta didik peroleh menggunakan *Photomath*. Hasil yang diperoleh untuk Latihan Soal Terbimbing 4.2 adalah $\frac{x^4}{4} + \frac{2x\sqrt{x}}{3} + C, C \in R$.

Untuk memahami Aturan Integrasi Substitusi, selanjutnya guru memberikan masalah soal seperti Latihan Soal Terbimbing 4.3 dan 4.4 untuk memahami Aturan Integrasi Substitusi. Alternatif penyelesaian hasil latihan soal terbimbing adalah sebagai berikut sudah disediakan untuk membantu guru.

Latihan Soal Terbimbing 4.3

Tentukan $\int \sqrt{3x+4} dx$!

Alternatif Penyelesaian:

$$\int (3x+4)^{\frac{1}{2}} dx = \int (3x+4)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{3} 3 dx \right) = \frac{1}{3} \int (3x+4)^{\frac{1}{2}} 3 dx.$$

$$\int (3x+4)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\frac{3}{2}} (3x+4)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{9} (3x+4)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Latihan Soal Terbimbing 4.4

Sebuah partikel bergerak pada suatu garis lurus. Jarak tempuh suatu partikel dinyatakan dalam s m dari pusat pada saat t detik, v cm/detik adalah kecepatan partikel saat t detik, maka $v = \cos 2\pi t$ dengan arah positif ke kanan dari titik pusat. Jika titik awal gerak partikel berada 5 cm di sebelah kanan titik pusat, tentukanlah posisi partikel saat $\frac{1}{3}$ detik kemudian!

Alternatif Penyelesaian:

Untuk menentukan posisi partikel saat $\frac{1}{3}$ detik dapat dilakukan dengan

$$v = \frac{ds}{dt} = \cos 2\pi t, \text{ sehingga } ds = \cos 2\pi t dt.$$

$$\int ds = \int \cos 2\pi t dt.$$

$$s = \frac{1}{2\pi} \int \cos 2\pi t (2\pi dt).$$

$$s = \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi t + C.$$

Untuk $t = 0$ maka $s = 5$, sehingga $5 = \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi(0) + C$.

$$C = 5.$$

Maka persamaannya menjadi $s = \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi t + 5$.

Posisi partikel saat $\frac{1}{3}$ detik adalah $s = \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi(\frac{1}{3}) + 5 = 5,14$.

Jadi posisi partikel saat $\frac{1}{3}$ detik kemudian adalah 5,14 cm di sebelah kanan.

Setelah itu, peserta didik diberikan soal seperti Latihan Soal Terbimbing 4.5 dan 4.6 untuk memahami Aturan Integrasi Parsial. Alternatif penyelesaian latihan soal terbimbing sudah disediakan untuk membantu guru.

Latihan Soal Terbimbing 4.5

Tentukan $\int x \sin x \, dx$!

Alternatif Penyelesaian:

$$\int x \sin x \, dx = x(-\cos x) - \int(-\cos x) \, dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

Latihan Soal Terbimbing 4.6

Tentukan $\int x\sqrt{1+x} \, dx$!

Alternatif Penyelesaian:

$$\int x\sqrt{1+x} \, dx = x\left(\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right) - \int \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} \, dx = \frac{2}{3}x(1+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(1+x)^{\frac{5}{2}} + C.$$



Ayo Mencoba

Dalam kegiatan ini, peserta didik diminta untuk memecahkan masalah pada Latihan 4.1. Guru mengajak peserta didik untuk mengerjakan latihan soal secara mandiri dan penuh kesungguhan. Alternatif penyelesaian telah disediakan untuk membantu guru.

Latihan Soal 4.1

1. Tentukan integral tak tentu berikut:

- | | |
|-------------------------------------|--|
| a. $\int 2x^7 \, dx.$ | b. $\int (\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}) \, dx.$ |
| c. $\int \frac{3}{\sqrt{x}} \, dx.$ | d. $\int (3x^5 - 2x^3) \, dx$ |

Alternatif Penyelesaian:

a. $\int 2x^7 \, dx = \frac{2}{8}x^8 = \frac{1}{4}x^8 + C.$

- b. $\int \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) dx = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C.$
- c. $\int \frac{3}{\sqrt{x}} dx = 6x^{\frac{1}{2}} + C.$
- d. $\int (3x^5 - 2x^3) dx = \frac{1}{2}x^6 - \frac{1}{2}x^4 + C.$

2. Tentukan integral tak tentu berikut dengan Aturan Integrasi Substitusi

- a. $\int \sqrt[3]{6-2x} dx.$
- b. $\int x(x^2 - 9)^2 dx.$
- c. $\int \frac{4 \sin x}{(1+\cos x)^2} dx.$
- d. $\int 2 \sin x \sqrt[3]{1+\cos x} dx.$
- e. $\int (3x^5 - 2x^3) dx.$

Alternatif Penyelesaian:

- a. $\int \sqrt[3]{6-2x} dx = -\frac{1}{2} \int (6-2x)^{\frac{1}{3}} (-2x) = -\frac{3}{4}(3-x) \sqrt[3]{6-2x} + C.$
- b. $\int x(x^2 - 9)^2 dx = \int \frac{(x^2-9)^2}{2} (2x dx) = \frac{(x^2-9)^3}{6} + C.$
- c. $\int \frac{4 \sin x}{(1+\cos x)^2} dx = \int -\frac{4}{(1+\cos x)^2} (-\sin x dx) = \frac{4}{(1+\cos x)} + C.$
- d. $\int 2 \sin x \sqrt[3]{1+\cos x} dx = \int -2 \sqrt[3]{1+\cos x} (-\sin x dx) = -\frac{3}{2}(1+\cos x) \sqrt[3]{1+\cos x} + C.$

3. Tentukan:

- a. $\int x(5x^2 - 3)^7 dx.$
- b. $\int x \cos x dx.$
- c. $\int x^2 \sqrt{1-x} dx.$
- d. $\int 6x^2 \sin^3 x dx.$

Alternatif Penyelesaian:

- a. $\int x(5x^2 - 3)^7 dx = \int \frac{1}{10}(5x^2 - 3)^7 (10x dx) = \frac{4(5x^2-3)^8}{5} + C.$
- b. $\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C.$
- c. $\int x^2 \sqrt{1-x} dx = -\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x} + \frac{4}{5}(1-x)^2 \sqrt{1-x} - \frac{2}{7}(1-x)^3 \sqrt{1-x} + C.$
- d. $\int 6x^2 \sin^3 x dx = (14-6x^2)\cos x + \left(3x^2 - \frac{2}{3}\right)\cos^3 x + 12x \sin x + 2x \sin^3 x + C.$

4. Volume air dalam bejana adalah V meter kubik jika ketinggian air adalah h meter. Jika kecepatan perubahan V terhadap h adalah $\pi(4h^2+12h+9)$, tentukan volume air jika tinggi bejana 3 meter!

Alternatif Penyelesaian:

Menentukan volume air jika tinggi bejana 3 meter jika dan kecepatan perubahan V terhadap h adalah $\pi(4h^2+12h+9)$, maka,

$$\frac{dV}{dh} = \pi(4h^2+12h+9).$$

$$dV = \pi(4h^2+12h+9)dh.$$

$$\int dV = \pi \int (4h^2+12h+9)dh.$$

$$V(h) = \pi\left[\frac{4}{3}h^3 + 6h^2 + 9h\right] + C.$$

Untuk menentukan nilai koefisien C , ambil sebarang nilai h . Misalkan saat $h = 0$, maka $V(h) = 0$, sehingga $C = 0$. Dengan menyubstitusikan $h = 3$, diperoleh bahwa

$$V(h) = \pi\left[\frac{4}{3}h^3 + 6h^2 + 9h\right] = \pi\left[\frac{4}{3}(3)^3 + 6(3)^2 + 9(3)\right] = 117\pi.$$

Jadi, volume air jika tinggi bejana 3 meter adalah 117π meter.

5. Dalam sepuluh hari pertama pada bulan Desember, sebuah sel suatu tanaman bertumbuh sedemikian rupa sehingga pada t hari sesudah tanggal 1 Desember volume sel itu bertambah dengan kecepatan $(12-t)^{-2}$ mikro meter kubik tiap hari. Jika pada tanggal 3 Desember volume sel itu adalah 3 mikro meter kubik, berapakah volume sel pada tanggal 8 Desember?

Alternatif Penyelesaian:

Menentukan banyak volume pada 8 Desember.

$$\frac{dV}{dt} = (12-t)^{-2}.$$

$$dV = \frac{1}{(12-t)^2} dt.$$

$$\int dV = \int \frac{1}{(12-t)^2} dt.$$

$$V = \frac{1}{12-t} + C. \text{ Karena pada 3 Desember volume sel itu adalah } 3 \mu m^3, \text{ maka}$$

$$V(2) = 3 \text{ dan } C = \frac{29}{10}. \quad V(0) = \frac{1}{12-t} + \frac{29}{10}.$$

Jadi, pada tanggal 8 Desember ($t = 7$) volume tanaman $V(7) = \frac{1}{12-7} + \frac{29}{10} = 3,1 \mu m^3$.

B. Integral Tentu

Sebelum menyampaikan materi tentang integral tentu, guru diharapkan melakukan tes diagnostik kognitif terlebih dahulu untuk mengetahui capaian kompetensi peserta didik sebelum memperoleh materi ini. Tes diagnostik kognitif dapat dilakukan dengan tanya jawab berkaitan dengan materi integral tak tentu dan luas persegi panjang. Guru dapat memberikan pertanyaan terkait integral tak tentu dan sigma.

1. Jumlahan Riemann

Guru mengajak peserta didik mengingat kembali tentang



Ayo Mengingat Kembali

Luas persegi panjang = $p \times l$.

$$\sum_{i=1}^5 A_i = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$$



Ayo Bereksplorasi

Eksplorasi 4.2

Sebelum membahas Eksplorasi 4.2, guru membagi peserta didik menjadi beberapa kelompok yang terdiri dari empat orang. Setiap kelompok akan mempresentasikan masalah yang ditemukan dalam Eksplorasi 4.2. Guru menginstruksikan peserta didik untuk membuat setengah lingkaran dari kertas yang berjari-jari 12 cm. Setelah itu, peserta didik membaginya menjadi persegi panjang dengan panjang yang sama, dan menempatkannya di kuadran Kartesian I. Setelah itu, peserta didik diminta untuk mengisi Tabel 4.2 dan menjawab pertanyaan.

Tabel 4.2. Alternatif Jawaban untuk Kegiatan Eksplorasi 4.2

Banyaknya Partisi/Potongan yang Digunakan		6	
persegi panjang ke-	1	panjang	2
		lebar	3,25
		luas	6,5

Banyaknya Partisi/Potongan yang Digunakan			6
persegi panjang ke-	2	panjang	2
		lebar	5,1
		luas	10,2
	3	panjang	2
		lebar	5,9
		luas	11,8
	4	panjang	2
		lebar	5,9
		luas	11,8
persegi panjang ke-	5	panjang	2
		lebar	5,1
		luas	10,2
	6	panjang	2
		lebar	3,25
		luas	6,5
Luas total			57

Pada kegiatan ini, setengah lingkaran dipartisi menjadi 6 bagian. Peserta didik dapat mempartisi lebih banyak lagi. Setiap kelompok mempartisi dengan jumlah yang berbeda-beda. Setelah itu guru memberikan ruang untuk berdiskusi mengenai hasil yang diperoleh peserta didik.



Ayo Berdiskusi

Diskusikan dengan teman/kelompok lain apakah hasil yang diperoleh sama?



Ayo Berpikir Kritis

Mengapa hasilnya berbeda?

Guru dapat menstimulus pemikiran peserta didik dengan pertanyaan pemantik seperti, “Mengapa jawaban yang diperoleh setiap kelompok berbeda?”. Guru mengajak peserta didik untuk berani menyampaikan pendapatnya. Di bagian akhir tanya jawab, guru menyampaikan bahwa hasil yang diperoleh dapat berbeda

dikarenakan banyaknya partisi yang digunakan pada setiap kelompok berbeda, yang mengakibatkan luas pada setiap persegi panjang berbeda. Pada hasil diskusi ini, guru dan peserta didik diharapkan memberikan kesimpulan bahwa Jumlahan Riemann berbentuk:

$$\sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i = f(\bar{x}_1) \Delta x_1 + f(\bar{x}_2) \Delta x_2 + \dots + f(\bar{x}_n) \Delta x_n,$$

dimana $f(\bar{x}_i) \Delta x_i = A_i$



Ayo Mencoba

Pada kegiatan Ayo Mencoba, guru dapat menggunakan kelompok yang sudah dibentuk pada kegiatan Eksplorasi 4.1. Guru dapat menggunakan beberapa contoh seperti Contoh Soal 4.4 untuk memahami Jumlahan Riemann. Selanjutnya, setiap kelompok diberikan soal seperti Latihan Soal Terbimbing 4.7 dan 4.8. Apabila jumlah kelompok yang dibentuk lebih dari 2 kelompok, guru dapat menambahkan bentuk masalah dengan mengadaptasi Latihan Soal Terbimbing 4.7 dan 4.8. Setelah selesai mendiskusikan masalah, perwakilan kelompok dapat mempresentasikan hasil diskusi.

Latihan Soal Terbimbing 4.7

Misalkan diketahui suatu fungsi $f(x) = x^2$ pada interval $[0,3]$. Tentukan jumlahan Riemann dengan cara mempartisi interval $[0,3]$ menjadi 6 sub interval sama panjang dan titik wakilnya menggunakan titik ujung kiri tiap sub interval!

Alternatif Penyelesaian:

Untuk menentukan Jumlahan Riemann fungsi $f(x) = x^2$ dengan 6 sub interval pada interval $[0, 3]$, maka dibuat grafik fungsi $f(x) = x^2$ pada interval $[0, 3]$, seperti pada Gambar 4.1.

Untuk

$$\bar{x}_1 = 0,5 \text{ maka } f(\bar{x}_1) = 0,25.$$

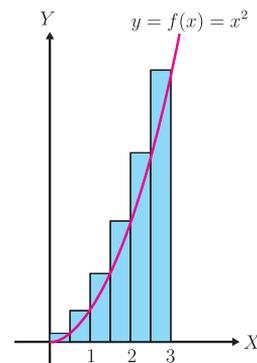
$$\bar{x}_2 = 1 \text{ maka } f(\bar{x}_2) = 1.$$

$$\bar{x}_3 = 1,5 \text{ maka } f(\bar{x}_3) = 2,25.$$

$$\bar{x}_4 = 2 \text{ maka } f(\bar{x}_4) = 4.$$

$$\bar{x}_5 = 2,5 \text{ maka } f(\bar{x}_5) = 6,25.$$

$$\bar{x}_6 = 3 \text{ maka } f(\bar{x}_6) = 9.$$

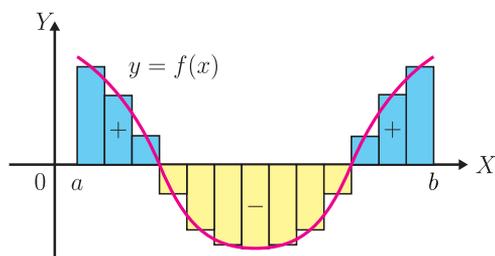


Gambar 4.1. Grafik Fungsi $f(x) = x^2$

Karena lebar sub interval sama, berarti $\Delta x = \frac{3-0}{6} = \frac{1}{2}$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, 6$.
 Jadi, Jumlahan Riemann dari $f(x) = x^2$ pada interval $[0, 3]$ dengan 6 sub interval adalah

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^6 f(\bar{x}_i) \Delta x_i &= f(\bar{x}_1)\Delta x_1 + f(\bar{x}_2)\Delta x_2 + \dots + f(\bar{x}_6)\Delta x_6 . \\ \sum_{i=1}^6 f(\bar{x}_i) \Delta x_i &= (f(\bar{x}_1) + f(\bar{x}_2) + f(\bar{x}_3) + f(\bar{x}_4) + f(\bar{x}_5) + f(\bar{x}_6))\Delta x . \\ &= (0,25 + 1 + 2,25 + 4 + 6,25 + 9)\left(\frac{1}{2}\right) = 11,375 . \end{aligned}$$

Sebelum masuk pada Latihan Soal Terbimbing 4.8 guru dapat memberikan ilustrasi seperti pada Gambar 4.2. Jika terdapat luasan di atas sumbu X (berwarna biru) dan di bawah sumbu X (berwarna kuning) maka jumlahan Riemann dapat ditentukan dengan luas persegi panjang biru dikurangi luas persegi panjang kuning.



Gambar 4.2. Grafik Fungsi $f(x) = y$

Latihan Soal Terbimbing 4.8

Misalkan diketahui suatu fungsi $f(x) = x^2 - 4x + 3$ pada interval $[0, 4]$ dengan grafik seperti Gambar 4.6. Tentukan Jumlahan Riemann!

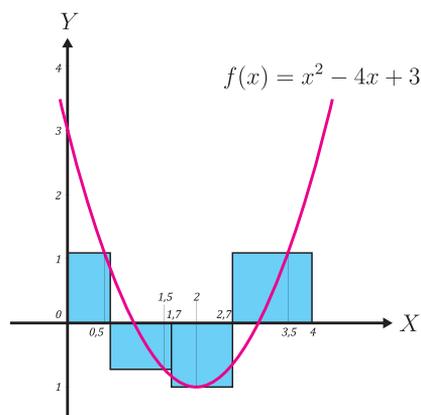
Alternatif Penyelesaian:

Untuk dapat menentukan jumlahan Riemann fungsi $f(x) = x^2 - 4x + 3$ pada interval $[0, 4]$ kita mempartisi menjadi 4 sub interval. Pada grafik sudah ditentukan untuk nilai \bar{x}_i . Dengan demikian diperoleh,

$$\begin{aligned} f(\bar{x}_1) &= 1,25, \\ f(\bar{x}_2) &= -0,75, \\ f(\bar{x}_3) &= -1, \text{ dan} \\ f(\bar{x}_4) &= 1,25. \end{aligned}$$

Karena lebar sub interval tidak sama, berarti Δx pada masing-masing partisi kita tulis $\Delta x_1 = 0,7$, $\Delta x_2 = 1$, $\Delta x_3 = 1$, dan $\Delta x_4 = 1,3$.

Jadi jumlahan Riemann dari $f(x) = x^2 - 4x + 3$ pada interval $[0, 4]$ adalah 4,25.



Gambar 4.3. Grafik Fungsi $f(x) = x^2 - 4x + 3$



Dalam kegiatan ini, peserta didik diminta untuk memecahkan masalah pada Latihan 4.2.

Latihan Soal 4.2

1. Diketahui suatu fungsi $f(x) = 2 + x$ pada interval $[0,2]$. Tentukan Jumlahan Riemann dengan menggunakan 4 sub interval sama panjang dan titik wakilnya menggunakan titik ujung kiri tiap sub interval!

Alternatif Penyelesaian:

Menentukan jumlahan Riemann dengan menggunakan 4 sub interval sehingga $\Delta x = 0,5$ dan titik ujung kiri pada setiap sub interval sebagai titik wakil pada fungsi $f(x) = 2+x$ dengan interval $[0,2]$ adalah sebagai berikut.

Dengan menyubstitusikan nilai

\bar{x}_i ke $f(\bar{x}_i) = 2 + \bar{x}_i$ diperoleh,

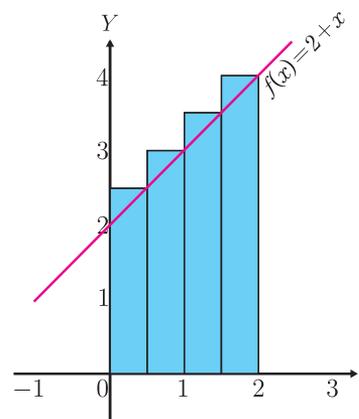
$$\bar{x}_1 = 0,5 \quad \text{maka } f(0,5) = 2,5.$$

$$\bar{x}_2 = 1 \quad \text{maka } f(1) = 3.$$

$$\bar{x}_3 = 1,5 \quad \text{maka } f(1,5) = 3,5.$$

$$\bar{x}_4 = 2 \quad \text{maka } f(2) = 4.$$

Jadi, jumlahan Riemann dari $f(x) = 2 + x$ pada interval $[0,2]$ adalah 6,5.



Gambar 4.4. Grafik Fungsi $f(x) = 2 + x$

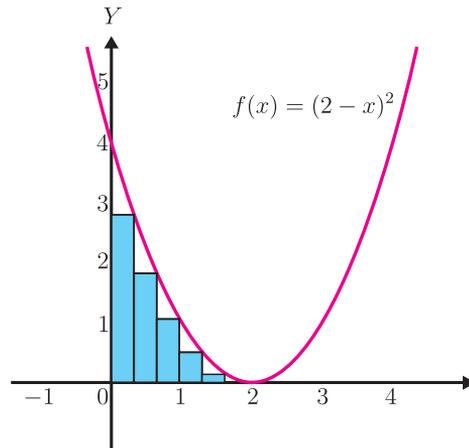
2. Diketahui suatu fungsi $f(x) = (2 - x)^2$ pada interval $[0,2]$. Tentukan Jumlahan Riemann dengan menggunakan 6 sub interval sama panjang dan titik wakilnya menggunakan titik ujung kiri tiap sub interval!

Alternatif Penyelesaian:

Menentukan jumlahan Riemann dengan menggunakan 6 sub interval sama panjang sehingga $\Delta x = \frac{1}{3}$ dan titik ujung kiri sub interval sebagai wakil setiap titiknya pada fungsi $f(x) = (2 - x)^2$ pada interval $[0,2]$ adalah dengan menyubstitusikan nilai \bar{x}_i ke $f(\bar{x}_i) = (2 - \bar{x}_i)^2$ sehingga diperoleh,

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \frac{1}{3} & \text{maka } f\left(\frac{1}{3}\right) &= \frac{25}{9}. \\ \bar{x}_2 &= \frac{2}{3} & \text{maka } f\left(\frac{2}{3}\right) &= \frac{16}{9}. \\ \bar{x}_3 &= 1 & \text{maka } f(1) &= 1. \\ \bar{x}_4 &= \frac{4}{3} & \text{maka } f\left(\frac{4}{3}\right) &= \frac{4}{3}. \\ \bar{x}_5 &= \frac{5}{3} & \text{maka } f\left(\frac{5}{3}\right) &= \frac{1}{9}. \\ \bar{x}_6 &= 2 & \text{maka } f(2) &= 0. \end{aligned}$$

Jadi, jumlahan Riemann dari $f(x) = (2-x)^2$ pada interval $[0,2]$ adalah $\frac{55}{27}$.



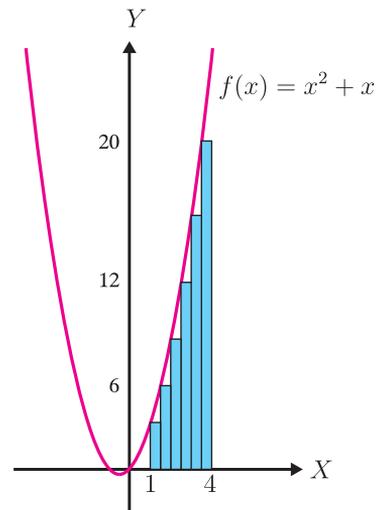
Gambar 4.5. Grafik Fungsi $f(x) = (2-x)^2$

3. Misalkan $f(x) = x^2 + x$ adalah fungsi pada interval $[1,4]$. Tentukan Jumlahan Riemann dengan menggunakan 6 sub interval sama panjang dan titik wakilnya menggunakan titik ujung kiri tiap sub interval!

Alternatif Penyelesaian:

Menentukan jumlahan Riemann dengan menggunakan 6 sub interval sama panjang sehingga $\Delta x = 0,5$ dan titik ujung kiri sub interval sebagai wakil setiap titiknya pada fungsi $f(x) = x^2 + x$ pada interval $[1,4]$ adalah dengan menyubstitusikan nilai \bar{x}_i ke $f(\bar{x}_i) = \bar{x}_i^2 + \bar{x}_i$ diperoleh,

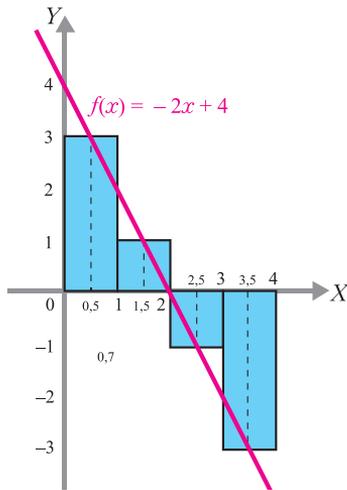
$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= 1,5 & \text{maka } f(1,5) &= \frac{15}{4}. \\ \bar{x}_2 &= 2 & \text{maka } f(2) &= 6. \\ \bar{x}_3 &= 2,5 & \text{maka } f(2,5) &= \frac{35}{4}. \\ \bar{x}_4 &= 3 & \text{maka } f(3) &= 12. \\ \bar{x}_5 &= 3,5 & \text{maka } f(3,5) &= \frac{63}{4}. \\ \bar{x}_6 &= 4 & \text{maka } f(4) &= 20. \end{aligned}$$



Gambar 4.6. Grafik Fungsi $f(x) = x^2 + x$.

Jadi, Jumlahan Riemann dari $f(x) = x^2 + x$ pada interval $[1,4]$ adalah $\frac{268}{8}$.

4. Tentukan jumlahan Riemann seperti pada Gambar 4.7



Gambar 4.7. Grafik Fungsi $f(x) = -2x+4$

Alternatif Penyelesaian:

Menentukan jumlahan Riemann pada fungsi $f(x) = -2x+4$ dengan interval $[0,4]$ adalah dengan menyubstitusikan nilai \bar{x}_i ke $f(\bar{x}_i) = -2\bar{x}_i+4$ diperoleh,

$$\bar{x}_1 = 0,5 \quad \text{maka } f(0,5) = 3.$$

$$\bar{x}_2 = 1,5 \quad \text{maka } f(1,5) = 1.$$

$$\bar{x}_3 = 2,5 \quad \text{maka } f(2,5) = -1.$$

$$\bar{x}_4 = 3,5 \quad \text{maka } f(3,5) = -3.$$

Jadi, jumlahan Riemann dari $f(x) = -2x+4$ pada interval $[0,4]$ adalah 8.

5. Misalkan $f(x) = \frac{1}{x}$ adalah fungsi pada interval $[1,3]$. Tentukan Jumlahan Riemann apabila $x_0 = -1$, $x_1 = 1\frac{2}{3}$, $x_2 = 2\frac{1}{4}$, $x_3 = 2\frac{2}{3}$, $x_4 = 3$,
 $\bar{x}_1 = 1\frac{1}{4}$, $\bar{x}_2 = 2$, $\bar{x}_3 = 2\frac{1}{2}$, dan $\bar{x}_4 = 2\frac{3}{4}$!

Alternatif Penyelesaian:

Menentukan jumlahan Riemann adalah sebagai berikut.:

Substitusikan nilai \bar{x}_i ke $f(\bar{x}_i) = \frac{1}{\bar{x}_i}$ maka diperoleh,

$$\bar{x}_1 = \frac{5}{4} \quad \text{maka } f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{4}{5}.$$

$$\bar{x}_2 = 2 \quad \text{maka } f(2) = \frac{1}{2}.$$

$$\bar{x}_3 = \frac{5}{2} \quad \text{maka } f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{2}{5}.$$

$$\bar{x}_4 = \frac{11}{4} \quad \text{maka } f\left(\frac{11}{4}\right) = \frac{4}{11}.$$

dan lebar setiap sub intervalnya adalah

$$\Delta x_1 = 1\frac{2}{3} - 1 = \frac{2}{3}.$$

$$\Delta x_2 = 2\frac{1}{4} - 1\frac{2}{3} = \frac{7}{12}.$$

$$\Delta x_3 = 2\frac{2}{3} - 2\frac{1}{4} = \frac{5}{12}.$$

$$\Delta x_4 = 3 - 2\frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Jadi, jumlahan Riemann dari $f(x) = \frac{1}{x}$ adalah $\frac{1469}{1320}$.

2. Integral Tentu

Guru meminta setiap kelompok yang telah dibentuk pada kegiatan Eksplorasi 4.2 untuk mempartisi menjadi lebih kecil lagi sehingga persegi panjang yang terbentuk akan semakin banyak. Peserta didik menghitung jumlah persegi panjang yang terbentuk dan menanyakan apakah hasilnya sama. Apakah semakin dekat dengan area sebenarnya? Hasil yang diperoleh akan berbeda dengan yang diperoleh pada Eksplorasi 4.2 karena jumlah partisi yang digunakan lebih banyak. Semakin banyak partisi yang digunakan, semakin dekat area sebenarnya. Guru mengatakan bahwa untuk mencari luas juga dapat dilakukan dengan integral.

Untuk memahami integral tentu, guru dapat menggunakan beberapa contoh seperti Contoh Soal 4.5. Selanjutnya, peserta didik diarahkan untuk mengerjakan Latihan Soal Terbimbing 4.9 dan 4.10 secara berkelompok. Guru mengajak peserta didik untuk berpartisipasi aktif dalam kelompok.

Latihan Soal Terbimbing 4.9

Diketahui fungsi $f(x) = x^2$, tentukan integral tentu dari $f(x)$ pada interval $[0,3]$ atau $\int_0^3 x^2 dx$!

Alternatif Penyelesaian:

Untuk menentukan integral tentu dari fungsi $f(x) = x^2$ pada interval $[0, 3]$, makahal pertama yang harus dilakukan adalah menentukan Jumlahan Riemann dari fungsi $f(x) = x^2$ dengan n sub interval pada interval tersebut. Oleh karena itu perlu ditentukan sebagai berikut.

a. Panjang masing-masing sub interval.

Interval yang diketahui adalah $[0,3]$ dan dipartisi menjadi bagian yang sama, maka $\frac{3-0}{n} = \frac{3}{n}$ untuk setiap $i = 1,2,3,\dots,n$.

b. Titik wakil pada masing-masing sub interval (\bar{x}_i)

Perhatikan batas paling kiri. Batas paling kiri pada latihan ini adalah 0 dan batas paling kanan adalah 3, maka

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= 0 + \Delta x_1 = 0 + 1 \cdot \frac{3}{n} = 1 \cdot \frac{3}{n}. \\ \bar{x}_2 &= 0 + \Delta x_2 = 0 + 2 \cdot \frac{3}{n} = 2 \cdot \frac{3}{n}. \\ \bar{x}_3 &= 0 + \Delta x_3 = 0 + 3 \cdot \frac{3}{n} = 3 \cdot \frac{3}{n}. \\ &\vdots \\ \bar{x}_n &= 0 + \Delta x_n = 0 + n \cdot \frac{3}{n} = n \cdot \frac{3}{n}.\end{aligned}$$

Setiap fungsi $f(x) = x^2$ pada interval $[0,3]$ dapat diwakilkan oleh $f(\bar{x}_i) = \left(i \cdot \frac{3}{n}\right)^2 = \frac{9i^2}{n^2}$

Dengan demikian jumlahan Riemann-nyanya adalah

$$\sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i = f(\bar{x}_1) \Delta x_1 + f(\bar{x}_2) \Delta x_2 + \dots + f(\bar{x}_n) \Delta x_n.$$

Karena sub interval pada interval $[0,4]$ sama, maka jumlahan Riemann pada fungsi $f(x) = x^2$ untuk interval $[0,4]$ adalah

$$\sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x.$$

Karena $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\bar{x}_i) \Delta x_i$ disebut integral tentu pada interval $[0,3]$ dan ditulis

$\int_0^a f(x) dx$, maka

$$\begin{aligned} \int_0^3 x^2 dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{9i^2}{n^2} \left(\frac{3}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{27i^2}{n^3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{27}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{27}{n^3} \left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(9 + \frac{27}{2n} + \frac{27}{6n^2}\right) = 9. \end{aligned}$$

Jadi, integral tentu dari $f(x) = x^2$ pada interval $[0,3]$ atau $\int_0^3 x^2 dx$ adalah

$$\int_0^3 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x = 9.$$

Latihan Soal Terbimbing 4.10

Diketahui fungsi $f(x) = x^2 - 4x + 3$, tentukan integral tentu dari $f(x)$ pada interval $[0, 4]$ atau $\int_0^4 (x^2 - 4x + 3) dx$!

Alternatif Penyelesaian:

Untuk menentukan integral tentu dari fungsi $f(x) = x^2 - 4x + 3$ pada interval $[0,4]$, hal pertama yang harus dilakukan adalah menentukan jumlahan Riemann dari fungsi $f(x) = x^2 - 4x + 3$ dengan n sub interval pada interval tersebut. Oleh karena itu Jumlahan Riemann adalah

a. Panjang masing-masing sub interval.

Interval yang diketahui adalah $[0,4]$ dan dipartisi menjadi bagian yang sama, maka $\frac{4-0}{n} = \frac{4}{n}$ untuk setiap $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

b. Titik wakil pada masing-masing sub interval (\bar{x}_i)

Perhatikan batas paling kanan. Batas paling kiri pada latihan ini adalah 0 dan batas paling kanan adalah 4, maka

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= 0 + \Delta x_1 = 0 + 1 \cdot \frac{4}{n} = 1 \cdot \frac{4}{n} \\ \bar{x}_2 &= 0 + \Delta x_2 = 0 + 2 \cdot \frac{4}{n} = 2 \cdot \frac{4}{n} \\ \bar{x}_3 &= 0 + \Delta x_3 = 0 + 3 \cdot \frac{4}{n} = 3 \cdot \frac{4}{n} \\ &\vdots \\ \bar{x}_n &= 0 + \Delta x_n = 0 + n \cdot \frac{4}{n} = n \cdot \frac{4}{n}.\end{aligned}$$

sehingga setiap fungsi dapat diwakilkan oleh $f(\bar{x}_i) = \left(i \cdot \frac{4}{n}\right) - 4i \cdot \frac{4}{n} + 3 = \frac{16i^2}{n^2} - \frac{16i}{n} + 3$
 Dengan demikian Jumlahan Riemann adalah

$$\sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i = f(\bar{x}_1) \Delta x_1 + f(\bar{x}_2) \Delta x_2 + f(\bar{x}_3) \Delta x_3 + \dots + f(\bar{x}_n) \Delta x_n.$$

Karena Δx sama, maka menjadi

$$\sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x.$$

Karena $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\bar{x}_i) \Delta x_i$ disebut integral tentu pada interval $[0,4]$ dan ditulis

$$\int_0^4 (x^2 - 4x + 3) dx, \text{ maka}$$

$$\begin{aligned}\int_0^4 (x^2 - 4x + 3) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{16i^2}{n^2} - \frac{16i}{n} + 3 \right) \left(\frac{4}{n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{64i^2}{n^3} - \frac{64i}{n^2} + \frac{12}{n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{64}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{64}{n^2} \sum_{i=1}^n i + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12}{n} \sum_{i=1}^n 1 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{64}{n^3} \left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \right) - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{64}{n^2} \left(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12}{n} (n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{64}{3} - \frac{32}{n} + \frac{64}{6n^2} \right) - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(32 + \frac{32}{n} \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} 12 \\ &= \frac{64}{3} + 0 + 0 - 32 + 12 = \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Jadi, integral tentu dari $f(x) = x^2 - 4x + 3$ pada interval $[0,4]$ atau $\int_0^4 (x^2 - 4x + 3) dx$ adalah $\int_0^4 (x^2 - 4x + 3) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x = \frac{4}{3}$.

Setelah selesai mengerjakan Latihan Soal Terbimbing 4.9 dan 4.10, guru mengarahkan peserta didik untuk berdiskusi pada kegiatan Ayo Berpikir Kreatif. Guru memberikan sebuah fungsi kemudian peserta didik menentukan integral menggunakan panjang sub interval yang tidak sama. Setelah selesai, hasil dapat didiskusikan bersama-sama.



Ayo Berpikir Kreatif

Bagaimana jika sub intervalnya tidak sama?

Guru dapat mengarahkan dengan memberikan contoh fungsi, interval, dan sub interval, baik yang sama ataupun interval yang tidak sama. Hasil yang diperoleh akan memberikan selisih yang cukup kecil apabila banyaknya partisi yang digunakan semakin banyak.



Ayo Mencoba

ada aktivitas Ayo Mencoba, guru dapat mengarahkan kepada peserta didik untuk memahami cara menentukan integral tentu dalam menyelesaikan soal yang ada pada Latihan Soal 4.3. Guru mengajak peserta didik untuk mengerjakan soal secara mandiri dan sungguh-sungguh. Alternatif penyelesaian sudah tersedia untuk membantu guru.

Latihan Soal 4.3

1. Diketahui fungsi $f(x) = 2+x$ pada interval $[0,2]$. Tentukan integral tentu dari $f(x) = 2+x$ pada interval $[0,2]$ atau $\int_0^2 (2+x) dx$!

Alternatif Penyelesaian:

Menentukan integral tentu $f(x) = 2+x$ pada interval $[0,2]$ adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \int_0^2 (2+x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(2 + \frac{2i}{n}\right) \left(\frac{2}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{4}{n} + \frac{4i}{n^2}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n \frac{4}{n} + \sum_{i=1}^n \frac{4i}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{n} \sum_{i=1}^n 1 + \frac{4}{n^2} \sum_{i=1}^n i \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{n}(n) + \frac{4}{n^2} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(4 + 2 + \frac{2}{n} \right) = 6. \end{aligned}$$

2. Diketahui fungsi $f(x) = (2-x)^2$ pada interval $[0,2]$. Tentukan integral tentu dari $f(x) = (2-x)^2$ pada interval $[0,2]$ atau $\int_0^2 (2-x)^2 dx$!

Alternatif Penyelesaian:

Menentukan integral tentu $f(x) = (2-x)^2 = 4-4x+x^2$ pada interval $[0,2]$ adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\int_0^2 (4-4x+x^2) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(4 - 4\left(\frac{2i}{n}\right) + \left(\frac{2i}{n}\right)^2 \right) \left(\frac{2}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{8}{n} - \frac{16i}{n^2} + \frac{8i^2}{n^3} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{n} \sum_{i=1}^n 1 - \frac{16}{n^2} \sum_{i=1}^n i + \frac{8}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{n}(n) - \frac{16}{n^2} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) + \frac{8}{n^3} \left(\frac{n(n+1)2(n+1)}{6} \right) \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{n} + \frac{8}{3} + \frac{4}{3n^2} \right) = \frac{8}{3}.
\end{aligned}$$

3. Diketahui fungsi $f(x) = x^2 + x$ pada interval $[1,4]$. Tentukan integral tentu dari $f(x) = x^2 + x$ pada interval $[1,4]$ atau $\int_1^4 (x^2 + x) dx$!

Alternatif Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
\int_1^4 (x^2 + x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{3i}{n}\right)^2 + \left(\frac{9i}{n}\right) + 2 \right) \left(\frac{3}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{27i^2}{n^3} + \frac{27i}{n^2} + \frac{6}{n} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{27}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 + \frac{27}{n^2} \sum_{i=1}^n i + \frac{6}{n} \sum_{i=1}^n 1 \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{27}{n^3} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) + \frac{27}{n^2} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) + \frac{6}{n}(n) \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{57n^2 + 54n + 9}{2n^2} \right) = \frac{57}{2}.
\end{aligned}$$

4. Diketahui fungsi $f(x) = x^2 - x + 4$ pada interval $[0,4]$. Tentukan integral tentu dari $f(x) = x^2 - x + 4$ pada interval $[0,4]$ atau $\int_0^4 (x^2 - x + 4) dx$!

Alternatif Penyelesaian:

Menentukan integral tentu $f(x) = x^2 - x + 4$ pada interval $[0,4]$ adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
\int_0^4 (x^2 - x + 4) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{4i}{n}\right)^2 - \left(\frac{4i}{n}\right) + 4 \right) \left(\frac{4}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{64i^2}{n^3} - \frac{16i}{n^2} + \frac{16}{n} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{64}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 - \frac{16}{n^2} \sum_{i=1}^n i + \frac{16}{n} \sum_{i=1}^n 1 \right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{64}{n^3} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) - \frac{16}{n^2} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) + \frac{16}{n} (n) \right). \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{88}{3} + \frac{24}{n} + \frac{64}{6n^2} \right) = \frac{88}{3}.
\end{aligned}$$

5. Diketahui fungsi $f(x) = x^2 + 4x + 5$ pada interval $[1, 4]$. Tentukan integral tentu dari $f(x) = x^2 + 4x + 5$ pada interval $[1, 4]$ atau $\int_1^4 (x^2 + 4x + 5) dx$!

Alternatif Penyelesaian:

Menentukan integral tentu $f(x) = x^2 + 4x + 5$ pada interval $[1, 4]$ adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
\int_1^4 (x^2 + 4x + 5) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x. \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(10 - \frac{18}{n}i + \frac{9}{n}i \right) \left(\frac{3}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{30}{n} + \frac{54}{n^2}i + \frac{27}{n^3}i^2 \right). \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{30}{n} \sum_{i=1}^n 1 - \frac{54}{n^2} \sum_{i=1}^n i + \frac{27}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 \right). \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{30}{n} (n) + \frac{54}{n^2} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) + \frac{27}{n^3} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) \right). \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(66 + \frac{27}{n} + \frac{27}{2n} + \frac{9}{2n^2} \right) = 66.
\end{aligned}$$

3. Sifat-Sifat Integral Tentu

Selain dengan jumlahan Riemann yang telah dipelajari, secara berkelompok peserta didik juga dapat menunjukkan sifat-sifat berikut.



Ayo Berpikir Kreatif

Cobalah kalian tunjukkan sifat 4.11 sampai sifat 4.14, kemudian presentasikan hasil tersebut.

Sifat 4.9 Jika fungsi f dapat diintegalkan pada interval tertutup $[a, b]$, maka $\int_a^a f(x) dx = 0$.

(guru dan peserta didik bersama-sama berdiskusi menunjukkan sifat ini).

Sifat 4.10 Jika fungsi f dapat diintegalkan pada interval tertutup $[a, b]$, maka $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$.

(guru dan peserta didik bersama-sama berdiskusi menunjukkan sifat ini).

Sifat 4.11 Jika fungsi f dapat diintegrasikan pada interval tertutup $[a, b]$, dan jika k sebarang konstanta, maka $\int_a^b [kf(x)] dx = k \int_a^b f(x) dx$.

Bukti:

Karena f dapat diintegrasikan pada $[a, b]$ dan $\lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$ ada, maka menurut sifat 4.3 diperoleh $\lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n kf(x_i) \Delta x_i = k \lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$.

Jadi, $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$.

Sifat 4.12 Jika fungsi f dan g dapat diintegrasikan pada $[a, b]$, maka $f + g$ dapat diintegrasikan pada $[a, b]$, sehingga

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

Bukti:

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(x) + g(x)] dx &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [f(\bar{x}_i) + g(\bar{x}_i)] \Delta x_i \\ &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \left[\sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i + \sum_{i=1}^n g(\bar{x}_i) \Delta x_i \right] \\ &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i + \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(\bar{x}_i) \Delta x_i \\ &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx. \end{aligned}$$

Sifat 4.13 Jika fungsi f dan g dapat diintegrasikan pada $[a, b]$, maka $f - g$ dapat diintegrasikan pada $[a, b]$ sehingga

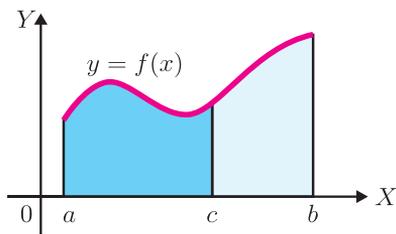
$$\int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx.$$

Bukti:

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(x) - g(x)] dx &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [f(\bar{x}_i) - g(\bar{x}_i)] \Delta x_i \\ &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [f(\bar{x}_i) + (-1)g(\bar{x}_i)] \Delta x_i \\ &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \left[\sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i + \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (-1)g(\bar{x}_i) \Delta x_i \right] \\ &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i + (-1) \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(\bar{x}_i) \Delta x_i \\ &= \int_a^b f(x) dx + (-1) \int_a^b g(x) dx \\ &= \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx. \end{aligned}$$

Sifat 4.14 Jika fungsi f dapat diintegrasikan pada interval tertutup yang memuat tiga buah bilangan a, b , dan c , tidak tergantung pada urutannya, maka $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Bukti:



Gambar 4.8. Grafik Fungsi $y = f(x)$

Perhatikan grafik seperti pada Gambar 4.8. Pada grafik $y = f(x)$ di Gambar 4.8, terdapat daerah di bawah $f(x)$ dengan luas dari a ke c ditambah dengan luas dari c ke b yang sama dengan luas total dari a ke b , sehingga dapat disimpulkan

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

4. Teorema Dasar Kalkulus

Guru menjelaskan Teorema Dasar Kalkulus I dan Teorema Dasar Kalkulus II kemudian meminta peserta didik mempelajari Teorema Dasar Kalkulus I dan Teorema Dasar Kalkulus II secara berkelompok.

Teorema Dasar Kalkulus I

Misalkan fungsi f kontinu pada selang tertutup $[a, b]$ dan misalkan x sembarang bilangan di dalam $[a, b]$. Jika fungsi F adalah fungsi yang didefinisikan oleh $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ maka $F'(x) = f(x)$.

Bukti:

Jika x dan $x+h$ berada pada interval $[a, b]$, maka

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt. \\ &= \left(\int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt \right) - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt. \end{aligned}$$

Untuk $h \neq 0$, maka $\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt \dots\dots\dots(1)$.

Jika diasumsikan untuk $h > 0$, f kontinu di $[x, x+h]$, pada sifat nilai ekstrim dikatakan bahwa u dan v di $[x, x+h]$ misalnya $f(u) = m$ dan $f(v) = M$, dimana m dan M memiliki nilai minimum dan maksimum pada f di $[x, x+h]$. Dengan memperhatikan Gambar 4.9, diperoleh bahwa $mh \leq \int_x^{x+h} f(t)dt \leq Mh$.

Dapat pula dinyatakan dengan $f(u)h \leq \int_x^{x+h} f(t)dt \leq f(v)h$.

Dengan membagi persamaannya dengan h , diperoleh bahwa

$$f(u) \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \leq f(v) \dots\dots\dots(2)$$

Substitusikanlah persamaan (1) ke persamaan (2), maka diperoleh

$$f(u) \leq \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \leq f(v) \dots\dots\dots(3)$$

Persamaan (3) dapat digunakan untuk menunjukkan $h < 0$ (dapat peserta didik coba sendiri).

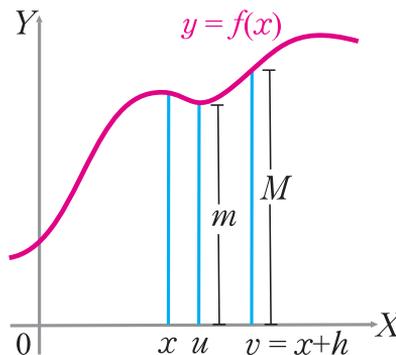
Untuk $h \rightarrow 0$. Maka $u \rightarrow x$ dan $v \rightarrow x$, dimana u dan v berada diantara x dan $x+h$, karena itu

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(u) = \lim_{u \rightarrow x} f(u) = f(x) \text{ dan}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(v) = \lim_{v \rightarrow x} f(v) = f(x).$$

Karena f kontinu di x dapat disimpulkan bahwa $F'(x) = f(x)$.

Guru dapat menggunakan beberapa contoh seperti Contoh Soal 4.6 untuk memahami Teorema Dasar Kalkulus I.



Gambar 4.9. Grafik Fungsi $y = f(x)$

Teorema Dasar Kalkulus II

Misalkan fungsi f kontinu pada selang tertutup $[a, b]$ dan misalkan F suatu fungsi sedemikian hingga $F'(x) = f(x)$.

Untuk semua x di dalam $[a, b]$, maka $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

Bukti:



Ayo Mengingat Kembali

Masih ingatkah kalian tentang fungsi kontinu pada materi Limit?

Jika f kontinu pada semua titik di dalam $[a, b]$, dengan melihat Teorema Dasar Kalkulus I dan Sifat 4.1 diperoleh $g(x) = \int_a^x f(t) dt + k$, dengan k suatu konstanta.

Dengan mengambil $x = b$ dan $x = a$ berturut-turut, maka diperoleh

$$g(b) = \int_a^b f(t) dt + k \dots\dots\dots(4) \text{ dan}$$

$$g(a) = \int_a^a f(t) dt + k \dots\dots\dots(5)$$

Dari (4) dan (5), diperoleh $g(b) - g(a) = \int_a^b f(t) dt + k - \int_a^a f(t) dt$.

Karena $\int_a^a f(t) dt = 0$, maka $\int_a^b f(t) dt = g(b) - g(a)$.

Guru dapat menggunakan beberapa contoh seperti Contoh Soal 4.7 untuk memahami Teorema Dasar Kalkulus II. Peserta didik diarahkan untuk menyelesaikan Ayo Berpikir Kreatif.



Ayo Berpikir Kreatif

Cobalah kalian menemukan cara lain untuk menyelesaikan Contoh Soal 4.6 dan 4.7!

Cara lain yang dapat digunakan peserta didik untuk menyelesaikan contoh soal 4.6 adalah dengan mengintegrasikan fungsinya terlebih dahulu kemudian hasil dari integralnya diturunkan terhadap x jika fungsi yang digunakan memiliki variabel x .

Cara lain yang dapat digunakan Contoh Soal 4.7 adalah dengan mengintegrasikan fungsinya bersama terlebih dahulu kemudian menyubstitusikan batas atas dan batas bawahnya. Selanjutnya, mengurangkan nilai substitusi batas atas dengan nilai substitusi dari batas bawah.



Ayo Mencoba

Pada kegiatan Ayo Mencoba, guru dapat menggunakan beberapa contoh seperti Contoh Soal 4.6, 4.7, dan 4.8 untuk memahami Teorema Dasar Kalkulus I dan II. Guru membagi peserta didik menjadi beberapa kelompok. Selanjutnya, setiap kelompok diberikan soal seperti Latihan Soal Terbimbing 4.11 dan 4.12. Apabila jumlah kelompok yang dibentuk lebih dari 2 kelompok, guru dapat menambahkan bentuk soal dengan mengadaptasi latihan soal terbimbing. Setelah selesai mendiskusikan masalah, perwakilan dari kelompok dapat mempresentasikan hasil diskusi.

Latihan Soal Terbimbing 4.11

Tentukan $\frac{d}{dx} \left[\int_0^x (4+t^6) dt \right]$!

Alternatif Penyelesaian:

Dengan notasi dari pernyataan Teorema Dasar Kalkulus I yaitu $F(x) = \int_a^b f(t) dt$ diperoleh $F(x) = \int_0^x (4+t^6) dt$, sehingga $f(t) = 4+t^6$ dan $a = 0$, $b = x$.

Selain itu dari Teorema Dasar Kalkulus I menyatakan bahwa $F'(x) = f(x)$, jika $f(t) = 4+t^6$ maka $f(x) = (4+x^6)$.

Jadi, $\frac{d}{dx} \int_0^x [(4+t^6) dt] = 4+x^6$.

Latihan Soal Terbimbing 4.12

Tentukan panjang lintasan yang ditempuh oleh sebuah objek yang bergerak dengan kecepatan $v(t) = (5-t)$ cm/detik dari $t = 0$ detik sampai $t = 5$ detik!

Alternatif Penyelesaian:

Panjang lintasan yang ditempuh oleh sebuah objek yang bergerak dengan kecepatan $v(t) = (5-t)$ cm/detik dari $t = 0$ detik sampai $t = 5$ detik $s = \int_0^5 v(t) dt$ adalah sebagai berikut.

$$v(t) = \int_0^5 (5-t) dt = \left(5t - \frac{1}{2}t^2\right) \Big|_0^5 = 25 - \frac{25}{2} = \frac{25}{2}.$$

Jadi panjang lintasannya adalah $\frac{25}{2}$.cm.



Ayo Mencoba

Pada kegiatan Ayo Mencoba, guru dapat menggunakan beberapa contoh seperti Contoh Soal 4.9 untuk memahami sifat integral dan teorema dasar kalkulus. Guru membagi peserta didik ke dalam beberapa kelompok. Selanjutnya, setiap kelompok diberikan masalah seperti Latihan Soal Terbimbing 4.13 dan 4.14. Apabila jumlah kelompok yang dibentuk lebih dari 2 kelompok, guru dapat menambahkan bentuk masalah dengan mengadaptasi latihan soal terbimbing. Setelah selesai mendiskusikan masalah, perwakilan kelompok dapat mempresentasikan hasil diskusi.

Latihan Soal Terbimbing 4.13

Tentukan $\int_0^3 (3-2x+x^2) dx$!

Alternatif Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \int_0^3 (3-2x+x^2) dx &= \int_0^3 3 dx - \int_0^3 2x dx + \int_0^3 x^2 dx. \\ &= 3 \int_0^3 dx - 2 \int_0^3 x dx + \int_0^3 x^2 dx. \\ &= 3(x)_0^3 - 2\left(\frac{1}{2}x^2\right)_0^3 + \left(\frac{1}{3}x^3\right)_0^3. \\ &= 3(3-0) - (9-0) + (9-0) = 9. \end{aligned}$$

Latihan Soal Terbimbing 4.14

Tentukan $\int_0^2 x^2(x^3 + 1)dx$!

Alternatif Penyelesaian:

Jika g suatu fungsi yang terdiferensiabel, dan n sebuah bilangan rasional, maka $\int [g(x)]^n g'(x)dx = \frac{1}{n+1} [g(x)]^{n+1} + C$; $n \neq -1$, dengan manipulasi aljabar diperoleh:

$$g(x) = x^3 + 1.$$

$$g'(x) = 3x^2 dx.$$

$$\frac{1}{3} g'(x) = x^2 dx.$$

Sehingga soal dapat ditulis kembali menjadi,

$$\begin{aligned} \int_0^2 x^2(x^3 + 1)dx &= \int_0^2 g(x) \left(\frac{1}{3}\right) g'(x) dx. \\ &= \int_0^2 (x^3 + 1) \left(\frac{1}{3}\right) 3x^2 dx. \\ &= \frac{1}{3} \int_0^2 ((x^3 + 1))(3x^2 dx). \\ &= \frac{1}{6} ((x^3 + 1)^2)_0^2 = \frac{1}{6} [(81) - 1] = \frac{40}{3}. \end{aligned}$$

Peserta didik diarahkan untuk menyelesaikan kegiatan Ayo Berpikir Kreatif agar peserta didik dapat mengembangkan diri dengan memberikan jawaban dengan cara yang berbeda.



Ayo Berpikir Kreatif

Dapatkan kalian menyelesaikan Latihan Soal Terbimbing 4.13 dan 4.14 dengan model jawaban yang lain?

Cara lain:

Latihan Soal Terbimbing 4.13

Tentukan $\int_0^3 (3 - 2x + x^2) dx$!

Alternatif Penyelesaian:

$$\int_0^3 (3 - 2x + x^2) dx = \left[3x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 \right]_0^3 = 9.$$

Latihan Soal Terbimbing 4.14

Tentukan $\int_0^2 x^2(x^3 + 1)dx$!

Alternatif Penyelesaian:

$$\int_0^2 x^2(x^3 + 1)dx = \int_0^2 (x^5 + x^2)dx = \left[\frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{3}x^3 \right]_0^2 = \frac{40}{3}.$$

Setelah melakukan Ayo Berpikir Kreatif, peserta didik diarahkan kembali untuk menyelesaikan Latihan Soal Terbimbing 4.13 dan 4.14.



Ayo Mencoba

Guru menjelaskan tentang kemungkinan luas daerah yang dibatasi oleh kurva dalam integral, yaitu:

1. Luas daerah yang berada di atas sumbu X

$$L = \int_a^b f(x) dx.$$

2. Luas daerah yang terletak di bawah sumbu X

$$L = - \int_a^b f(x) dx.$$

Nilai dari integralnya adalah negatif, karena luas merupakan bilangan positif maka dikalikan dengan negatif, sehingga

$$L = \int_a^b f(x) dx.$$

3. Luas antara dua kurva

$$L = \int_a^b f(x) dx = \int_a^p f(x) dx = \int_p^b f(x) dx.$$

Setelah menjelaskan, guru dapat menggunakan beberapa contoh seperti Contoh Soal 4.10 untuk memahami sifat integral khususnya Sifat 4.14. Selanjutnya, setiap kelompok diberikan masalah seperti Latihan Soal Terbimbing 4.15 dan 4.16. Apabila jumlah kelompok yang dibentuk lebih dari 2 kelompok, guru dapat menambahkan bentuk masalah dengan mengadaptasi latihan soal terbimbing. Setelah selesai mendiskusikan masalah, perwakilan kelompok dapat mempresentasikan hasil diskusi.

Latihan Soal Terbimbing 4.15

Hitunglah luas bidang datar yang dibatasi oleh grafik $y = 2x - x^3$ dan sumbu X !

Alternatif Penyelesaian:

Peserta didik menggambar grafik $y = 2x - x^3$ pada koordinat kartesius. Selanjutnya, mereka mencari titik potong sumbu X dengan menyubstitusikan $y = 0$

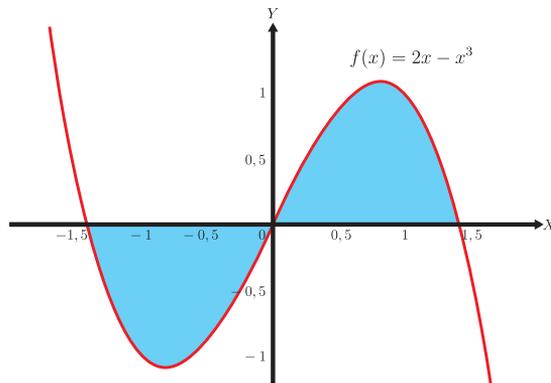
$$y = 2x - x^3.$$

$$0 = 2x - x^3.$$

$$x = 0 \text{ atau } x = -\sqrt{2} \text{ atau } x = \sqrt{2}.$$

Pada grafik diperoleh dua daerah yaitu $[\sqrt{2}, 0]$ di atas sumbu X dan $[-\sqrt{2}, 0]$ di bawah sumbu X , sehingga

$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (2x - x^3) dx &= \int_{-\sqrt{2}}^0 (2x - x^3) dx + \int_0^{\sqrt{2}} (2x - x^3) dx. \\ &= \left(-\left[x^2 - \frac{x^4}{4} \right]_{-\sqrt{2}}^0 \right) + \left(-\left[x^2 - \frac{x^4}{4} \right]_0^{\sqrt{2}} \right) = 2. \end{aligned}$$



Gambar 4.10. Grafik Fungsi $f(x) = 2x - x^3$.

Latihan Soal Terbimbing 4.16

Hitunglah luas bidang datar yang dibatasi oleh grafik $y = x^3 - 9x$ dan sumbu X !

Alternatif Penyelesaian:

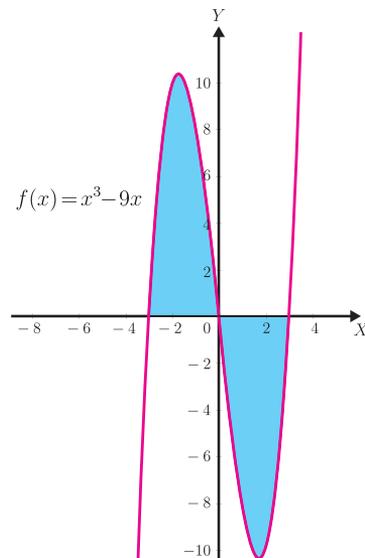
Peserta didik menggambar grafik $x^3 - 9x$ pada koordinat kartesius. Selanjutnya, mencari titik potong sumbu X dengan menyubstitusikan $y = 0$, sehingga

$$y = x^3 - 9x.$$

$$0 = x^3 - 9x.$$

$$x = 0 \text{ atau } x = -3 \text{ atau } x = 3.$$

Grafik yang dapat dilihat pada Gambar 11, maka terdapat dua daerah yaitu $[-3, 0]$ di atas sumbu X dan $[0, 3]$ di bawah sumbu X .



Gambar 4.11. Grafik Fungsi $f(x) = x^3 - 9x$.

$$\begin{aligned}
\int_{-3}^3 (x^3 - 9x) dx &= \int_{-3}^0 (x^3 - 9x) dx + \int_0^3 (x^3 - 9x) dx \\
&= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{9}{2}x^2 \right]_{-3}^0 - \left[\frac{x^4}{4} - \frac{9}{2}x^2 \right]_0^3 \\
&= \left[(0-0) - \left(\frac{81}{4} - \frac{81}{2} \right) \right] - \left[\left(\frac{81}{4} - \frac{81}{2} \right) - \left(\frac{81}{4} - \frac{81}{2} \right) \right] \\
&= \left[0 - \left(-\frac{81}{4} \right) \right] - \left[\left(-\frac{81}{4} \right) - 0 \right] = \frac{81}{4} + \frac{81}{4} = \frac{162}{4}.
\end{aligned}$$



Ayo Mencoba

Dalam kegiatan Ayo Mencoba, guru dapat meminta peserta didik untuk menggunakan sifat integral dari pelajaran untuk menyelesaikan masalah pada Latihan 4.4.

Latihan Soal 4.4

1. Tentukan $\frac{d}{dx} \left[\int_x^2 (t^2 + t^{\frac{2}{3}}) dt \right]!$

Alternatif Penyelesaian:

$$\frac{d}{dx} \left[\int_x^2 (t^2 + t^{\frac{2}{3}}) dt \right] = \frac{d}{dx} \left[- \int_2^x (t^2 + t^{\frac{2}{3}}) dt \right] = - (x^2 + x^{\frac{2}{3}}).$$

2. Tentukan $\frac{d}{dx} \left[\int_1^{x^2} (3t-1) dt \right]!$

Alternatif Penyelesaian:

$$\frac{d}{dx} \left[\int_1^{x^2} (3t-1) dt \right] = 6x^3 - 2x.$$

3. Tentukan $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3 \sin^3 x dx!$

Alternatif Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3 \sin^3 x dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 3 \sin^2 x \cdot \sin x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 \sin^2 x \cdot \sin x dx \\
&= -(\cos^3 x - 3 \cos x) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0 + (\cos^3 x - 3 \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= -(1-3) + (1-3) = 0.
\end{aligned}$$

4. Tentukan $\int_3^6 xy \, dx$ dengan $x = 6 \cos \theta$ dan $y = 2 \sin \theta$!

Alternatif Penyelesaian:

Untuk x, y dan dx dinyatakan dalam θ dan $d\theta$, maka batas-batas integrasinya menjadi $dx = -6 \sin \theta \, d\theta$ bila $x = 6 \cos \theta = 6$ maka $\theta = 0$ dan bila $y = 6 \cos \theta = 3$ maka $\theta = \frac{\pi}{3}$.

$$\begin{aligned} \int_3^6 xy \, dx &= \int_{\frac{\pi}{3}}^0 (6 \cos \theta)(2 \sin \theta)(-6 \sin \theta \, d\theta) = -72 \int_{\frac{\pi}{3}}^0 \sin^2 \theta \cos \theta \, d\theta. \\ &= -24(\sin^3 \theta)_{\frac{\pi}{3}}^0 = 9\sqrt{3}. \end{aligned}$$

5. Jika $\int_0^9 f(x) \, dx = 37$ dan $\int_0^9 g(x) \, dx = 16$. Tentukan $\int_0^9 [2f(x) + 3g(x)] \, dx$!

Alternatif Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \int_0^9 [2f(x) + 3g(x)] \, dx &= \int_0^9 2f(x) \, dx + 3 \int_0^9 g(x) \, dx. \\ &= 2 \int_0^9 f(x) \, dx + 3 \int_0^9 g(x) \, dx = 2(37) + 3(16) = 122. \end{aligned}$$

6. Sebuah partikel bergerak sepanjang garis sehingga kecepatannya pada waktu t adalah $v(t) = t^2 - t - 6$ (diukur dalam meter per detik). Tentukanlah
- perpindahan partikel dalam periode waktu $1 \leq t \leq 4$!
 - jarak yang ditempuh selama periode itu!

Alternatif Penyelesaian:

- a. Perpindahan partikel selama periode waktu $1 \leq t \leq 4$.

$$g(x) = \int_a^x (t^2 - t - 6) \, dt = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x.$$

$$\text{Untuk } x = b = 4, \text{ maka } g(b) = g(4) = \frac{-64}{6}.$$

$$\text{Untuk } x = a = 1, \text{ maka } g(a) = g(1) = \frac{-37}{6}.$$

$$\int_1^4 (t^2 - t - 6) \, dt = g(4) - g(1) = -\frac{9}{2}.$$

Jadi perpindahan partikel selama periode waktu $1 \leq t \leq 4$ adalah 4,5 meter ke arah kiri.

- b. Jarak yang ditempuh selama periode waktu tersebut.

Terdapat dua daerah yang terbentuk yaitu di bawah sumbu X untuk $[1,3]$ dan di atas sumbu X untuk $[3,4]$, maka $v(t) = t^2 - t - 6$.

$$\int_1^4 (t^2 - t - 6) dt = \left(-\int_1^3 (t^2 - t - 6) dt \right) + \int_3^4 (t^2 - t - 6) dt.$$

$$= -\left(g(3) - g(1) \right) + \left(g(4) - g(3) \right) = \frac{61}{6}.$$

Jadi jarak yang ditempuh sepanjang 10,17 meter.

7. Wayan dan Satwika masing-masing mengendarai sepeda motor dan bergerak dengan kecepatan masing-masing. Wayan bergerak dengan kecepatan $v_A = t + \frac{1}{t+1}$ dan Satwika bergerak dengan kecepatan $v_B = t + \frac{1}{(t+1)^2}$. Apakah Satwika dapat menyusul Wayan? Jelaskan alasannya!

Alternatif Penyelesaian:

Jarak yang ditempuh sampai dengan b jam dinyatakan dengan $s = \int_0^b v dt$ sehingga $s_{\text{wayan}} = \int_0^b v_A dt = \int_0^b \left(t + \frac{1}{t+1} \right) dt$ dan $s_{\text{satwika}} = \int_0^b v_B dt = \int_0^b \left(t + \frac{1}{(t+1)^2} \right) dt$.

Dengan demikian maka cukup ditunjukkan $s_{\text{satwika}} \leq s_{\text{wayan}}$ untuk setiap $b > 0$.

Karena $v_B \leq v_A$, maka $v_B - v_A \leq 0$.

$$\left(t + \frac{1}{t+1} \right) - \left(t + \frac{1}{(t+1)^2} \right) = \frac{-t}{(t+1)^2}.$$

Karena $t > 0$, maka $\frac{-t}{(t+1)^2} < 0$. Jadi $v_B \leq v_A$ yang berarti Satwika tidak akan pernah menyusul Wayan.

C. Penerapan Integral

Sebelum menyampaikan materi tentang penerapan integral, guru diharapkan melakukan tes diagnostik kognitif terlebih dahulu untuk mengetahui capaian kompetensi peserta didik sebelum memperoleh materi ini. Tes diagnostik kognitif dapat dilakukan dengan mengajukan pertanyaan tentang sifat-sifat integral tak tentu dan integral tertentu.

Guru membentuk kelompok yang terdiri dari 4-5 orang. Guru mengajak peserta didik untuk bekerja sama dan berani menyampaikan pendapatnya. Selanjutnya, guru mengingatkan kembali tentang kemungkinan luas daerah yang dibatasi oleh kurva pada integral dan menyampaikan kepada peserta didik contoh penerapan integral pada berbagai bidang seperti Contoh Soal 4.11 sampai 4.13 dan peserta didik diarahkan untuk menyelesaikan Latihan Soal Terbimbing 4.17-4.20. Setelah itu, setiap kelompok diminta untuk memberikan contoh dan penyelesaiannya mengenai penerapan integral lainnya.

1. Luas Bidang datar

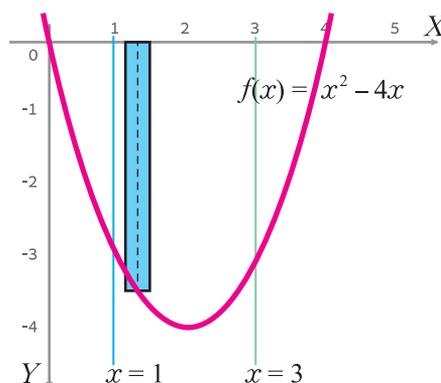
Tentukan luas daerah di kuadran pertama yang dibatasi $f(x) = x^2 - 4x$, garis $x = 1$ dan garis $x = 3$!

Alternatif Penyelesaian:

Jika kita perhatikan, maka terdapat interval tertutup yaitu $[1,3]$. Lebar persegi ke- i yang terbentuk adalah Δx_i dan tingginya adalah $x_i^2 - 4x_i$. Jumlah ukuran luas dari n buah persegi panjang adalah $(x_i^2 - 4x_i)\Delta x_i$. Misalkan A adalah luas daerah itu, maka

$$\begin{aligned} A &= \lim_{|\Delta x| \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 4x_i)\Delta x_i \\ &= -\int_1^3 (x^2 - 4x)dx \\ &= -\left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2\right)\Big|_1^3 = \frac{22}{3} \end{aligned}$$

Jadi luas daerahnya $\frac{22}{3}$ satuan luas.



Gambar 4.12. Grafik Fungsi $f(x) = x^2 - 4x$, $x = 1$ dan garis $x = 3$.

Tentukan luas daerah di kuadran pertama yang dibatasi $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$, garis $x = -2$ dan garis $x = 3$!

Alternatif Penyelesaian:

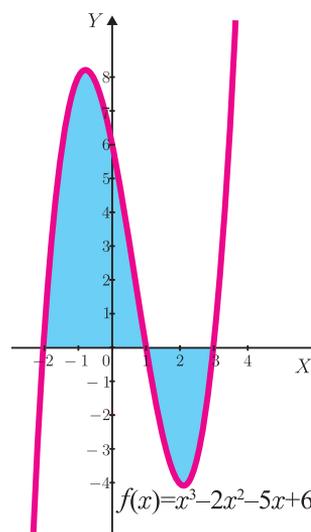
Jika kita perhatikan Gambar 4.13, maka terdapat interval tertutup yaitu $[-2,1]$ di atas sumbu X dan $[1,3]$ di bawah sumbu X . Lebar persegi ke- i yang terbentuk adalah Δx_i dan tingginya adalah $x_i^3 - 2x_i^2 - 5x_i + 6$. Jumlah ukuran luas dari n buah persegi panjang adalah $(x_i^3 - 2x_i^2 - 5x_i + 6)\Delta x_i$. Karena terdapat dua daerah yaitu di atas sumbu X dan di bawah sumbu X , maka

$$A_1 = \lim_{|\Delta x| \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (x_i^3 - 2x_i^2 - 5x_i + 6)\Delta x_i = \int_{-2}^1 f(x)dx,$$

sehingga $A_1 = \int_{-2}^1 (x_i^3 - 2x_i^2 - 5x_i + 6)dx$, dan

$$A_2 = \lim_{|\Delta x| \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (x_i^3 - 2x_i^2 - 5x_i + 6)\Delta x_i = \int_1^3 f(x)dx.$$

$$A_2 = \int_1^3 (x_i^3 - 2x_i^2 - 5x_i + 6)dx, \text{ maka,}$$



Gambar 4.13. Grafik Fungsi $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

$$\begin{aligned}
 A &= A_1 + A_2 = \int_{-2}^1 (x_i^3 - 2x_i^2 - 5x_i + 6) dx + \int_1^3 (x_i^3 - 2x_i^2 - 5x_i + 6) dx. \\
 &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x \right]_{-2}^1 + \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x \right]_1^3 = \frac{65}{3}.
 \end{aligned}$$

Jadi, luas daerahnya $\frac{65}{3}$ satuan luas.

2. Dalam Bidang Ekonomi dan Bisnis

Latihan Soal Terbimbing 4.19

Seorang pemimpin perusahaan memperhitungkan bahwa pembelian seperangkat peralatan akan menghasilkan suatu penghematan operasi pada perusahaan. Kecepatan penghematan ongkos operasi adalah $f(x)$ (dalam rupiah) setiap tahun, bila peralatan itu telah dipakai selama x tahun adalah

$$f(x) = 4000x + 1000; 0 \leq x \leq 10.$$

- Berapa jumlah penghematan ongkos operasi dalam 5 tahun pertama?
- Jika harga pembelian sama dengan Rp 36.000,00, dalam berapa tahun harga peralatan itu kembali?

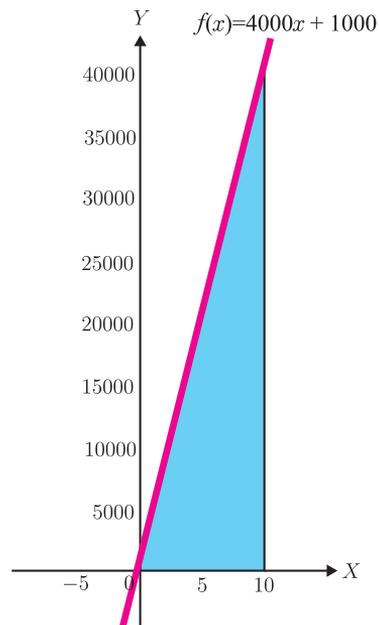
Alternatif Penyelesaian:

- Sketsakan grafiknya terlebih dahulu.

Jika kita perhatikan Gambar 4.14, maka terdapat interval tertutup yaitu $[0, 5]$. Lebar persegi ke- i yang terbentuk adalah Δx_i dan tingginya adalah $(4000x_i + 1000)$. Jumlah ukuran luas dari n buah persegi panjang adalah $(4000x_i + 1000)\Delta x_i$. Jika S adalah jumlah penghematan dalam 5 tahun pertama, maka

$$\begin{aligned}
 S &= \lim_{|\Delta x| \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (4000x_i + 1000)\Delta x_i. \\
 &= \int_0^5 f(x) dx. \\
 &= \int_0^5 (4000x + 1000) dx. \\
 &= 2000x^2 + 1000x \Big|_0^5 = 55000.
 \end{aligned}$$

Jadi, jumlah penghematan dalam 5 tahun pertama adalah Rp 55.000,00



Gambar 4.14. Grafik Fungsi $f(x) = 4000x + 1000$

- b. Karena harga seperangkat peralatan adalah 36000 dan andaikan dalam n tahun harga peralatan itu kembali, maka

$$\int_0^n f(x)dx = 36000.$$

$$\int_n^0 (4000x + 1000)dx.$$

$$2000x^2 + 1000x \Big|_0^n = 36000.$$

$$2000n^2 + 1000n = 36000.$$

$$2n^2 + n - 36 = 0.$$

$$(n-4)(2n+9) = 0.$$

$$n = 4. \text{ atau } n = \frac{9}{2}.$$

Jadi, dalam jangka waktu 4 tahun harga peralatan itu kembali.

3. Dalam Fisika

Latihan Soal Terbimbing 4.20

Sebuah gaya sebesar 40 N diperlukan untuk menahan pegas yang telah diregangkan dari panjang aslinya 10 cm sampai panjang 15 cm. Berapa usaha yang dilakukan untuk meregangkan pegas dari 15 cm menjadi 18 cm?

Alternatif Penyelesaian:

Menurut Hukum Hooke, gaya yang diperlukan untuk menahan pegas meregang x meter di luar panjang alaminya adalah $f(x) = kx$. Ketika pegas ditarik dari 10 cm sampai 15 cm, jumlah yang diregangkan adalah $15 - 10 = 5 \text{ cm} = 0,05 \text{ m}$. Ini berarti $f(0,05) = 40$, maka

$$f(0,05) = 40.$$

$$0,05 k = 40.$$

$$k = 800.$$

Karena diperoleh $k = 800$, maka usaha yang dilakukan untuk meregangkan pegas dari 15 cm menjadi 18 cm adalah.

$$W = \int_{0,05}^{0,08} 800x dx = 400x^2 \Big|_{0,05}^{0,08} = 1,56.$$

Jadi, usaha yang dilakukan untuk meregangkan pegas dari 15 cm menjadi 18 cm adalah 1,56 Joule.



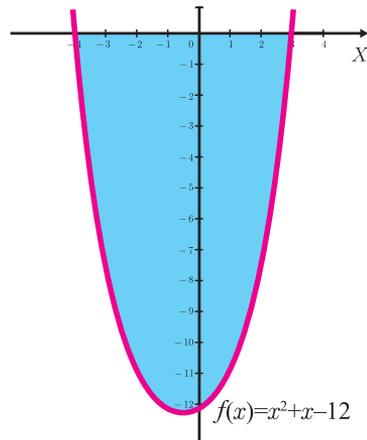
Ayo Mencoba

Pada aktivitas Ayo Mencoba di sini, guru dapat mengarahkan peserta didik untuk menggunakan sifat-sifat integral dan Teorema Dasar Kalkulus I dan II dalam menyelesaikan soal penerapan yang ada pada Latihan Soal 4.5. Alternatif penyelesaian telah disediakan untuk membantu guru.

1. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh $y = x^2 + x - 12$ dan sumbu X !

Alternatif Penyelesaian:

Karena kurva memotong sumbu X , maka $y = 0$. Dengan mensubstitusikan $y = 0$ ke persamaan $y = x^2 + x - 12$, diperoleh $x^2 + x - 12 = 0$. Dengan menggunakan pemfaktoran untuk persamaan $x^2 + x - 12 = 0$ diperoleh bahwa $x_1 = -4$ atau $x_2 = 3$. Maka titik potong kurva $y = x^2 + x - 12$ dengan sumbu X adalah $(-4, 0)$ dan $(3, 0)$, apabila digambarkan dengan grafik dapat dilihat pada Gambar 4.15.



Gambar 4.15. Grafik Fungsi $f(x) = x^2 + x - 12$

$$\begin{aligned} \text{Luas} &= \int_{-4}^3 (-(f(x))) dx = \int_{-4}^3 (-(x^2 + x - 12)) dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 12x \right]_{-4}^3 = \frac{301}{6} \end{aligned}$$

2. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$ dan $y = -x^2 + 4x$!

Alternatif Penyelesaian:

Langkah pertama yang harus dilakukan adalah menentukan titik potong antara kurva $y = x^2$ dan $y = -x^2 + 4x$. Dengan mensubstitusikan kedua persamaan tersebut diperoleh bahwa,

$$x^2 = -x^2 + 4x.$$

$$x^2 - 4x = 0.$$

$$2x(x - 2) = 0.$$

sehingga diperoleh bahwa $x_1 = 0$ atau $x_2 = 2$.

Untuk $x_1 = 0$, substitusikanlah ke salah satu persamaan (misalkan ke persamaan $y = x^2$) sehingga diperoleh $y_1 = 0$, maka titik potongnya adalah $(0,0)$.

Untuk $x_2 = 2$, substitusikan ke salah satu persamaan sehingga diperoleh $y_2 = 4$, maka titik potongnya adalah $(2,4)$.

Dari titik potong $(0,0)$ dan $(2,4)$, maka luas yang dibatasi oleh $y = x^2$ dan $y = -x^2 + 4x$ adalah

$$\text{Luas} = \int_0^2 (-2x^2 + 4x) dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 \right]_0^2 = \frac{8}{3} \text{ (luas satuan).}$$

3. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y^2 = 2x - 2$ dan $y = x - 5$!

Alternatif Penyelesaian:

Dengan menyubstitusikan $y = x - 5$ ke persamaan $y^2 = 2x - 2$, diperoleh

$$(x-5)^2 = 2x-2.$$

$$x^2 - 10x + 25 = 2x - 2.$$

$$x^2 - 12x + 27 = 0.$$

Dengan memfaktorkan persamaan kuadrat $x^2 - 12x + 27 = 0$ diperoleh

$$x_1 = 9 \text{ atau } x_2 = 3.$$

Untuk $x_1 = 9$, dengan menyubstitusikan ke salah satu persamaan (misalkan persamaan $y = x - 5$), diperoleh $y = 9 - 5 = 4$, sehingga titik potongnya adalah $(9,4)$.

Untuk $x_2 = 3$, substitusikan ke salah satu persamaan (misalkan persamaan $y = x - 5$), diperoleh $y = 3 - 5 = -2$, sehingga titik potongnya adalah $(3,-2)$.

Dari titik potong $(9,4)$ dan $(3,-2)$, maka bentuk grafiknya seperti Gambar 4.16.

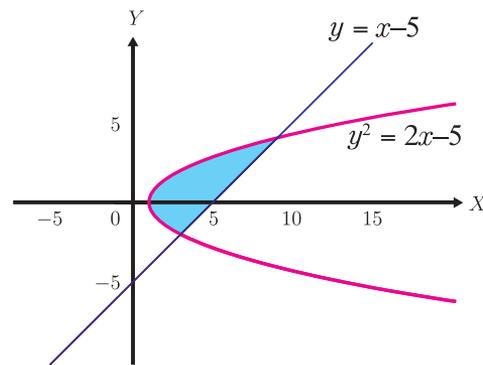
Luas daerah yang dibatasi oleh $y^2 = 2x - 2$ dan $y = x - 5$ adalah

$$= \int_{-2}^4 \left((y+4.5) - \left(\frac{y^2}{2} + 1 \right) \right) dy.$$

$$= \int_{-2}^4 \left(-\frac{y^2}{2} + y - 4 \right) dy.$$

$$= \left[-\frac{y^3}{6} + \frac{y^2}{2} - 4y \right]_{-2}^4 = 18.$$

Jadi, luas daerah tersebut adalah 18 satuan luas.



Gambar 4.16. Kurva $y^2 = 2x - 2$ dan $y = x - 5$

4. Seorang manajer di suatu restoran menerima kiriman bahan makanan tertentu setiap hari Senin. Karena jumlah pengunjung sedikit pada awal minggu dan banyak pada akhir minggu, permintaan meningkat sesuai dengan majunya hari dalam satu minggu, sehingga setelah x hari, barang inventaris tersebut berjumlah y satuan, dengan persamaan $y = 49000 - 1000x^2$. Jika ongkos penyimpanan setiap hari adalah Rp 500,00, tentukan jumlah seluruh ongkos pemeliharaan inventaris selama 7 hari!

Alternatif Penyelesaian:

Jumlah seluruh ongkos pemeliharaan inventaris selama 7 hari adalah

$$\int_0^7 49000 - 1000x^2 dx = \left[49000x - \frac{1000x^3}{3} \right]_0^7 = 228600.$$

Jadi, ongkos pemeliharaan selama 7 hari adalah $228600 \times 500 = \text{Rp } 114.300.000$.

5. Sebuah kabel memiliki berat 200 kg dengan panjang 100 meter. Kabel tersebut dan digantung secara vertikal dari atas sebuah gedung yang tinggi. Berapa usaha yang diperlukan untuk mengangkat kabel ke puncak gedung?

Alternatif Penyelesaian:

Berdasarkan ilustrasi yang ada pada buku peserta didik diperoleh bahwa $F = 2\Delta x$ dan $h = x_i$. Maka $W_i = F \cdot h = 2x_i \Delta x$. Diperoleh hasil

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 2x_i \Delta x = \int_0^{100} 2x dx = [x^2]_0^{100} = [100^2] - [0^2] = 10000.$$

Jadi, usaha yang diperlukan untuk mengangkat kabel ke puncak gedung adalah 10.000 Joule.



Interaksi Guru dengan Orang Tua

Guru memberitahukan kepada peserta didik, bahwa mereka belajar di rumah untuk mengerjakan tugas pada Buku Siswa Latihan Soal 4.1 sampai Latihan Soal 4.5 dan Uji Kompetensi bersama orang tua atau wali murid. Guru memberi tahu orangtua atau wali murid untuk mengingatkan, membimbing, dan mengawasi putra-putrinya untuk mengerjakan tugas di rumah, serta memberi paraf pada hasil kerjanya. Dijelaskan pula bahwa yang harus dilakukan orang tua adalah membimbing, bukan mengerjakan tugas. Interaksi ini dapat dilakukan melalui pertemuan, sms, telepon, grup media sosial, atau buku penghubung. Jika orang tua belum jelas cara membimbingnya dipersilakan menghubungi guru.

D. Uji Kompetensi

1. Diketahui fungsi $f(x) = 12 - x - x^2$, sumbu X dan garis-garis $x = -3$ dan $x = 2$.
 - a. Nyatakan ukuran dari luas sebagai suatu jumlahan Riemann dengan partisi yang sama!
 - b. Tentukan integral tentu dengan $\int_0^a f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x$!
 - c. Tentukan integral tentu dengan sifat-sifatnya!

Alternatif Penyelesaian:

- a. Misalkan dijadikan 5 partisi maka masing-masing memiliki $\Delta x = 1$.

\bar{x}_i	$f\bar{x}_i$	Δx_i	$f(\bar{x}_i)\Delta x_i$
-2,5	8,25	1	8,25
-1,5	11,25	1	11,25
-0,5	12,25	1	12,25
0,5	11,25	1	11,25
1,5	8,25	1	8,25
$\sum_{i=1}^5 f(\bar{x}_i)\Delta x_i$			51,25

Jadi luasnya 51,25 satuan luas.

- b.
$$\begin{aligned} \int_{-3}^2 (12 - x - x^2) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x. \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(12 - \left(\frac{5i}{n}\right) - \left(\frac{5i}{n}\right)^2 \right) \left(\frac{5}{n}\right). \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{60}{n^1} - \frac{25i}{n^2} - \frac{25i^2}{n^3} \right). \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{305}{6} - \frac{125}{n^2} \right) = \frac{305}{6}. \end{aligned}$$
- c.
$$\int_{-3}^2 (12 - x - x^2) dx = 12x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \Big|_{-3}^2 = \frac{305}{6}.$$

2. Hitunglah $\int_{-3}^4 |x+2| dx$!

Alternatif Penyelesaian:

Persamaan $|x+2|$ dapat didefinisikan dengan $|x+2| = \begin{cases} -(x+2), & x \leq -2 \\ x+2, & x \geq -2 \end{cases}$, sehingga

$$\begin{aligned} \int_{-3}^4 |x+2| dx &= \int_{-3}^{-2} -(x+2) dx + \int_{-2}^4 (x+2) dx = -\left[\frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-3}^{-2} + \left[\frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^4 \\ &= -\left\{\left[\frac{(-2)^2}{2} + 2(-2)\right] - \left[\frac{(-3)^2}{2} + 2(-3)\right]\right\} + \left\{\left[\frac{(4)^2}{2} + 2(4)\right] - \left[\frac{(-2)^2}{2} + 2(-2)\right]\right\} \\ &= \frac{37}{2}. \end{aligned}$$

Jadi, $\int_{-3}^4 |x+2| dx = \frac{37}{2}$.

3. Tunjukkan bahwa $\int_3^{-1} f(x) dx + \int_4^3 f(x) dx + \int_{-3}^4 f(x) dx + \int_{-1}^{-3} f(x) dx = 0$.

Alternatif Penyelesaian:

$$\int_{-1}^{-3} f(x) dx + \int_{-3}^4 f(x) dx + \int_4^3 f(x) dx + \int_3^{-1} f(x) dx = \int_{-1}^{-1} f(x) dx = 0.$$

4. Carilah $\int_4^{16} \left[\frac{d}{dx} \int_5^x (2\sqrt{t}-1) dt \right] dx$!

Alternatif Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \int_4^{16} \left[\frac{d}{dx} \int_5^x (2\sqrt{t}-1) dt \right] dx &= \int_4^{16} \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} - x - \frac{4}{5} 5^{\frac{3}{2}} + 5 \right) \right] dx \\ &= \int_4^{16} \left(2x^{\frac{1}{2}} - 1 \right) dx = \left[\frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} - x \right]_4^{16} = \frac{188}{3}. \end{aligned}$$

5. Seorang kolektor benda-benda seni membeli sebuah lukisan dari seorang seniman seharga Rp 15.000.000,00. Nilai lukisan tersebut bertambah seiring waktu, sesuai dengan $\frac{dv}{dt} = 5t^2 + 10t + 50$. Dimana V adalah harga lukisan dalam rupiah yang diharapkan dari sebuah lukisan setelah t tahun pembelian. Jika $\frac{dv}{dt}$ berlaku untuk 6 tahun kemudian, tentukan harga dari lukisan tersebut empat tahun kemudian!

Alternatif Penyelesaian:

Diketahui bahwa pertambahan harga nilai lukisan bertambah terhadap waktu sesuai dengan:

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= 5t^{\frac{3}{2}} + 10t + 50. \\ \int dV &= \int (5t^{\frac{3}{2}} + 10t + 50) dt. \\ V &= 2t^{\frac{5}{2}} + 5t^2 + 50t + C.\end{aligned}$$

Maka berlaku untuk $t = 0$, sehingga

$$\begin{aligned}V(0) &= 15000000. \\ 2(0)^{\frac{5}{2}} + 5(0)^2 + 50(0) + C &= 15000000. \\ C &= 15000000.\end{aligned}$$

Diperoleh bahwa,

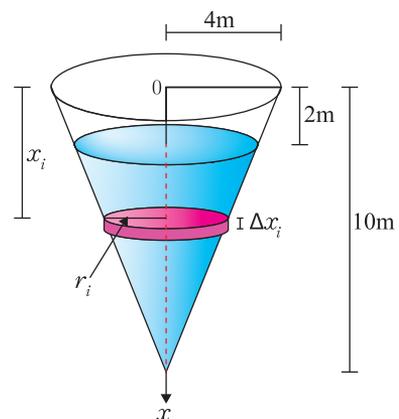
$$\begin{aligned}V(t) &= 2t^{\frac{5}{2}} + 5t^2 + 50t + 15000000. \\ V(4) &= 2(4)^{\frac{5}{2}} + 5(4)^2 + 50(4) + 15000000 = 64 + 80 + 200 + 15000000. \\ V(4) &= 15000344.\end{aligned}$$

Jadi, harga lukisan tersebut 4 tahun kemudian Rp 15.000.344,00.

6. Sebuah tangki berbentuk kerucut dengan puncak ke arah bawah memiliki tinggi 10 m dan jari-jarinya 4 m. Kerucut Tangki tersebut diisi air setinggi 8 m. Temukan usaha yang diperlukan untuk mengosongkan tangki dengan memompa semua air ke bagian atas tangki! (Kerapatan air adalah 1000 kg/m³)!

Alternatif Penyelesaian:

Pertama yang dilakukan adalah mengukur kedalaman dari atas tangki dengan menggunakan garis koordinat vertikal. Air memanjang dari kedalaman 2 m hingga kedalaman 10 m dan dibagi interval menjadi n sub interval dengan titik akhir dan pilih di sub interval i . Ini membagi air menjadi beberapa lapisan. Lapisan pertama didekati oleh silinder melingkar dengan jari-jari dan tinggi.



Gambar 4.17. Kerucut Terbalik

Kita bisa menghitung dari segitiga sebangun, menggunakan Gambar 4.17 dan 4.18.

Perkiraan volume lapisan pada air ke-I adalah $V_i = \pi f_i^2 \Delta x = \frac{4\pi}{25}(10-x_i)^2 \Delta x$.

Massa adalah $m_i = \text{kerapatan} \times \text{volume} = 160\pi(10-x_i)^2 \Delta x$.

Gaya yang dibutuhkan adalah $F_i = m_i g = 1568\pi(10-x_i)^2 \Delta x$.

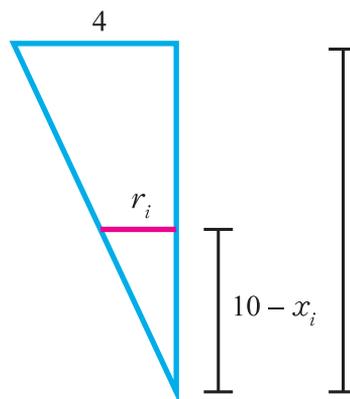
Setiap partikel dalam lapisan harus menempuh jarak kira-kira x_i . Usaha yang dilakukan W untuk menaikkan lapisan ini ke atas adalah hasil kali gaya F dan jarak x adalah

$$W_i = F_i x_i = 1568\pi x_i (10-x_i)^2 \Delta x.$$

Maka total usaha yang dilakukan

$$\begin{aligned} W &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 1568\pi x_i (10-x_i)^2 \Delta x. \\ &= \int_2^{10} \sum_{i=1}^n 1568\pi x (10-x)^2 dx. \\ &= \frac{23.211.264}{3} \pi. \end{aligned}$$

Jadi usaha yang diperlukan untuk mengosongkan tangki dengan memompa semua air ke bagian atas tangki $= \frac{23.211.264}{3} \pi$ Joule.



Gambar 4.18. Sketsa Partisi Kerucut Terbalik

Bab 5 Analisis Data dan Peluang

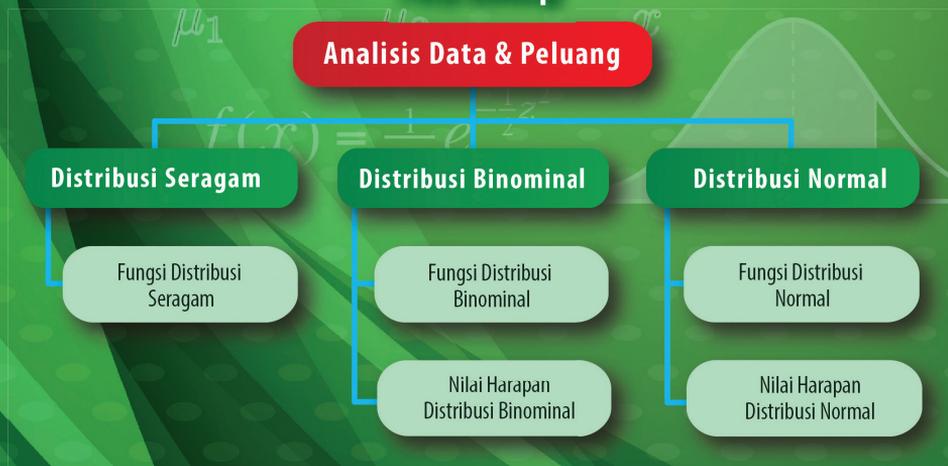
$$E(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma t + \mu) e^{-\frac{1}{2}t^2} \sigma dt$$

Pengalaman Belajar

Setelah mempelajari bab ini, peserta didik diharapkan dapat:

1. Menginterpretasikan parameter distribusi seragam;
2. Memecahkan permasalahan yang berkaitan dengan distribusi seragam;
3. Menginterpretasi parameter distribusi binomial;
4. Menghitung nilai harapan distribusi binomial;
5. Memecahkan permasalahan yang berkaitan dengan distribusi binomial;
6. Menginterpretasi parameter distribusi normal;
7. Menghitung nilai harapan distribusi normal; dan
8. Memecahkan permasalahan yang berkaitan dengan distribusi normal.

Peta Konsep



Alternatif Skema Pembelajaran

Subbab	Waktu (JP)	Tujuan	Pokok Materi	Kosakata	Bentuk metode dan aktivitas	Sumber utama	Sumber lain (Daftar Pustaka)
Distribusi Seragam	1 JP	Menginterpretasikan parameter distribusi data seragam Memecahkan permasalahan yang berkaitan dengan distribusi seragam	Distribusi seragam	Parameter Distribusi Seragam	Eksplorasi, Diskusi, Pemaparan, Latihan Soal Terbimbing, dan Latihan Soal	Buku Siswa	[11] [12] [13] [28]
Distribusi Binomial	2 JP	Menginterpretasi parameter distribusi data binomial Menghitung nilai harapan distribusi binomial Memecahkan permasalahan yang berkaitan dengan distribusi binomial	Distribusi Binomial Nilai Harapan Distribusi Binomial	Distribusi Binomial Nilai Harapan Distribusi Binomial			[31] [36] [37]
Distribusi Normal	3 JP	Menginterpretasi parameter distribusi data normal Menghitung nilai harapan distribusi normal Memecahkan permasalahan yang berkaitan dengan distribusi normal	Distribusi Normal Nilai Harapan Distribusi Normal	Distribusi Normal Nilai Harapan Distribusi Normal			

Catatan:

- Waktu (JP) adalah jumlah atau rentang jam yang disarankan untuk pelajaran. Guru dapat beradaptasi dengan kondisi pembelajaran yang sebenarnya.
- Untuk melakukan pemeriksaan ulang jawaban yang dituliskan oleh peserta didik, guru dapat menyarankan untuk menggunakan GeoGebra. GeoGebra memiliki versi daring yang dapat digunakan secara offline di laptop dan Android. GeoGebra dapat digunakan untuk perhitungan seperti kalkulator. Hal ini juga dapat digunakan untuk menghasilkan grafik.

Bab Analisis Data dan Peluang bertujuan untuk mengembangkan kemampuan peserta didik dalam memahami dan menalar tentang analisis data dan peluang. Peserta didik mampu menjelaskan distribusi seragam, distribusi binomial, dan distribusi normal. Banyak masalah dalam kehidupan sehari-hari melibatkan analisis data dan peluang. Peserta didik harus mampu menggunakan analisis data dan peluang untuk dapat memecahkan masalah tersebut.

Pada bagian pertama, guru akan menjelaskan tentang distribusi seragam. Pada bagian kedua, guru akan menjelaskan tentang distribusi binomial dan nilai harapan dari distribusi binomial. Pada bagian ketiga, guru akan menjelaskan tentang distribusi normal dan nilai harapan dari distribusi normal. Secara umum, bagian ini memberikan pedoman alternatif bagi guru untuk melakukan analisis data dan peluang bagi peserta didik.

Panduan Pembelajaran

Sebelum memulai aktivitas pembelajaran, guru memandu peserta didik untuk berdoa menurut agama dan kepercayaan masing-masing. Hal ini bertujuan untuk menguatkan salah satu elemen Profil Pelajar Pancasila, yaitu beriman, bertakwa kepada Tuhan YME, dan berakhlak mulia. Sebelum membahas tentang materi analisis data dan peluang, setelah itu, peserta didik diberikan tes diagnostik kognitif dan non kognitif dan tes diagnostik kognitif. Pada tes diagnostik non kognitif, guru dapat melihat kembali kegiatan Ayo Mengingat Kembali yang ada pada Bab 1 materi Geometri Analitik. Untuk tes diagnostik kognitif dapat dilakukan dengan tanya jawab berkaitan dengan permutasi, kombinasi, dan peluang suatu kejadian. Selanjutnya, guru memberikan apersepsi kontekstual berupa pertandingan sepak bola. Sebelum permainan dimulai, wasit akan melempar koin dengan dua sisi yang seimbang untuk menentukan tim mana yang mendapatkan bola lebih dulu. Apakah peluang keluar sisi gambar dan angka sama? Jika sisi gambar menyatakan tim yang mendapatkan bola terlebih dahulu, dapatkah peserta didik menentukan peluang wasit mendapatkan 1 sisi gambar dalam satu hari, dua hari berturut-turut, bahkan selama tujuh hari berturut-turut?

Guru dapat menggunakan konteks lain yang dapat memberikan pengalaman (pengetahuan) awal tentang analisis data dan peluang. Hal ini dimaksudkan untuk memotivasi peserta didik mempelajari analisis data dan peluang, sehingga anggapan peserta didik bahwa belajar matematika tidak ada hubungannya dengan kehidupan sehari-hari lambat laun tergerus dan berubah menjadi oleh anggapan bahwa pembelajaran matematika berkaitan erat dengan lingkungan dan ilmu-ilmu lainnya.

A. Distribusi Seragam

Sebelum memulai aktivitas pembelajaran, guru diharapkan melakukan tes diagnostik kognitif. Tes diagnostik kognitif dapat dilakukan dengan tanya jawab berkaitan dengan peluang suatu kejadian, misalnya pada pelemparan sebuah koin seimbang. Hal ini bertujuan untuk mempersiapkan peserta didik sebelum memasuki materi peluang seragam.



Ayo Mengingat Kembali

- Peluang adalah kemungkinan munculnya suatu kejadian.
- Peluang kejadian A dapat ditulis sebagai $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ dengan $n(A)$ adalah banyaknya titik sampel kejadian A ; $n(S)$ adalah banyaknya ruang sampel dari suatu percobaan.



Ayo Bereksplorasi

Eksplorasi 5.1

Sebelum membahas masalah pada Eksplorasi 5.1, guru membagi peserta didik ke dalam kelompok yang terdiri atas 4 orang. Guru memberikan pertanyaan mengenai peluang. Kemudian disajikan permasalahan yang terdapat pada Eksplorasi 5.1 tentang pelemparan koin seimbang. Setelah mencoba langsung, peserta didik diarahkan untuk menjawab setiap pertanyaan.

Guru mengarahkan peserta didik untuk mengisikan data berikut.

Banyaknya sisi Gambar	Banyaknya Sisi Angka
1	1

Guru mengarahkan peserta didik untuk mencoba melemparkan uang logam tersebut.

Hasil Lemparan yang Mungkin	Nilai Peluang
Angka	$\frac{1}{2}$
Gambar	$\frac{1}{2}$



Miskonsepsi

Jika percobaan peserta didik menghasilkan nilai yang berbeda, terdapat kemungkinan koin yang digunakan tidak seimbang atau cara pelemparan koin yang tidak sama pada setiap percobaan.

Guru mendampingi peserta didik melakukan diskusi kelompok dan mengajak mereka untuk berani menyampaikan pendapat dan menghargai pendapat teman yang lain. Diharapkan dari hasil diskusi, peserta didik memperoleh jawaban:

1. Peluang muncul sisi gambar dan angka sama.
2. Bentuk peluangnya adalah $f(x) = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$.
3. Kesimpulan yang didapatkan adalah peluang muncul sisi gambar dan angka sama yaitu $\frac{1}{2}$.

Jika terdapat kesulitan, guru dapat memberi penjelasan mengenai kegiatan yang dilakukan peserta didik yang mengarahkan agar peserta didik dapat menjawab dengan benar 3 pertanyaan tersebut. Setelah selesai berdiskusi kegiatan Eksplorasi 5.1, guru mengarahkan peserta didik untuk melanjutkan diskusi mengenai Ayo Berpikir Kritis berikut.



Ayo Berpikir Kritis

Jika terdapat tiga buah uang logam seimbang dilemparkan, bagaimana menentukan distribusi peluang keluar sisi angka?

$S = \{AAA, AAG, AGA, AGG, GAA, GAG, GGA, GGG\}$ semuanya memiliki peluang yang sama untuk muncul, sehingga distribusi peluangnya :

$$f(x;8) = \frac{1}{8} \text{ untuk } x = 1,2,3,4,5,6,7,8$$

Guru dapat memberikan pertanyaan apakah x ?

Hasil pertanyaan yang diajukan guru diharapkan dapat memberikan arahan kepada peserta didik untuk memberikan definisi variabel acak.

- Variabel acak adalah suatu fungsi yang memetakan setiap unsur ruang sampel ke bilangan real.
- Variabel acak dinotasikan dengan huruf besar.
- Nilai variabel acak dilambangkan dengan huruf kecil.

Jawaban peserta didik mengenai variabel acak akan berbeda, guru dapat memberikan penjelasan mengenai variabel acak agar peserta didik memahami definisi variabel acak. Selanjutnya, guru meminta setiap kelompok menggeneralisasikan bentuk atau fungsi apa yang tepat untuk menggambarkan kegiatan Eksplorasi 5.1 dan fungsi tersebut adalah fungsi distribusi seragam.

Fungsi Distribusi Seragam

Apabila variabel acak X mempunyai nilai-nilai x_1, x_2, \dots, x_k dengan peluang yang sama, maka distribusi seragam diskret dapat dinyatakan dengan

$$f(x;k) = \frac{1}{k}, \text{ untuk } x = x_1, x_2, \dots, x_k.$$


Miskonsepsi

Mungkin saat awal peserta didik akan menjawab bentuk distribusinya adalah $\frac{1}{n(S)}$ dengan $n(S)$ adalah banyaknya anggota pada ruang sampel. Hal, ini dapat diarahkan untuk diganti dengan variabel lain yang nantinya digunakan sebagai parameter

Guru dapat meminta setiap kelompok untuk memberikan contoh masalah yang berkaitan dengan distribusi seragam yang peserta didik temui sehari-hari beserta penyelesaiannya.



Ayo Mencoba

Pada kegiatan Ayo Mencoba, guru dapat menggunakan kelompok yang sudah dibentuk pada kegiatan Eksplorasi 5.1. Guru dapat memberikan pertanyaan mengenai distribusi seragam serta menggunakan beberapa Contoh Soal 5.1 dan 5.2. Selanjutnya kelompok peserta didik diarahkan untuk mendiskusikan Latihan Soal Terbimbing 5.1 dan 5.2. Setelah selesai berdiskusi, perwakilan kelompok dapat mempresentasikan hasil diskusinya. Guru mengajak peserta didik untuk berani menyampaikan pendapatnya dan menghargai pendapat rekan lainnya.

Latihan Soal Terbimbing 5.1

Misalkan, akan dipilih 1 dari 10 karyawan dipilih secara acak untuk mengawasi suatu proyek. Jika x adalah peluang terpilihnya satu karyawan secara acak. Tentukan distribusi peluang x !

Alternatif Penyelesaian:

Peluang terpilihnya satu karyawan dari 10 karyawan secara randomacak adalah

$$f(x;10) = \frac{1}{10} \text{ untuk } x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.$$

Latihan soal terbimbing 5.2

Tim bulu tangkis dari 4 orang pemain yaitu A, B, C, dan D. Jika dari tim tersebut dipilih 2 orang secara acak untuk bermain, tentukan distribusi seragamnya!

Alternatif Penyelesaian:

Jumlah dalam satu tim adalah 4 orang, yang akan dipilih adalah 2 orang secara acak.

Banyaknya kombinasi yang mungkin adalah $\binom{4}{2} = 6$, yang dapat ditulis sebagai AB, AC, AD, BC, BD, dan CD. Karena masing-masing memiliki peluang terpilih yang sama, maka distribusi seragamnya adalah $f(x;6) = \frac{1}{6}$ untuk $x = 1,2,3,4,5,6$.



Ayo Mencoba

Pada kegiatan ini, peserta didik diminta untuk menyelesaikan masalah pada di Latihan Soal 5.1. Alternatif penyelesaian telah disediakan untuk membantu guru.

Latihan Soal 5.1

1. Dalam satu tahun terdiri dari 12 bulan. Tentukan peluang dipilihnya 3 bulan dalam satu tahun secara acak!

Alternatif Penyelesaian:

Dalam satu tahun terdapat 12 bulan, akan dipilih 3 bulan secara acak, maka banyaknya kombinasi yang mungkin $\binom{12}{3} = 220$ sehingga $k = 220$.

Jadi kemungkinan terpilihnya 3 bulan dalam satu tahun secara acak adalah $f(x;220) = \frac{1}{220}$ untuk $x = 1,2,3,\dots,220$.

2. Satu set kartu bridge berisi 52 kartu. Tentukan peluang terambilnya satu kartu pada pengambilan satu lembar kartu bridge secara acak!

Alternatif Penyelesaian:

peluang terambilnya satu kartu pada pengambilan satu lembar kartu bridge secara randomacak adalah $f(x;52) = \frac{1}{52}$ untuk $x = 1,2,3,\dots,52$.

3. Sebuah kotak berisi 6 buah bola lampu yang terdiri dari 5 watt, 8 watt, 11 watt, 14 watt, 18 watt, dan 23 watt. Tentukan peluang terambilnya sebuah lampu dari kotak tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

Jadi peluang terambilnya sebuah lampu dari kotak adalah $f(x;6) = \frac{1}{6}$ untuk $x = 1, 2, 3, \dots, 6$.

4. Suatu kotak berisi 12 bola yang diberi nomor 1 sampai 12 yang akan diambil secara acak. Tentukan peluang terambilnya sebuah bola dari dalam kotak!

Alternatif Penyelesaian:

Jadi peluang terambilnya sebuah bola dari dalam kotak $f(x;12) = \frac{1}{12}$ untuk $x = 1, 2, 3, \dots, 12$.

5. Toko Roti “Enak” akan menentukan warna untuk kemasan yaitu merah, hijau, kuning, biru, ungu, putih, hitam, dan coklat. Tentukan peluang terpilihnya satu warna untuk dijadikan kemasan toko tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

peluang terpilihnya satu warna untuk dijadikan kemasan adalah $f(x;8) = \frac{1}{8}$ untuk $x = 1, 2, 3, \dots, 8$.

B. Distribusi Binomial

Sebelum memulai aktivitas pembelajaran, guru diharapkan melakukan tes diagnostik non kognitif dan tes diagnostik kognitif. Tes diagnostik kognitif dapat dilakukan dengan tanya jawab berkaitan dengan kombinasi, faktorial, dan peluang.



Ayo Mengingat Kembali

- $C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
- $n! = n \times (n-1) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$.
- $P(A) + P(A^c) = 1$.
dengan $P(A)$ adalah peluang kejadian sukses.
 $P(A^c)$ adalah peluang kejadian gagal.

Guru dapat memberikan pertanyaan mengenai:

1. Kombinasi

Contoh: Pada sebuah kotak terdapat empat bola bernomor 1, 2, 3, 4. Tentukan banyak cara untuk memilih 2 bola yang berbeda beda!

2. Faktorial

Contoh: $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$.

3. Peluang

Contoh: Jika peluang seorang bayi lahir berjenis kelamin laki-laki adalah $\frac{1}{2}$, maka peluang lahir bayi berjenis kelamin perempuan adalah...

Hal ini dilakukan untuk mempersiapkan peserta didik mempelajari tentang distribusi binomial.



Ayo Bereksplorasi

Eksplorasi 5.2

Sebelum membahas soal pada Eksplorasi 5.2, guru membagi peserta didik menjadi beberapa kelompok yang terdiri atas 4 orang. Guru mengajak peserta didik untuk berkolaborasi dengan baik. Setelah itu, disajikan masalah yang terdapat pada Eksplorasi 5.2. Peserta didik diminta melemparkan koin seimbang sebanyak dua kali dan isikan hasilnya pada Tabel 5.1 dan Tabel 5.2

Tabel 5.1. Alternatif Jawaban untuk Kegiatan Eksplorasi 5.2 untuk Satu Koin

Hasil Lemparan Pertama	Hasil Lemparan Kedua
A	A
	G
G	A
	G

Tabel 5.2. Alternatif Jawaban untuk Kegiatan Eksplorasi 5.2 untuk Dua Koin

Hasil Pelemparan yang mungkin (lemparan 1 dan lemparan 2)	Probabilitas
AA	$\frac{1}{4}$
AG	$\frac{1}{4}$
GA	$\frac{1}{4}$
GG	$\frac{1}{4}$

Jawaban hasil diskusi peserta didik yang diharapkan adalah:

1. peluang munculnya gambar pada dua kali pelemparan adalah $\frac{1}{4}$,
2. kejadian kegagalannya adalah munculnya angka pada pelemparan baik satu kali maupun dua kali pelemparan,
3. peluang kegagalannya adalah $\frac{3}{4}$,
4. nilai harapan untuk memperoleh gambar pada satu kali pelemparan adalah $\frac{1}{2}$,
5. nilai harapan untuk memperoleh keduanya gambar pada dua kali pelemparan $\frac{1}{2}$, dan
6. simpulan yang diperoleh adalah kejadian yang berlaku memiliki peluang berhasil dan gagal.

Jika peserta didik menemui kesulitan, guru dapat memberi penjelasan mengenai kegiatan yang dilakukan peserta didik yang mengarahkan agar peserta didik dapat menjawab dengan benar. Setelah selesai berdiskusi kegiatan Eksplorasi 5.2, guru mengarahkan peserta didik untuk melanjutkan diskusi mengenai Ayo Berpikir Kritis berikut.



Ayo Berpikir Kritis

Peluang memperoleh paling sedikit 4 gambar pada 6 kali pelemparan sebuah uang logam seimbang adalah $\frac{11}{32}$. Dikatakan sukses apabila keluar gambar. Peluang keluar gambar pada satu kali pelemparan sebuah uang logam adalah $\frac{1}{2}$, maka nilai harapan memperoleh gambar pada 10 kali pelemparan adalah $10(\frac{1}{2}) = 5$.

Selanjutnya, guru meminta setiap kelompok menggeneralisasikan bentuk atau fungsi apa yang tepat untuk menggambarkan kegiatan Eksplorasi 5.2 dan fungsi tersebut adalah fungsi distribusi binomial.

1. Fungsi Distribusi Binomial

Jika suatu percobaan binomial mempunyai peluang berhasil p dan peluang gagal $q = 1 - p$, maka fungsi distribusi peluang untuk variabel acak binomial X , yaitu banyaknya keberhasilan dalam n percobaan yang bebas adalah

$$b(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \text{ untuk } x = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Guru dapat mengarahkan peserta didik untuk mendiskusikan kegiatan pada Ayo Berdiskusi.



Ayo Berdiskusi

Syarat suatu kejadian berdistribusi binomial adalah sebagai berikut:

- percobaan terdiri dari n percobaan yang berulang,
- setiap usaha yang berulang hasilnya ditentukan dengan sukses dan gagal,
- peluang sukses dinyatakan dengan p , untuk setiap ulangan adalah sama dan tidak diulang,
- pengulangan bersifat bebas satu sama lain.

Pada kegiatan Ayo Mencoba, guru dapat menggunakan kelompok yang sudah dibentuk pada kegiatan Eksplorasi 5.2. Guru dapat menggunakan Contoh Soal 5.3 dan 5.4 untuk fungsi distribusi binomial. Peserta didik secara kelompok diberikan Latihan Soal Terbimbing 5.3 dan 5.4. Apabila jumlah kelompok yang dibentuk lebih dari 2 kelompok, guru dapat menambahkan bentuk masalah dengan mengadaptasi latihan soal terbimbing. Setelah selesai mendiskusikan masalah, perwakilan kelompok dapat mempresentasikan hasil diskusi.

Latihan Soal Terbimbing 5.3

Tentukan peluang untuk mendapatkan 2 sisi gambar dalam 7 kali pelemparan sebuah uang logam!

Alternatif Penyelesaian:

Peluang mendapatkan 2 sisi gambar dalam 7 kali pelemparan sebuah uang logam dapat ditentukan oleh: $b(x;n,p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$, sehingga

$$b\left(2;7,\frac{1}{2}\right) = \binom{7}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{7-2} = \binom{7}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{7!}{2!(7-2)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{7!}{2!5!} \cdot \frac{1}{2^7}$$

$$b\left(2;7,\frac{1}{2}\right) = \frac{21}{128} = 0,164.$$

Jadi, peluang untuk mendapatkan 2 sisi gambar dalam 7 kali pelemparan sebuah uang logam adalah 0,164.

Latihan Soal Terbimbing 5.4

Diasumsikan peluang seseorang akan sembuh dari kanker adalah 40%. Jika 15 orang terkena penyakit tersebut, berapa peluang tepat 5 orang dapat sembuh?!

Alternatif Penyelesaian:

Soal dapat diselesaikan menggunakan cara yang sama dengan penyelesaian Latihan Soal Terbimbing 5.3, sehingga diperoleh:

$$b(5;15;0,4) = \binom{15}{5} \left(\frac{4}{10}\right)^5 \left(\frac{6}{10}\right)^{15-5} = \binom{15}{5} \left(\frac{4}{10}\right)^5 \left(\frac{6}{10}\right)^{10} = \frac{15!}{5!(15-5)!} \cdot \left(\frac{4}{10}\right)^5 \left(\frac{6}{10}\right)^{10}.$$

$$b(5;15;0,4) = \frac{15!}{5!(15-5)!} \left(\frac{4^5 6^{10}}{10^{15}}\right) = 0,186.$$

Jadi, peluang tepat 5 orang yang sembuh dari 15 penderita adalah 0,186.

2. Nilai Harapan Distribusi Binomial

Guru mengarahkan peserta didik untuk memahami nilai harapan distribusi binomial dengan melengkapi kalimat terbuka yang tersedia. Guru mengajak peserta didik untuk belajar secara mandiri, teliti, dan penuh kesungguhan.

Nilai harapan distribusi binomial pada dasarnya ditentukan oleh berbagai macam peristiwa yang dihasilkan dari percobaan binomial, terutama peluang keberhasilan p atau kegagalannya q . Misalkan hasil percobaan ke- n dinyatakan variabel acak I_n dengan peluang keberhasilan $I_n = 1$ dan peluang kegagalan $I_n = 0$. Dalam percobaan binomial, banyaknya keberhasilan dituliskan sebagai jumlah n variabel randomacak bebas:

$$X = I_1 + I_2 + \dots + I_n$$

Nilai harapan setiap I_n adalah $E(I_n) = 1(p) + 0(q) = p$ sehingga nilai harapan suatu populasi distribusi binomial dapat dinyatakan sebagai perkalian n percobaan dengan peluang percobaan.

$$E(X) = E(I_1) + E(I_2) + \dots + E(I_n)$$

$$E(X) = \underbrace{\dots + \dots + \dots + \dots}_{\text{suku}}$$

$$E(X) = \dots$$



Ayo Mencoba

Pada kegiatan Ayo Mencoba, guru dapat menggunakan kelompok yang sudah dibentuk pada kegiatan sebelumnya. Guru dapat menggunakan beberapa contoh seperti Contoh Soal 5.5. Peserta didik secara berkelompok memecahkan masalah pada Latihan Soal Terbimbing 5.5 dan 5.6. Apabila jumlah kelompok yang dibentuk lebih dari 2 kelompok, guru dapat menambahkan bentuk masalah dengan mengadaptasi latihan soal terbimbing. Setelah selesai mendiskusikan masalah, perwakilan kelompok dapat mempresentasikan hasil diskusi.

Latihan Soal Terbimbing 5.5

Tentukan nilai harapan untuk mendapatkan 3 sisi angka dalam 6 kali pelemparan sebuah uang logam!

Alternatif Penyelesaian:

Nilai harapan untuk mendapatkan 3 sisi angka dalam 6 kali pelemparan sebuah uang logam dapat ditentukan dengan formula $E(X) = np = 6 \left(\frac{1}{2}\right) = 3$. Jadi, nilai harapannya adalah 3.

Latihan Soal Terbimbing 5.6

Diasumsikan peluang seseorang sembuh dari Covid-19 tanpa penyakit bawaan adalah 80%. Apabila 40 orang tanpa penyakit bawaan terpapar Covid-19 diketahui menderita penyakit ini, berapa nilai harapan sembuh?

Alternatif Penyelesaian:

$E(X) = np = 40(0,80) = 32$. Jadi nilai harapan sembuh adalah 32.



Ayo Berdiskusi

Pada aktivitas Ayo Berdiskusi, guru membagi peserta didik menjadi beberapa kelompok yang terdiri dari 3-4 peserta didik. Guru mengajak peserta didik untuk memperhatikan “UMKM batik Besurek”. Setiap kelompok bekerjasama menyelesaikan masalah berikut:

- berapakah peluang kegagalan mencanting satu kain batik?
- tentukan peluang kegagalan mencanting per hari!

Alternatif Penyelesaian:

Permasalahan di atas, merupakan permasalahan kejadian binomial karena memiliki dua kemungkinan yaitu gagal dan sukses, dan dilakukan secara berulang.

- Peluang kegagalan mencanting satu kain batik dapat dicari dengan cara sebagai berikut. Mencanting satu kain batik dikatakan gagal jika terdapat satu pegawai yang melakukan kesalahan dalam proses mencanting, sehingga peluang kegagalannya adalah $\frac{1}{3} = 0,33$.
- Peluang kegagalan mencanting batik per hari dapat dicari menggunakan fungsi distribusi binomial berikut:

$$b(x;n,p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \text{ untuk } x = 0,1,2,\dots,n$$

Peluang kegagalan mencanting batik pada hari ke-1.

Karena hasil mencanting sebanyak 10 kain, maka tidak terjadi kegagalan mencanting artinya $x = 0$, sehingga

$$P(0) = \binom{10}{0} (0,33)^0 (0,67)^{10-0} = 0,67^{10} = 0,0182283780455 = 0,018.$$

Dengan cara yang sama, akan diperoleh rincian seperti pada Tabel 5.3.

Tabel 5.3. Peluang Kegagalan Mencanting

Hari Ke	Hasil Mencanting	Peluang Kegagalan
1	10	0,018
2	7	0,261
3	9	0,089
4	10	0,018
5	8	0,198
6	7	0,261



Ayo Mencoba

Pada kegiatan ini, peserta didik menyelesaikan masalah yang ada di Latihan Soal 5.2.

Latihan Soal 5.2

1. Temukanlah probabilitas bahwa pada pelemparan sekeping mata uang yang seimbang tiga kali muncul
 - a. 3 angka rupiah.
 - b. 3 gambar.

Alternatif Penyelesaian:

Menentukan probabilitas bahwa pada pelemparan sekeping mata uang yang seimbang tiga kali muncul apabila

a. 3 angka rupiah $b(3;3,\frac{1}{2}) = \binom{3}{3} (\frac{1}{2})^3 (\frac{1}{2})^0 = \frac{1}{8}$.

Jadi probabilitas bahwa pada pelemparan sekeping mata uang yang seimbang tiga kali muncul apabila muncul 3 angka rupiah adalah $\frac{1}{8}$.

b. 3 gambar $b(3;3,\frac{1}{2}) = \binom{3}{3} (\frac{1}{2})^3 (\frac{1}{2})^0 = \frac{1}{8}$.

Jadi, probabilitas bahwa pada pelemparan sekeping mata uang yang seimbang tiga kali muncul apabila muncul 3 gambar adalah $\frac{1}{8}$.

2. Keberhasilan memukul bola seorang pemain baseball sebesar 0,250. Berapa peluang dan nilai harapan ia berhasil tepat memukul sekali dalam 5 kesempatan berikutnya?

Alternatif Penyelesaian:

Peluang dan nilai harapan pemain baseball berhasil tepat memukul sekali dalam 5 kesempatan adalah $b(1;5, \frac{25}{100}) = \binom{5}{1} (\frac{25}{100})^1 (\frac{25}{100})^{5-1} = 0,3955$.

Jadi, peluang ia berhasil tepat memukul sekali dalam 5 kesempatan berikutnya adalah 0,3955.

3. Peluang seorang bayi belum divaksinasi rubela adalah 0,2. Suatu hari, terdapat 6 bayi di posyandu. Tentukan peluang bahwa 4 dari 6 bayi belum divaksinasi rubela!

Alternatif Penyelesaian:

Jadi peluang 4 dari 6 bayi yang belum diimunisasi rubela adalah $b(4;6;0,2) = \binom{6}{4} (0,2)^4 (0,8)^{6-4} = 0,0153$.

4. Sebuah survei menyatakan bahwa satu dari lima orang mengatakan mereka menemui dokter dalam waktu yang tidak ditentukan. Jika 10 orang dipilih secara acak, berapa peluang bahwa tiga dari mereka pergi ke dokter dalam sebulan terakhir?

Alternatif Penyelesaian:

Jadi peluang tiga dari 10 orang yang sudah mengunjungi dokter dalam sebulan terakhir adalah $b(3;10, \frac{1}{5}) = \binom{10}{3} (\frac{1}{5})^3 (\frac{1}{5})^{10-3} = 0,201$.

5. Peluang seorang mahasiswa menyelesaikan studi pada sebuah universitas adalah 0,9. Jika terdapat 5 mahasiswa,
- tentukan peluang bahwa tidak ada mahasiswa yang menyelesaikan studi!
 - tentukan peluang bahwa hanya satu mahasiswa yang menyelesaikan studi
 - tentukan peluang paling sedikit satu mahasiswa yang menyelesaikan studi!
 - tentukan peluang semua mahasiswa menyelesaikan studi!

Alternatif Penyelesaian:

Peluang seorang mahasiswa menyelesaikan studi pada sebuah universitas adalah 0,9. Jika terdapat 5 mahasiswa, maka

- Cara untuk menentukan peluang bahwa tidak ada mahasiswa yang menyelesaikan studi, adalah $P(X=0) = \binom{5}{0} (0,9)^0 (0,1)^5 = 0,00001$. Jadi, peluang tidak ada mahasiswa yang menyelesaikan studi adalah 0,00001.
- Cara untuk menentukan peluang bahwa hanya satu mahasiswa yang menyelesaikan studi adalah $P(X=1) = \binom{5}{1} (0,9)^1 (0,1)^4 = 0,00045$. Jadi, peluang hanya satu mahasiswa yang menyelesaikan studi adalah 0,00045.
- Cara untuk menentukan peluang paling sedikit satu mahasiswa yang menyelesaikan studi adalah $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 0,99999$. Jadi, peluang paling sedikit satu mahasiswa yang menyelesaikan studi adalah 0,99999.
- Cara untuk menentukan peluang semua mahasiswa menyelesaikan studi adalah $P(X=5) = \binom{5}{5} (0,9)^5 (0,1)^0 = 0,59049$. Jadi, peluang semua mahasiswa menyelesaikan studi adalah 0,59049.

- Jika melemparkan sepasang dadu seimbang sebanyak 6 kali, maka
 - tentukan peluang memperoleh jumlah mata dadu 9 sebanyak dua kali!
 - tentukan peluang memperoleh jumlah mata dadu 9 paling sedikit dua kali!

Alternatif Penyelesaian:

Jika melemparkan sepasang dadu seimbang sebanyak 6 kali, maka

- Jadi peluang memperoleh mata dadu dengan jumlah 9 sebanyak dua kali adalah

$$P(X = 2) = \binom{6}{2} \left(\frac{1}{9}\right)^2 \left(\frac{8}{9}\right)^{6-2} = 0,116.$$

- Jadi peluang memperoleh jumlah mata dadu 9 paling sedikit dua kali adalah

$$P(X \geq 2) = \binom{6}{2} \left(\frac{1}{9}\right)^2 \left(\frac{8}{9}\right)^4 + \binom{6}{3} \left(\frac{1}{9}\right)^3 \left(\frac{8}{9}\right)^3 + \binom{6}{4} \left(\frac{1}{9}\right)^4 \left(\frac{8}{9}\right)^2 + \binom{6}{5} \left(\frac{1}{9}\right)^5 \left(\frac{8}{9}\right)^1 + \binom{6}{6} \left(\frac{1}{9}\right)^6 \left(\frac{8}{9}\right)^0.$$

$$P(X \geq 2) = \frac{61440}{531441} + \frac{10240}{531441} + \frac{960}{531441} + \frac{48}{531441} + \frac{1}{531441} = 0,137.$$

7. Seorang pesulap melakukan aksi sulapnya di hadapan penonton dengan membagikan 4 amplop berisi kertas kosong yang harus diisi angka yang dipilih oleh penonton. Amplop tersebut kemudian dikumpulkan kembali dan pesulap berusaha menebak satu angka pilihan penonton dengan benar. Pesulap sukses melaksanakan aksinya jika semua angka pilihan penonton berhasil ditebak dengan benar.
- berapakah peluang pesulap tersebut sukses melaksanakan aksinya?
 - tentukan nilai harapan pesulap tersebut menebak angka dengan benar!

Alternatif Penyelesaian:

Pesulap dapat sukses melaksanakan aksinya jika semua angka pilihan penonton berhasil ditebak dengan benar.

- a. Peluang pesulap tersebut sukses melaksanakan aksinya adalah

$$P(X = 4) = \binom{4}{4} \left(\frac{1}{10}\right)^4 \left(\frac{9}{10}\right)^{4-4} = \left(\frac{4!}{4!0!}\right) \left(\frac{1}{10000}\right) (1) = 0,0001.$$

Jadi, peluang berhasilnya seorang pesulap menebak semua angka dengan benar apabila pesulap membagikan 4 amplop kepada penonton adalah 0,0001.

- b. Nilai harapan pesulap tersebut menebak angka dengan benar adalah

$$E(X) = np = (4) \left(\frac{1}{10}\right) = \frac{4}{10}.$$

Jadi, nilai harapan pesulap menebak angka dengan benar adalah $\frac{4}{10}$.

C. Distribusi Normal

Sebelum memulai aktifitas pembelajaran, guru diharapkan melakukan tes diagnostik non kognitif dan tes diagnostik kognitif. Tes diagnostik kognitif dapat dilakukan dengan tanya jawab berkaitan dengan mean atau rata-rata, variansi, dan standar deviasi.



Ayo Mengingat Kembali

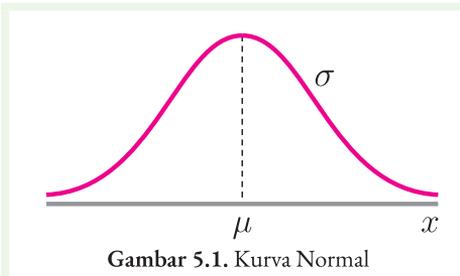
- Mean atau rata-rata suatu dataset adalah angka yang diperoleh dengan mendistribusikan secara merata semua anggota dataset. Kalian dapat menghitung rata-rata dengan menambahkan semua nilai data dan membaginya dengan jumlah total data.
- Varians adalah ukuran dispersi lain yang biasa digunakan untuk menentukan distribusi data. Varians diperoleh dengan mengurangkan setiap data dari mean.
- Standar deviasi atau standar deviasi adalah akar dari varians.



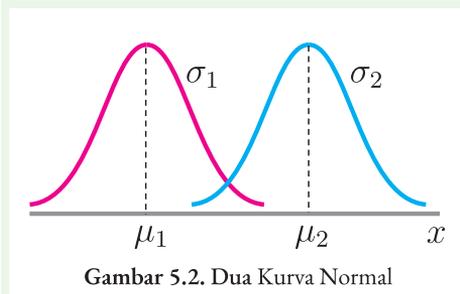
Eksplorasi 5.3

Guru meminta setiap kelompok yang telah dibentuk pada kegiatan Eksplorasi 5.3 untuk menganalisis beberapa kurva normal dan menuliskannya pada Tabel 5.4 yang tersedia. Maksud dari setiap gambar yang ada di buku peserta didik adalah sebagai berikut.

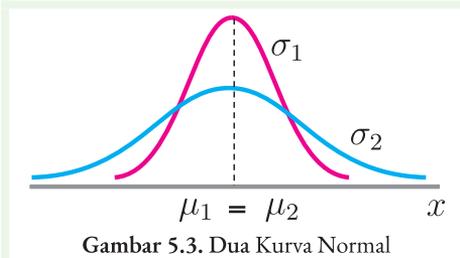
Tabel 5.4 Alternatif Jawaban Kegiatan Eksplorasi 5.4



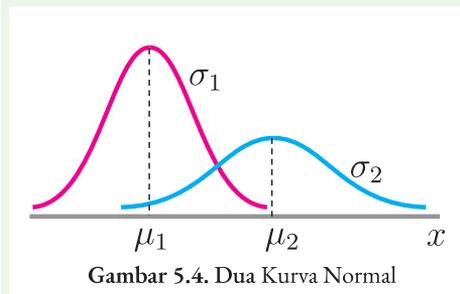
Kurva normal memiliki sebaran peluang yang sangat bergantung pada parameter rataian (μ) dan simpangan baku (σ).



Jika dilihat dengan saksama, maka kedua kurva ini memiliki bentuk yang sama. Hal ini dapat dilihat pada simpangan baku yang sama namun titik tengahnya (rataan) terletak ditempat berbeda disepanjang sumbu- x sehingga $\mu_1 < \mu_2$ dan $\sigma_1 = \sigma_2$.



Jika melihat gambar 5.3, kedua kurva ini memiliki bentuk yang berbeda, hal ini dapat dilihat pada simpangan bakunya namun titik tengahnya (rataan) terletak ditempat yang sama disepanjang sumbu- x sehingga $\mu_1 = \mu_2$ dan $\sigma_1 < \sigma_2$.



Jika dilihat makamelihat Gambar 5.4, kedua kurva ini memiliki bentuk yang berbeda, hal ini dapat dilihat pada simpangan baku dan titik tengahnya (rataan) terletak ditempat yang berbeda disepanjang sumbu- x sehingga $\mu_1 < \mu_2$ dan $\sigma_1 < \sigma_2$.

Selanjutnya, peserta didik diarahkan untuk mendiskusikan hasil yang diperoleh



Ayo Berdiskusi

Kesimpulan yang di peroleh dari kegiatan Eksplorasi 5.3 adalah kurva normal bergantung pada rata-rata (μ) dan simpangan baku (σ).

1. Fungsi Distribusi Normal

Untuk memahami distribusi normal, guru dapat menjelaskan mengenai fungsi distribusi normal dan sifat-sifat kurva normal. Guru dapat menggunakan Contoh Soal 5.6. Selanjutnya, peserta didik mengerjakan Latihan Soal Terbimbing 5.7 dan 5.8. Hasil yang diperoleh peserta didik kemudian menjadi bahan diskusi kelas.



Ayo Mencoba

Latihan Soal Terbimbing 5.7

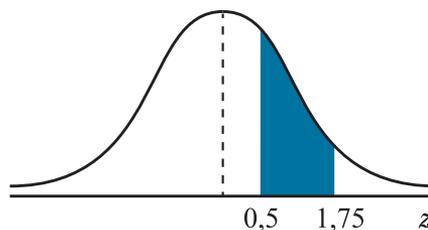
Nilai rata-rata kelas (NMR) siswa yang mengikuti tes matematika harian berdistribusi normal dengan rata-rata 2,1 dan standar deviasi 0,8. Tentukan peluang siswa tersebut memiliki NMR antara 2,5 dan 3,5!

Alternatif Penyelesaian:

Langkah pertama adalah menentukan nilai $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$.

Nilai-nilai z padanan $x_1 = 2,5$ dan $x_2 = 3,5$ adalah $z_1 = \frac{2,5-2,1}{0,8} = 0,5$ dan $z_2 = \frac{3,5-2,1}{0,8} = 1,75$. Selanjutnya, peserta didik menggambarkan kurvanya untuk mengetahui posisi z_1 dan z_2 . Dengan demikian, $P(2,5 < x < 3,5) = P(0,5 < Z < 1,75)$.

Nilai $P(0,5 < Z < 1,75)$ diberikan dioleh daerah gelap dalam Gambar 5.5. Luas ini dapat diperoleh dengan mengurangi luas daerah di sebelah kiri $z = 0,5$ dengan luas daerah di sebelah kiri $z = 1,75$. Guru dapat melihat tabel distribusi normal yang ada pada lampiran buku ini, untuk menentukan luas daerah di sebelah nilai z_1 dan z_2 .



Gambar 5.5. Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(0,5 < Z < 1,75)$

Untuk $z_1 = 0,5$, pada arah menurun kita cari 0,5 dan arah ke kanan kita cari 0,00 diperoleh $P(Z < 0,5) = 0,6915$.

Untuk $z_2 = 1,75$, pada z arah menurun kita cari 1,7 dan arah ke kanan kita cari 0,05 diperoleh $P(Z < 1,75) = 0,9599$, maka

$$P(2,5 < X < 3,5) = P(0,5 < Z < 1,75) = P(Z < 1,75) - P(Z < 0,5).$$

$$P(2,5 < X < 3,5) = 0,9599 - 0,6915 = 0,2684.$$

Jadi, peluang siswa tersebut mencapai NMR antara 2,5 dan 3,5 adalah 0,2684.

Latihan Soal Terbimbing 5.8

Asumsikan berat rata-rata bayi yang baru lahir adalah 3.500 gram dengan simpangan baku 225 gram. Tentukan peluang bayi lahir dengan berat antara 3200 gram dan 4000 gram!

Alternatif Penyelesaian:

Dengan menerapkan cara yang sama pada Latihan Soal Terbimbing 5.7, diperoleh

$$z_1 = \frac{3.200 - 3.500}{225} = -1,33 \text{ dan } z_2 = \frac{4.000 - 3.500}{225} = 2,22.$$

Dengan demikian $P(3.200 < x < 4.000) = P(-1,33 < Z < 2,22)$.

Nilai $P(3.200 < x < 4.000)$ diberikan oleh daerah gelap dalam Gambar 5.6.

Berdasarkan tabel normal baku, diperoleh informasi sebagai berikut.

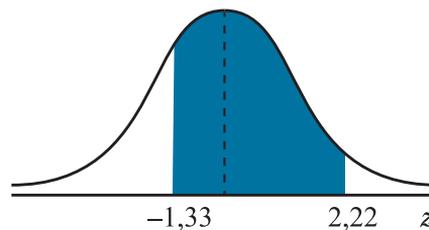
Untuk $z_1 = -1,33$, diperoleh bahwa $P(Z > -1,33) = 0,9082 - 0,5 = 0,4082$.

Untuk $z_2 = 2,22$, diperoleh bahwa $P(Z < 2,22) = 0,9868 - 0,5 = 0,4868$, sehingga $P(3.200 < X < 4.000) = P(-1,33 < Z < 2,22) = P(Z < 2,22) + P(Z > -1,33)$.

$$P(3.200 < X < 4.000) = 0,4868 + 0,4082 = 0,8950.$$

Jadi, peluang bayi lahir dengan berat antara 3.200 gram sampai 4.000 gram adalah 0,8950.

Guru mengarahkan peserta didik untuk membentuk kelompok pada kegiatan Ayo Berpikir Kritis berikut. Setiap kelompok diarahkan untuk menyelesaikan Ayo Berpikir Kritis dan mendiskusikan dengan kelompok lain dengan mencermati Gambar 5.6.



Gambar 5.6. Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(-1,33 < Z < 2,22)$



Ayo Gunakan Teknologi

Kunjungi laman <https://mathcracker.com/standard-normal-distribution-probability-calculator> untuk membantu menggambarkan kurva distribusi normal.

2. Nilai Harapan Distribusi Normal

Secara berkelompok, peserta didik melengkapi langkah-langkah untuk menemukan nilai harapan distribusi normal agar memahami nilai harapan distribusi normal.

Guru dapat memberikan arahan jika peserta didik mengalami kesulitan.

Nilai harapan pada distribusi normal diperoleh dari:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx.$$

Misalkan $t = \frac{x-\mu}{\sigma}$, maka $x = \sigma t + \mu$ dan $dx = \sigma dt$, dan $x^2 = (\sigma t + \mu)^2 = \sigma^2 t^2 + 2\sigma t\mu + \mu^2$.

Dengan menyubstitusikan ke persamaan $E(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$, diperoleh

$$E(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma t + \mu) e^{-\frac{1}{2}t^2} \sigma dt.$$

$$E(X) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-\frac{1}{2}t^2} dt + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-\frac{1}{2}t^2} dt + \mu.$$

Misalkan $z = \frac{1}{2} t^2$ maka $dz = t dt$. Dengan menyubstitusikan $dz = t dt$, diperoleh

$$E(X) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z} dz + \mu = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-z} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \mu = \mu.$$

Guru dapat menggunakan beberapa contoh seperti Contoh Soal 5.5 agar peserta didik lebih memahami nilai harapan distribusi normal. Selanjutnya, peserta didik mengerjakan Latihan Soal Terbimbing 5.9 dan 5.10. Hasil yang diperoleh peserta didik kemudian menjadi bahan diskusi kelas. Guru mengajak peserta didik untuk berpartisipasi aktif dalam diskusi.

Latihan Soal Terbimbing 5.9

Nilai rata-rata kelas (NMR) siswa yang mengikuti tes matematika harian berdistribusi normal dengan rata-rata 2,1 dan standar deviasi 0,8. Tentukan nilai harapan siswa tersebut mencapai NMR 2,7!

Alternatif Penyelesaian:

Nilai harapan siswa tersebut mencapai NMR 2,7 adalah $E(2,7) = 2,1$.

Jadi, nilai harapan bahwa X mengambil sebuah nilai 2,1.

Latihan Soal Terbimbing 5.10

Asumsikan berat rata-rata bayi yang baru lahir adalah 3.500 gram dengan simpangan baku 225 gram. Tentukan nilai harapan bayi lahir dengan berat 3.750 gram!

Alternatif Penyelesaian:

Nilai harapan bayi lahir dengan berat 3.750 gram adalah $E(3.750) = 3.500$.
Jadi, nilai harapan bahwa X mengambil sebuah nilai 3.500.



Ayo Mencoba

Pada kegiatan ini, peserta didik diarahkan untuk menyelesaikan masalah yang ada di Latihan Soal 5.3.

Latihan Soal 5.3

1. Sebuah sekolah memiliki siswa laki-laki dengan berat badan yang berdistribusi normal dengan berat badan rata-rata 61 kg dan simpangan baku 2 kg. Jika seorang guru olahraga akan memilih siswa laki-laki untuk mengikuti lomba gulat antar provinsi yang mengharuskan berat badan peserta lomba di antara 58 kg dan 63 kg, maka tentukan peluang siswa untuk mengikuti lomba gulat berdasarkan berat badannya!

Alternatif Penyelesaian:

Peluang siswa untuk mengikuti lomba gulat berdasarkan berat badannya dapat ditentukan dengan cara sebagai berikut.

$$Z_1 = \frac{X_1 - \mu}{\sigma} = \frac{58 - 61}{2} = -1,5,$$

$$Z_2 = \frac{X_2 - \mu}{\sigma} = \frac{63 - 61}{2} = 1.$$

Peluang berat badan mereka akan berada diantara 58 kg dan 63 kg dinotasikan dengan $P(58 < X < 63) = P(-1,5 < Z < 1)$.

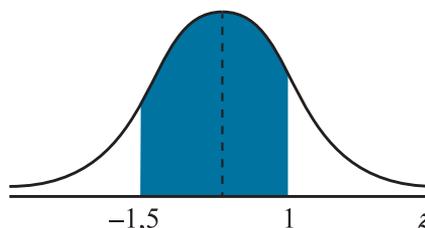
Kurva distribusi normalnya ditunjukkan pada Gambar 5.7.

Dari tabel nilai Z untuk skor 1,5 dan 1 diperoleh $P(-1,5 < Z < 0) = 0,4332$ dan $P(0 < Z < 1) = 0,3413$.

Untuk luas daerah yang diarsir, dituliskan

$$\begin{aligned} P(-1,5 < Z < 1) &= P(-1,5 < Z < 0) + P(0 < Z < 1) \\ &= 0,4332 + 0,3413 = 0,7745. \end{aligned}$$

Jadi, peluang siswa untuk mengikuti lomba gulat berdasarkan berat badannya adalah 0,7745.

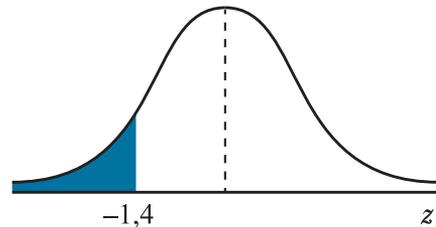


Gambar 5.7. Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(-1,5 < Z < 0)$

2. Baterai otomotif memiliki umur rata-rata 3 tahun dengan standar deviasi 0,5 tahun.
 - a. Tentukan peluang bahwa baterai akan bertahan kurang dari 2,3 tahun!
 - b. Tentukan nilai harapannya!

Alternatif Penyelesaian:

Nilai z untuk jenis baterai otomotif rata-rata berumur 3 tahun dengan simpangan baku 0,5 tahun adalah $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{2,3-3}{0,5} = -1,4$.
Kurva distribusi normalnya ditunjukkan oleh Gambar 5.8.



Gambar 5.8. Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(Z < -1,4)$

- a. Jadi, peluang suatu baterai akan berumur kurang dari 2,3 tahun adalah $P(X < 2,3) = P(Z < -1,4) = 0,0808$.
- b. Jadi nilai harapan adalah $E(X) = \mu$ maka $E(X) = 3$.

3. Sebuah perusahaan elektronik memproduksi bohlam dengan masa pakai terdistribusi normal dengan rata-rata 800 jam dan simpangan baku 40 jam.
 - a. Tentukan peluang bohlam padam antara 778 dan 834 jam!
 - b. Tentukan nilai harapannya!

Alternatif Penyelesaian:

- a. Peluang bohlam dapat menyala antara 778 dan 834 jam dapat ditentukan dengan cara sebagai berikut.

$$Z_1 = \frac{778-800}{40} = -0,55 \text{ dan } Z_2 = \frac{834-800}{40} = 0,85.$$

Kurva distribusi normalnya ditunjukkan oleh Gambar 5.9.

Tabel nilai Z untuk skor $-0,55$ dan $0,85$ adalah

$$P(778 < x < 834) = P(-0,55 < Z < 0,85).$$

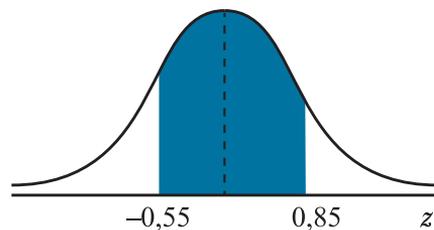
$$P(778 < x < 834) = P(Z < 0,85) - P(Z < -0,55).$$

$$P(778 < x < 834) = 0,8023 - 0,2912 = 0,5111.$$

Jadi, peluang bohlam dapat menyala antara 778 dan 834 jam adalah 0,5111.

- b. Nilai harapan dapat ditentukan dengan cara sebagai berikut.

$(X) = \mu$ maka $E(X) = 800$. Jadi nilai harapannya adalah 800.



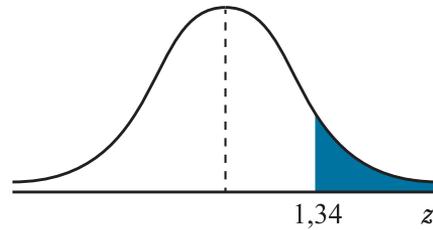
Gambar 5.9. Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(-0,55 < Z < 0,85)$

4. Tinggi rata-rata anjing pudel jenis tertentu adalah 30 cm dan standar deviasinya adalah 4,1 cm.
- Tentukan persentase pudel yang tingginya lebih dari 35 cm !
 - Tentukan peluang harapannya!

Alternatif Penyelesaian:

a. Persentase anjing pudel memiliki tinggi lebih dari 35 cm dapat ditentukan sebagai berikut:

Nilai z tinggi anjing pudel yang melebihi 35 cm adalah $Z = \frac{35,5-30}{4,1} = 1,34$ cm. Kurva distribusi normalnya ditunjukkan oleh Gambar 5.10.



Gambar 5.10. Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(Z > 1,34)$

tabel nilai Z untuk skor 1,34 seperti berikut

$$\begin{aligned} P(X > 35,5) &= P(Z > 1,34). \\ &= 1 - P(Z < 1,34). \\ &= 1 - 0,9099. \\ &= 0,0901. \end{aligned}$$

Jadi persentase anjing pudel jenis tersebut memiliki tinggi lebih dari 35 cm adalah 9%.

b. Cara untuk menentukan nilai harapan adalah sebagai berikut.

$E(X) = \mu$ maka $E(X) = 30$. Jadi nilai harapannya adalah 30.

5. Berdasarkan data dari *game online*, waktu bermain harian pemain berdistribusi normal dengan standar deviasi 37 menit, dan 14% pemain bermain *game online* lebih dari 230 menit setiap hari. Tentukan rata-ratanya!

Alternatif Penyelesaian:

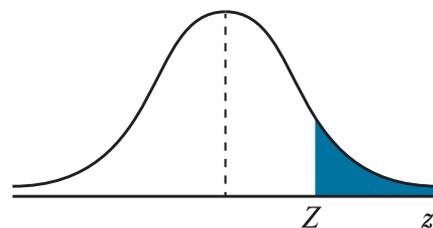
Diketahui z harus bernilai positif karena $0,14 < 0,50$.

Dapat dituliskan

$$\begin{aligned} P(Z > z) &= P(Z > 0) - P(0 < Z < z). \\ 0,14 &= 0,5 - P(0 < Z < z). \end{aligned}$$

$$P(0 < Z < z) = 0,36.$$

Dari tabel Z diperoleh bahwa skor $z = 1,08$ (dibulatkan).



Gambar 5.11. Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(Z > z)$

Mencari nilai rata-rata μ

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$1,08 = \frac{230 - \mu}{37}$$

$$\mu = 230 - (1,08 \times 37)$$

$$\mu = 230 - 39,96 = 190,04$$

Jadi, rata-rata pemain bermain *game online* tersebut adalah 190,04.

6. Mesin minuman ringan diatur untuk mengeluarkan rata-rata 200 milimeter per cangkir. Bila banyaknya minuman yang dikeluarkan itu menyebar normal dengan simpangan baku 15 milimeter.
- Berapa banyak cangkir (dalam persentase) yang berisi lebih dari 224 milimeter?
 - Berapa peluang sebuah cangkir berisi antara 191 dan 209 milimeter?
 - Berapa cangkir diantara 1000 cangkir berikutnya yang akan tumpah meluap bila cangkir-cangkir itu berukuran 230 milimeter?

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan X adalah variabel acak yang menyatakan banyaknya air yang dikeluarkan oleh mesin, maka $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 200}{15}$.

- a. Menentukan banyak cangkir (dalam persentase) yang berisi lebih dari 224 milimeter adalah sebagai berikut.

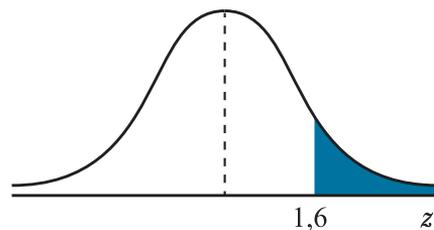
$$Z = \frac{224 - 200}{15} = 1,6$$

Cek tabel nilai Z .

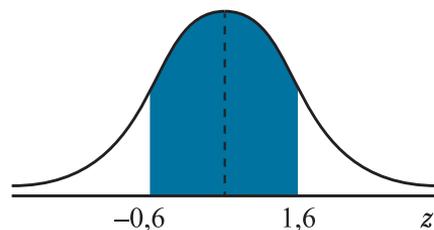
$$\begin{aligned} P(X > 224) &= P(Z > 1,6) \\ &= 1 - P(Z < 1,6) \\ &= 1 - 0,4452 \\ &= 0,5548 \end{aligned}$$

Jadi, banyak cangkir (dalam persentase) yang berisi lebih dari 224 milimeter adalah 55%.

- b. Menentukan peluang sebuah cangkir berisi antara 191 dan 209 milimeter adalah sebagai berikut.



Gambar 5.12. Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(Z > 1,6)$



Gambar 5.13. Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(-0,6 \leq Z \leq 0,6)$

$$Z_1 = \frac{191-200}{15} = -0,6 \text{ dan } Z_2 = \frac{209-200}{15} = 0,6.$$

Dari tabel nilai Z diperoleh

$$\begin{aligned} P(191 \leq X \leq 209) &= P(191 < X \leq 0) + P(0 < X \leq 209). \\ P(191 \leq X \leq 209) &= P(-0,6 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 0,6). \\ &= 0,2257 + 0,2257 = 0,4514. \end{aligned}$$

Jadi, peluang sebuah cangkir berisi antara 191 dan 209 milimeter adalah 0,4514.

c. Menentukan cangkir diantara 1000 cangkir berikutnya yang akan tumpah meluap bila cangkir-cangkir itu berukuran 230 milimeter adalah sebagai berikut.

$$Z = \frac{230-200}{15} = 2.$$

Untuk mengecek tabel nilai Z

$$\begin{aligned} P(X \geq 230) &= 1 - P(X \leq 230). \\ &= 1 - P(Z \leq 2). \\ &= 1 - 0,97772. \\ &= 0,0228. \end{aligned}$$

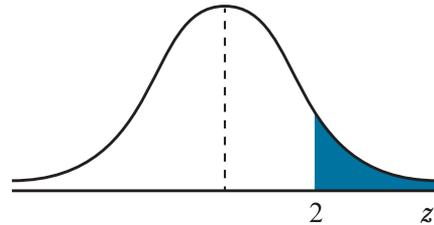
Jadi, jumlah cangkir yang akan tumpah adalah $1000 \times 0,0228 = 22,8 \approx 23$.

d. Menentukan banyaknya mendapatkan 25% cangkir-cangkir yang berisi sedikit adalah sebagai berikut

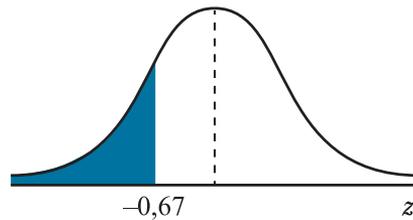
$P(Z < z) = 0,25$. Dari tabel distribusi z diperoleh $z = -0,67$.

$$\begin{aligned} Z &= \frac{X-\mu}{\sigma} \\ -0,67 &= \frac{X-200}{15} \\ (-0,67)(15) &= X-200. \\ -10,05 &= X-200. \\ X &= 189,95. \end{aligned}$$

Jadi, akan mendapatkan 25% cangkir-cangkir yang berisi sedikit adalah 189,95.



Gambar 5.14. Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(Z > 2)$



Gambar 5.15. Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(Z < -0,67)$

7. Skor IQ dari 600 calon mahasiswa di sebuah universitas berdistribusi normal dengan rata-rata 115 dan standar deviasi 12. Jika perguruan tinggi membutuhkan skor IQ minimal 95, tentukan berapa banyak siswa yang akan ditolak atas dasar ini, terlepas dari kualifikasi mereka yang lain!

Alternatif Penyelesaian:

Menentukan banyaknya mahasiswa yang akan ditolak tanpa memperhatikan kualifikasi mereka yang lain adalah sebagai berikut.

$$Z = \frac{230-200}{15} = 2. \text{ Perhatikan Gambar 5.16}$$

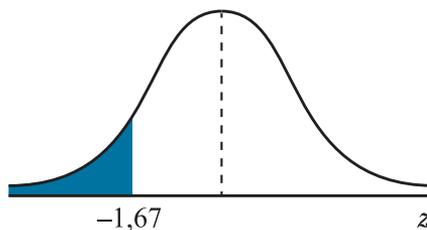
Cek tabel nilai Z

$$P(X < 95) = P(Z < -1,67) = 0,0475 = 4,75\%.$$

Jadi, peluang mahasiswamahasiswa yang akan ditolak adalah

$$P = P(X < 95) \times n = \frac{4,75}{100} \times 600 = 28,5.$$

Jadi, banyaknya calon mahasiswa yang akan ditolak tanpa memperhatikan kualifikasi yang lain adalah antara 28 orang sampai 29 orang.



Gambar 5.16. Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(Z < -1,67)$

8. Dua peserta didik diberitahu bahwa mereka memperoleh nilai baku masing-masing 0,8 dan $-0,4$ pada suatu ujian pilihan ganda pada mata pelajaran matematika. Jika nilainya masing-masing adalah 88 dan 64, tentukan rerata dan nilai baku dari nilai ujian!

Alternatif Penyelesaian:

Dengan menggunakan persamaan $X = \mu + z\sigma$, untuk peserta didik pertama (1) $88 = \mu + 0,8\sigma$, untuk peserta didik kedua (2) $64 = \mu - 0,4\sigma$. Jawaban (1) dan (2), menghasilkan nilai tengah $\mu = 72$ dan simpangan baku $\sigma = 20$.

Jadi, nilai tengah $\mu = 72$ dan simpangan baku $\sigma = 20$.



Interaksi Guru dengan Orang Tua

Guru memberitahukan kepada peserta didik, bahwa mereka belajar di rumah untuk mengerjakan tugas pada Buku Siswa Latihan Soal 5.1 sampai Latihan Soal 5.3 dan Uji Kompetensi bersama orang tua atau wali murid. Guru memberi tahu orangtua atau wali murid untuk mengingatkan, membimbing, dan mengawasi putra-putrinya untuk mengerjakan tugas di rumah, serta memberi paraf pada hasil kerjanya. Dijelaskan pula bahwa yang harus dilakukan orang tua adalah membimbing, bukan mengerjakan tugas. Interaksi ini dapat dilakukan melalui pertemuan, sms, telepon, grup media sosial, atau buku penghubung. Jika orang tua belum jelas cara membimbingnya dipersilakan menghubungi guru.

Uji Kompetensi

1. Dalam suatu organisasi terdapat ketua, wakil ketua, sekretaris, dan bendahara. Tentukan peluang seragam terpilihnya 4 orang dari 6 orang kandidat!

Alternatif Penyelesaian:

Cara untuk menentukan peluang seragam terpilihnya 4 orang dari 6 orang kandidat adalah sebagai berikut: $f(x;15) = \frac{1}{15}$ untuk $x = 1,2,3,\dots,15$.

Jadi, peluang terpilihnya 64 orang yang akan dipilih 4 dari 6 orang secara randomacak adalah $\frac{1}{15}$.

2. Tentukan peluang bahwa dalam sebuah keluarga dengan 4 anak terdapat:
 - a. paling sedikit satu anak laki-laki!
 - b. paling sedikit satu anak laki-laki dan satu anak perempuan!

Alternatif Penyelesaian:

- a. menentukan peluang paling sedikit satu anak laki-laki.
 p adalah peluang sukses, dikatakan sukses apabila memiliki anak laki-laki dengan peluang memiliki satu anak laki-laki adalah $\frac{1}{2}$. Jika X adalah kejadian memiliki anak laki-laki, maka dengan distribusi binomial diperoleh.

$$P(X = 1) = \binom{4}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4} \quad P(X = 3) = \binom{4}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{4}$$

$$P(X = 2) = \binom{4}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8} \quad P(X = 4) = \binom{4}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{16}, \text{ maka}$$

$$P(X \geq 1) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4).$$

$$P(X \geq 1) = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}.$$

Jadi, peluang terdapat paling sedikit satu anak laki-laki adalah $\frac{15}{16}$.

- b. Menentukan peluang paling sedikit satu anak laki-laki dan satu anak perempuan (misalkan P). $P = 1 - P(\text{tanpa laki-laki}) - P(\text{tanpa perempuan}) = 1 - \frac{1}{16} - \frac{1}{16} = \frac{7}{8}$.
Peluang terdapat paling sedikit satu anak laki-laki dan satu anak perempuan $\frac{7}{8}$.

3. Di suatu kecamatan terdiri dari antara 2000 kepala keluarga. Diketahui masing-masing keluarga memiliki 4 orang anak:
 - a. Tentukan harapan memiliki anak paling sedikit satu laki-laki!
 - b. Tentukan harapan memiliki dua anak laki-laki!
 - c. Tentukan harapan memiliki satu atau dua anak perempuan!
 - d. Tentukan harapan tidak memiliki anak perempuan!

Alternatif Penyelesaian:

Diketahui terdapat 2000 keluarga dengan masing-masing 4 orang anak.

- Harapan keluarga dengan paling sedikit 1 anak laki-laki = $2000 \frac{4,75}{100} = 1875$.
- Harapan banyaknya keluarga dengan 2 anak laki-laki adalah $2000 \times P(2 \text{ laki-laki}) = 2000 \left(\frac{1}{8}\right) = 750$.
 $P(1 \text{ atau } 2 \text{ perempuan}) = P(1 \text{ perempuan}) + P(2 \text{ perempuan})$.
 $P(1 \text{ atau } 2 \text{ perempuan}) = P(1 \text{ laki-laki}) + P(2 \text{ laki-laki}) = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$.
- Harapan banyaknya keluarga dengan 1 atau 2 perempuan = $2000 \left(\frac{5}{8}\right) = 1250$.
- Harapan banyaknya keluarga tanpa perempuan = $2000 \left(\frac{1}{16}\right) = 125$.

- Dari 200 siswa yang mengikuti ujian matematika di suatu sekolah, rata-rata skornya adalah 60 dan simpangan bakunya adalah 10. Jika distribusi skornya normal, maka
 - tentukan persentase siswa yang mendapat A, jika nilai ≥ 80 !
 - tentukan persentase siswa yang mendapat nilai C, jika nilai C terletak pada interval $56 \leq C \leq 68$!
 - tentukan persentase siswa yang mendapat nilai E jika nilai < 45 !
 - tentukan nilai harapannya!

Alternatif Penyelesaian:

- menentukan persentase siswa yang mendapat A jika nilai ≥ 80 adalah sebagai berikut.

$$Z = \frac{80-60}{10} = 2.$$

Perhatikan Gambar 5.17,

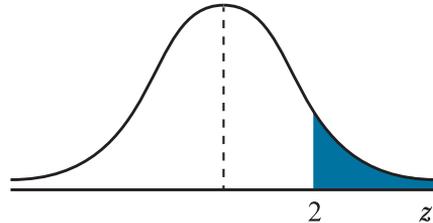
$$\begin{aligned} P(X \geq 80) &= P(Z \geq 2). \\ &= 1 - 0,9772. \\ &= 0,0228 = 2,28\%. \end{aligned}$$

Jadi persentase siswa yang mendapat A adalah 2,28%.

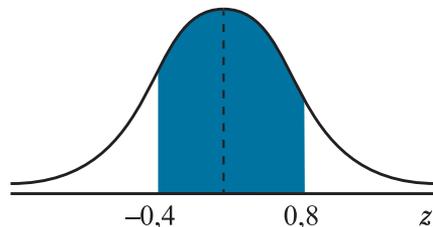
- Menentukan persentase siswa yang mendapat nilai C, jika nilai C terletak pada interval $56 \leq C \leq 68$ adalah sebagai berikut.

$$Z_1 = \frac{56-60}{10} = -0,4 \text{ dan } Z_2 = \frac{68-60}{10} = 0,8.$$

Perhatikan Gambar 5.18,



Gambar 5.17. Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(Z \geq 2)$



Gambar 5.18. Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(-0,4 \leq Z \leq 0,8)$

$$\begin{aligned}
 P(56 \leq X \leq 68) &= P(-0,4 \leq Z \leq 0,8) \\
 &= P(Z < 0,8) - P(Z < -0,4) \\
 &= 0,4435 = 44,35\%.
 \end{aligned}$$

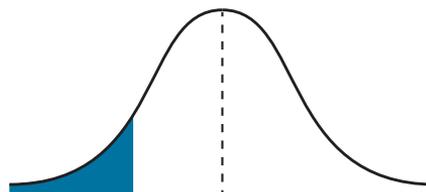
Jadi persentase siswa yang mendapat C adalah 44,35%.

- c. Menentukan persentase siswa yang mendapat nilai E jika nilai < 45 adalah sebagai berikut.

$$Z = \frac{45-60}{10} = -1,5,$$

Perhatikan Gambar 5.19

$$\begin{aligned}
 P(X \leq 45) &= P(Z \leq -1,5) \\
 &= 0,0688 \\
 &= 6,68\%.
 \end{aligned}$$



Gambar 5.19. Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(Z \leq -1,5)$

Jadi persentase siswa yang mendapat nilai E adalah 6,68%.

- d. Jadi nilai harapannya adalah $E(X) = 60$.

5. Nilai rata-rata ujian mata pelajaran matematika adalah 60 dengan variansi 64. Ditentukan bahwa peserta ujian memperoleh nilai A jika nilai minimal 80. Peserta ujian akan mendapat nilai B jika nilai paling sedikit 65 dan kurang dari 80. Peserta harus mengikuti ujian perbaikan jika nilainya kurang dari 65. Bila distribusi nilai ujian ini mendekati distribusi normal dan seorang peserta dipilih secara acak.
- Tentukan peluang bahwa peserta itu memperoleh nilai A!
 - Tentukan peluang bahwa peserta itu memperoleh nilai B!
 - Tentukan peluang bahwa peserta itu harus ikut ujian perbaikan!

Alternatif Penyelesaian:

- a. Menentukan peluang peserta yang dipilih memperoleh nilai A adalah sebagai berikut.

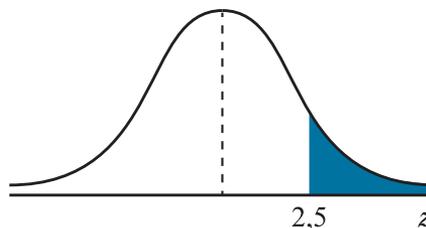
Nilai A didapatkan jika nilai peserta yaitu $X \geq 80$.

Ambil $X = 80$ sehingga diperoleh

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{80-60}{8} = \frac{5}{2} \approx 2,50.$$

Perhatikan Gambar 5.20,

Dengan demikian, diperoleh



Gambar 5.20. Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(Z > 2,50)$

$$\begin{aligned}
P(X \geq 80) &= P(X > 80). \\
&= P(Z > 2,50). \\
&= P(Z > 0) - P(0 < Z < 2,50). \\
&= 0,5 - 0,4938 = 0,0062.
\end{aligned}$$

Jadi, peluang peserta yang dipilih memperoleh nilai A adalah 0,0062.

- b. Menentukan peluang peserta yang dipilih memperoleh nilai B adalah sebagai berikut.

Nilai B didapatkan jika nilai peserta berada pada interval $65 < X < 80$.

Ambil $X_1 = 65$ sehingga diperoleh

$$Z_2 = \frac{X_2 - \mu}{\sigma} = \frac{80 - 60}{8} = \frac{5}{2} \approx 2,50.$$

Dengan demikian, diperoleh

$$\begin{aligned}
P(65 < X < 80) &= P(65 < X < 80). \\
&= P(0,63 < Z < 2,50).
\end{aligned}$$

$$P(65 < X < 80) = P(0 < Z < 2,50) - P(0 < Z < 0,63).$$

$$\begin{aligned}
P(65 < X < 80) &= 0,4938 - 0,2357. \\
&= 0,2581.
\end{aligned}$$

Jadi, peluang peserta yang dipilih memperoleh nilai B adalah 0,2581.

- c. Menentukan peluang peserta yang dipilih mengikuti ujian perbaikan adalah sebagai berikut.

Nilai peserta yang mengikuti ujian perbaikan yaitu $X < 65$.

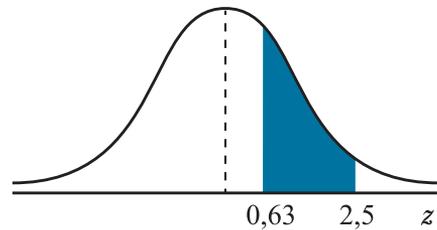
Ambil $X_1 = 65$ sehingga diperoleh

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{65 - 60}{8} = \frac{5}{8} \approx 0,63.$$

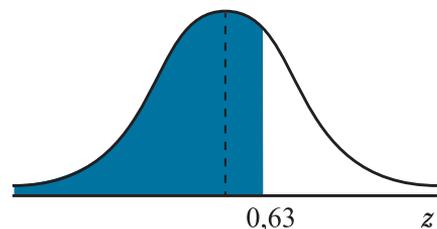
Seperti dalam Gambar 5.22

$$\begin{aligned}
P(X < 65) &= P(Z < 0,63). \\
&= P(Z < 0) + P(0 < Z < 0,63). \\
&= 0,5 + 0,2357. \\
&= 0,7357.
\end{aligned}$$

Jadi, peluang peserta yang dipilih mengikuti ujian perbaikan adalah 0,7357.



Gambar 5.21. Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(0,63 < Z < 2,50)$

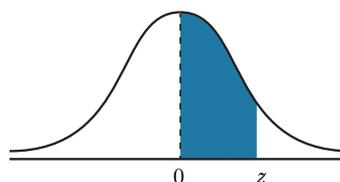


Gambar 5.22. Luas Daerah Distribusi Normal untuk $P(Z < 0,63)$

Tabel 5.5

Lampiran Tabel Distribusi Normal z

Kumulatif sebaran frekuensi normal

(Area di bawah kurva normal baku dari 0 sampai z)

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998
3.5	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998
3.6	0.4998	0.4998	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.7	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.8	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.9	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000

Glosarium

asimtot

sebuah garis yang sedemikian rupa sehingga jarak antara kurva dan garis tersebut mendekati nol seiring x atau y (salah satu atau keduanya) mendekati tak hingga.

aturan rantai

kaidah menurunkan suatu fungsi komposisi.

bentuk tak tentu

bentuk tak tentu meliputi $0/0$, ∞/∞ , $\infty \pm \infty$, 0^0 , ∞^∞ .

cosinus

cosinus suatu sudut dalam segitiga siku-siku adalah perbandingan antara sisi yang berseberangan dengan sudut itu terhadap hipotenusa.

distribusi binomial

distribusi suatu fungsi peluang dari n kali percobaan yang menghasilkan 2 peluang yang saling bebas yang bernilai tetap dalam setiap percobaan.

distribusi normal

distribusi peluang kontinu yang penting dalam analisis statistik parametrik.

elips

himpunan titik-titik yang jaraknya terhadap dua titik tertentu selalu sama, kedua titik tertentu tersebut adalah titik fokus.

fungsi aljabar

fungsi yang terdiri dari fungsi polinomial, fungsi rasional, dan fungsi akar.

fungsi distribusi

suatu fungsi yang berhubungan dengan peluang suatu kejadian yang terdefiniskan dalam variable randomacak.

fungsi kontinu

fungsi yang terdefinisi dalam domainnya dan mempunyai limit yang bernilai sama dengan nilai fungsinya.

fungsi peluang

suatu fungsi yang berhubungan dengan peluang suatu kejadian dengan syarat nilai fungsinya tak negatif dan fungsi kumulatifnya sama dengan 1.

fungsi trigonometri

fungsi yang terdiri dari bentuk trigonometri seperti sinus, cosinus, tangen dan sebagainya.

garis direktris

garis arah

garis singgung

garis lurus yang menyinggung sebuah kurva pada sebuah titik.

hiperbola

sebuah kurva yang terbentuk dari perpotongan dua kerucut yang saling berhadapan dengan sebuah bidang yang memotong setengah dari kerucut tersebut

integral

antiturunan.

jumlahan *reimann*

salah satu cara menentukan integral tentu.

kedudukan garis

kedudukan suatu garis terhadap lingkaran (menyinggung, memotong, tidak menyinggung dan tidak memotong).

kedudukan titik

kedudukan suatu titik terhadap lingkaran (di luar, di dalam, dilalui).

kejadian

kumpulan dari satu atau lebih hasil suatu percobaan.

kemiringan

koefisien arah suatu garis lurus.

latus rectum

garis yang melalui titik fokus dan tegak lurus dengan sumbu mayor pada elips.

limit

pendekatan.

lingkaran

tempat kedudukan titik-titik yang jaraknya sama terhadap titik pusat.

nilai maksimum

nilai fungsi saat mencapai titik maksimum.

nilai minimum

nilai fungsi saat mencapai titik minimum.

parabola

tempat kedudukan titik-titik yang jaraknya selalu sama terhadap titik fokus, dan garis direktriks.

peluang

suatu nilai yang menyatakan kemungkinan terjadinya suatu kejadian

persamaan

kalimat matematika yang dihubungkan dengan tanda sama dengan (=).

ruang sampel

himpunan semua hasil yang mungkin dari suatu percobaan.

sinus

sinus suatu sudut merupakan perbandingan antara sisi yang berhadapan dengan sudut dengan hipotenusa pada segitiga siku-siku.

sumbu fokal

garis lurus yang menghubungkan kedua titik fokus elips.

sumbu mayor

diameter terpanjang elips, yaitu garis yang melalui pusat dan kedua fokus elips dan berakhir pada titik terjauh elips terhadap pusatnya.

sumbu minor

diameter terpendek elips, yaitu garis yang melalui pusat dan kedua fokus

elips dan berakhir pada titik terdekat elips terhadap pusatnya.

tangen

tangen suatu sudut merupakan perbandingan antara sisi yang berhadapan dengan sudut dengan sisi yang berseberangan dengan sudut itu pada segitiga siku-siku.

titik balik maksimum

salah satu titik stasioner dengan ciri kurva cekung ke bawah sehingga pada titik tersebut kurva berubah dari naik menjadi turun.

titik balik minimum

salah satu titik stasioner dengan ciri kurva cekung ke atas sehingga pada titik tersebut kurva berubah dari turun menjadi naik.

titik belok

salah satu titik stasioner yang mengakibatkan adanya perubahan kurva dari cekung ke atas menjadi cekung ke bawah atau sebaliknya.

titik potong

suatu titik hasil perpotongan garis atau kurva.

titik stasioner

suatu titik yang berhenti dari naik atau turun, disebut juga titik diam.

turunan

laju perubahan nilai suatu fungsi terhadap variabelnya atau peubahnya.

uji turunan

salah satu pengujian turunan pertama dan kedua dalam aplikasi turunan.

variabel acak

suatu fungsi yang memetakan setiap titik pada ruang sampel terhadap bilangan real.

variabel

karakteristik yang menunjukkan variasi atau sesuatu yang nilainya berubah-ubah.

Daftar Pustaka

- Anggraena, Y., Valentino, E., & Utami, W. B. 2019. *Mozaik Matematika 2: Buku Pengayaan dan Penilaian SMA/MA kelas XI Program Wajib*. Yogyakarta: Yudhistira.
- Anggraena, Y., Valentino, E., & Utami, W. B. 2019. *Mozaik Matematika 3: Buku Pengayaan dan Penilaian SMA/MA kelas XI Program Wajib*. Yogyakarta: Yudhistira.
- Anggraena, Y., & Utami, W. B. 2019. *Mozaik Matematika SMA/MA kelas XII Peminatan MIPA*. Yogyakarta: Yudhistira.
- Ayers, F., & Ault. 1990. *Kalkulus edisi kedua* (Alih bahasa Lea Prasetio). Jakarta: Erlangga.
- Baisuni, H. 2005. *Kalkulus*. Jakarta: Universitas Indonesia.
- Danuri, M. 2008. *Pembelajaran Lingkaran SMA dengan Geometri Analitik*. Yogyakarta: P4TK Matematika.
- Diana, R., & Rory, R. 2019. *Estimasi Rata-Rata Lama Sekolah Tingkat Kecamatan Di Kabupaten Padang Pariaman Dengan Metode Empirical Best Linear Unbiased Predictor*. In Seminar Nasional Official Statistics (Vol. 2019, No. 1, pp. 110-116).
- Diana, R., & Rory, R. 2020. *Pemodelan Kasus Covid-19 Menggunakan Model Regresi Nonparametrik*. In Seminar Nasional Official Statistics (Vol. 2020, No. 1, pp. 108-115).
- Ekawati, A. 2016. *Penggunaan Software Geogebra dan Microsoft Mathematic dalam Pembelajaran Matematika*. Math Didactic: Jurnal Pendidikan Matematika, 2(3), 148-153.
- Gunawan, H. 2015. *Lingkaran, Menguak Misteri Bilangan, Bangun Datar dan Bangun Ruang Terkait dengan Lingkaran*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Herhyanto, N., & Gantini, T. 2009. *Pengantar Statistika Matematis*. Bandung: Yrama Widya.
- Hogg, R. V., McKean, J., & Craig, A. T. 2005. *Introduction to mathematical statistics*. Pearson Education.
- Kadir. 2015. *Statistika Terapan*. Jakarta: PT Raja Grafindo Persada.
- Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan. 2018. *Sejarah dan Filsafat Matematika*. Jakarta: Kementerian pendidikan dan kebudayaan.
- Leithold, L. 1988. *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik* (alih bahasa Hutahaean). Jakarta: Erlangga
- Lestari, I. 2018. *Pengembangan bahan ajar matematika dengan memanfaatkan GeoGebra untuk meningkatkan pemahaman konsep*. GAUSS: Jurnal Pendidikan Matematika, 1(1), 26-36.

- Mauladaniyati, R., & Widodo, S.A. 2020. *Geometri Analitik Ruang*. Yogyakarta: Matematika.
- Mursita, D. 2011. *Matematika untuk Perguruan Tinggi*. Bandung : Rekayasa Sains.
- Nursiyono, J.A., & Safitri, J. 2014. *Mengenal Integral Lebih Dekat*. Bogor : In Media.
- Pashaev, O. K., & Parlakgörür, T. 2017. *Apollonius Representation of Qubits*. arXiv preprint arXiv:1706.05399.
- Pinem, D. 2015. *Kalkulus untuk Perguruan Tinggi*. Bandung : Rekayasa Sains.
- Pradyumnati, R. M. tt. *Irisan Kerucut: Pengayaan Matematika SMA*. Lampung: UIN Raden Intan.
- Purcell, E.J. & Varberg, D. 2003. *Kakulus dan Geometri Analitik* Jilid 1. Jakarta: Erlangga.
- Rizki, N. A. 2018. *Geometri Analitik*. Samarinda: Universitas Mulawarman.
- Rory, R., & Diana, R. 2020. *Pemodelan Data Covid-19 Menggunakan Regresi Polinomial Lokal*. In Seminar Nasional Official Statistics (Vol. 2020, No. 1, pp. 91-98).
- Spiegel, M. R. 1996. *Statistika Edisi Kedua* (alih Bahasa I Nyoman Susila & Ellen Gunawan). Jakarta: Erlangga.
- Stewart, J. 2012. *Multivariable Calculus*. California: Brook Cole Cengage.
- Stewart, J. 2018. *Single Variable Calculus: Concepts and Contexts, Enhanced Edition*. California: Brook Cole Cengage.
- Subanar. 2013. *Statistika Matematika*. Yogyakarta : Graha Ilmu.
- Sukmadewi, T.S. 2020. *Modul Matematika Umum Kelas XI KD 3.10*. Jakarta: Direktorat Jenderal PAUD, DIKDAS dan DIKMEN.
- Sukino. 2013. *Matematika untuk SMA/MA Kelas XI kelompok wajib semester 2*. Jakarta: Erlangga.
- Sukino. 2013. *Matematika untuk SMA/MA Kelas XI peminatan matematika dan Ilmu alam*. Jakarta: Erlangga.
- Suyitno, A. 2016. *Guru Pembelajar: Modul Matematika SMA Kelompok Kompetensi E*. Jakarta: Direktorat Jendral Guru dan Tenaga Kependidikan.
- Walpole, R. E. 1992. *Pengantar Statistika*. Jakarta: PT Gramedia Pustaka Utama.
- Wardiman. 1982. *Hitung Integral*. Yogyakarta: Hanindita.
- Walpole, R. E. & Myers, R. H. 1986. *Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuwan*. Bandung: ITB.
- Wirodikromo, S. 2001. *Matematika Untuk SMA kelas XI*. Jakarta: Erlangga.
- Varberg, D., Purcell, E.J., & Rigbton, S. E. 2010. *Kakulus Jilid 1*. Jakarta: Erlangga.
- Yunita, A., & Hamdunah. 2017. *Modul Geometri Analitik*. Padang: Rumahkayu Pustaka Utama.

Indeks

- A**
aplikasi limit fungsi vi , 128, 147
aplikasi turunan 128
asimtot vi , 128, 147
aturan rantai vi , 128, 147
- B**
binomial vi , 128, 147
- D**
definisi limit fungsi 79, 83, 115,
definisi lingkaran 19
definisi turunan fungsi 113,
distribusi binomial 4, 5, 203, 205, 211, 212, 213, 214, 215, 230, 235
distribusi normal 203, 205, 221, 222, 223, 232, 235
distribusi seragam 203, 205, 207, 208,
- E**
elips 3, 4, 5, 15, 17, 18, 46, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 61, 64, 72, 73, 76, 235, 236,
- F**
fungsi distribusi 207, 212, 213, 215, 221, 235,
fungsi kontinu 89, 90, 91, 92, 113, 184, 235,
fungsi naik 134, 135, 137, 138, 139, 140,
fungsi turun 134, 135, 137, 138, 139, 140,
- G**
garis singgung lingkaran 15, 17, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 68, 72, 74, 75,
- H**
hiperbola 4, 5, 15, 17, 18, 46, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 72, 76, 235,
- I**
integral 3, 4, 5, 157, 159, 160, 161, 162, 164, 166, 167, 169, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 186, 188, 190, 192, 193, 196, 199, 235,
- K**
kedudukan dua lingkaran 17, 68, 69, 71, 72,
kedudukan titik terhadap lingkaran 17, 25, 26, 31, 38, 69,
kemiringan 35, 40, 41, 43, 44, 72, 73, 74, 90, 91, 113, 114, 115, 128, 129, 130, 132, 133, 135, 235,
konsep turunan fungsi 111, 129,
- L**
limit 97, 98, 99, 104,
limit fungsi aljabar 79, 84, 91, 149,
limit fungsi trigonometri 97, 98, 99, 104,
lingkaran 3, 4, 5, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 68, 69, 70, 71, 72, 74, 75, 96, 169, 170, 235, 236,
- N**
nilai balik maksimum 141, 143, 144, 145,
nilai balik minimum 142, 143, 144, 145,
nilai harapan 4, 5, 203, 205, 212, 214, 215, 217, 219, 223, 224, 225, 226,
nilai harapan distribusi binomial 4, 5, 203, 214,
nilai harapan distribusi normal 203, 223, 231, 232, 235,
- P**
parabola 3, 4, 5, 15, 17, 18, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 55, 59, 60, 63, 72, 75, 76, 130, 131, 132, 151, 236,
penerapan integral 159, 192, 193,
penulisan turunan fungsi 159, 192, 193,
persamaan garis singgung lingkaran 159, 192, 193,
persamaan garis singgung pada kurva 159, 192, 193,
persamaan lingkaran 159, 192, 193,
- S**
sifat-sifat limit fungsi 77, 84, 85, 92, 97, 116, 117, 122,
sifat-sifat turunan fungsi 111, 113, 116, 117, 122,
- T**
titik balik maksimum 140, 141, 143, 144, 236,
titik balik minimum 140, 141, 143, 144, 236,
titik belok 140, 141, 143, 144, 236,
titik ekstrim 140, 141, 143, 144, 236,
titik fokus 140, 141, 143, 144, 236,
titik singgung 140, 141, 143, 144, 236,
titik stasioner 140, 141, 143, 144, 236,
turunan fungsi aljabar 140, 141, 143, 144, 236,
turunan fungsi trigonometri 140, 141, 143, 144, 236,
- U**
uji turunan kedua 140, 141, 143, 144, 236,
uji turunan pertama 140, 141, 143, 144, 236,

Profil

Penulis

Wikan Budi Utami, M.Pd

E-mail : wikanbudiutami27@gmail.com
Alamat Kantor : FKIP Universitas Pancasakti Tegal
Jl.Halmahera KM1 Kota Tegal
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika



Riwayat pekerjaan/profesi

2010-2015 Guru Matematika di SMP
2010 Guru Matematika di SMK
2012-sekarang Dosen Pendidikan Matematika FKIP Universitas Pancasakti Tegal

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar

2010 S2: Pendidikan Matematika, Universitas Sebelas Maret Surakarta
2006 S1: Pendidikan Matematika, Universitas Pancasakti Tegal

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir)

2019 - Mozaik Matematika 1: Buku Pengayaan dan Penilaian SMA/MA kelas XII Program Wajib
2019 - Mozaik Matematika 2: Buku Pengayaan dan Penilaian SMA/MA kelas XI Program Wajib
2019 - Mozaik Matematika 3: Buku Pengayaan dan Penilaian SMA/MA kelas X Program Wajib
2020 - Mozaik Matematika SMA/MA kelas XII Peminatan MIPA.
2020 - Mozaik Matematika SMA/MA kelas XI Peminatan MIPA.
2020 - Mozaik Matematika SMA/MA kelas X Peminatan MIPA.
2021 - Asesmen Pembelajaran Matematika SMA/MA Kelas X.
2021 - Asesmen Pembelajaran Matematika SMA/MA Kelas XI.
2021 - Asesmen Pembelajaran Matematika SMA/MA Kelas XII.

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir)

Judul Penelitian dan Publikasi dapat dilihat pada:

<https://scholar.google.com/citations?hl=id&user=PfU3Tt0AAAAJ>.

<https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=57211280805>.

Penulis

Dr. Sri Adi Widodo, M.Pd.



Email : sriadi@ustjogja.ac.id
Alamat Kantor : Pendidikan Matematika,
Universitas Sarjanawiyata Tamansiswa,
Jalan Batikan UH III/1043, Tuntungan,
Yogyakarta
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika

Riwayat Pekerjaan/Profesi

2005-2010 Guru Matematika di SMK
2009-sekarang Dosen Pendidikan Matematika,
Universitas Sarjanawiyata Tamansiswa, Yogyakarta

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar

2016 S3: Pendidikan Matematika, Universitas Pendidikan Indonesia
2008 S2: Pendidikan Matematika, Universitas Sebelas Maret Surakarta
2001 S1: Pendidikan Matematika, Universitas Sarjanawiyata Tamansiswa,
Yogyakarta

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir)

2015 Metode Numerik. Yogyakarta: Graha Ilmu.
2019 Relationship of Anxiety Levels, Motivation, and Achievement Case
Study of Mathematics Education Students at One of the Universities in
Yogyakarta. In *Achievement Motivation: Perspectives, Influences And
Outcome*. NY; Nova Publisher.
2020 Union: Dari Lokal Ke Nasional. In *Kiat Mengelola Jurnal Pendidikan
Matematika: Curahan Hari Para Editor*. Yogyakarta: UAD Press.
2020 Geometri Analitik Ruang. Yogyakarta: Matematika.

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir)

Judul Penelitian dan Publikasi dapat dilihat pada:
<https://scholar.google.com/citations?hl=id&user=CobzRdUAAAAJ>.
<https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=57196328078>.

Penulis

Fitria Sulistyowati, M.Pd.

Email : fitria.sulistyowati@ustjogja.ac.id
Alamat Kantor : Pendidikan Matematika,
Universitas Sarjanawiyata Tamansiswa,
Jl. Batikan Tuntungan,
Umbulharjo UH III/1043



Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika

Riwayat Pekerjaan/Profesi

2014 – 2017 Tentor Matematika di Primagama
2018 – sekarang Dosen Program Studi Pendidikan Matematika
FKIP Universitas Sarjanawiyata Tamansiswa

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar

2016 S2: Pendidikan Matematika, Universitas Sebelas Maret Surakarta
2010 S1: Pendidikan Matematika, Universitas Muhammadiyah Purworejo

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir)

Judul Penelitian dan Publikasi dapat dilihat pada:

<https://scholar.google.com/citations?hl=id&user=aVvthBgAAAAJ>.

<https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=57196244925>.

Penelaah

Prof. Dr. Sunardi, M.Pd

Email : sunardi.fkip@unej.ac.id
Alamat Kantor : FKIP Universitas Jember, Jl. Kalimantan nomor 37 Jember
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika

Riwayat pekerjaan/profesi

1983 – sekarang Dosen Program Studi S1 dan S2 Pendidikan Matematika
FKIP Universitas Jember
2016 – sekarang Dosen Penguji Disertasi S3 Program Studi Pendidikan
Matematika di Universitas Negeri Malang dan Universitas
Negeri Surabaya
2007 –2016 Ketua Panitia Pelaksana Sertifikasi Guru Rayon 16
Universitas Jember
1981 – 1985 Guru Matematika di SMA

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar

S3: Pendidikan Matematika, Universitas Negeri Surabaya tahun masuk 1999
S2: Pendidikan Matematika, IKIP Malang tahun masuk 1992
S1: Pendidikan Matematika, IKIP Malang tahun masuk 1977

Judul Buku yang Pernah Ditelaah/Editor (10 tahun terakhir)

2019 Buku Guru dan Buku Peserta didik Matematika Untuk Program Peminatan
SMA/MA Kelas X
2021 Buku Guru dan Buku Peserta didik Matematika SMA/SMK Kelas X
2018 Buku Guru dan Buku Peserta didik Matematika SMP/MTs Kelas VII
(Editor)
2018 Matematika Fisika 1
2018 Matematika Fisika 2
2016 Strategi Belajar Mengajar IPA

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir)

2018 Penalaran Matematika, Himpunan, Relasi dan Fungsi
2014 Teori dan Soal-Soal Geometri Analitika Bidang
2012 Strategi Belajar Mengajar Matematika
2011 Model of Teaching and Learning

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir)

Judul Penelitian dan Publikasi dapat dilihat pada
<https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=57193683524>.

Penelaah

Dr. Kiki Ariyanti Sugeng

Email : kiki@sci.ui.ac.id
Alamat Kantor : Kampus UI Depok, 16424
Bidang Keahlian : Matematika

Riwayat pekerjaan/profesi

1989 - sekarang Dosen Universitas Indonesia

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar

2006 S3: Matematika, Federation University (a/n Univ. of Ballarat), Australia.

1987 S2: Matematika, Institut Teknologi Bandung.

1985 S1: Matematika, Universitas Indonesia.

Judul Buku dan Tahun Terbit

2014 Teori Graf dan Aplikasinya

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir)

1. Sugeng, K.A., Silaban, D.R., Bača, M., Semaničová-Feňovčíková, A., Local inclusive distance verteX irregular graphs, *Mathematics*, 9(14) (2021), 1673
2. Lu, J., Peng, J., Chen, J., Sugeng, K.A., Prediction method of autoregressive moving average models for uncertain time series , *International Journal of General Systems* , 49(5) (2020), pp. 546–572.
3. Septiyanto, F. Sugeng, K.A., Rainbow connection number of generalized composition, *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*, 17(1)(2020), pp. 367–372.
4. Utami, B., Sugeng, K.A., Utama, S., On inclusive d-distance irregularity strength on triangular ladder graph and path, *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics* , 17(3)(2020), pp. 810–819.
5. Hendy,, Mudholifah, A.N., Sugeng, K.A., Bača, M., Semaničová-Feňovčíková, A., On H-antimagic decomposition of toroidal grids and triangulations, *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*, 17(3)(2020), pp. 761–770.
6. Bong, N., Bača, M., Semaničová-Feňovčíková, A., Sugeng, K.A., Wang, T.-M., Local Face Antimagic Evaluations and Coloring of Plane Graphs, *Fundamenta Informaticae*, 174(2 (2020), pp. 103–119.
7. Arumugam, S., Bača, M., Marr, A., Semaničová-Feňovčíková, A., Sugeng, K.A., Note on in-antimagicness and out-antimagicness of digraphs, *Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography*, 2020 (in press).

Ilustrator

Fatoni Budi Darmojo, S.Tp

Email : fatonybudidarmojo@yahoo.co.id
Bidang Keahlian : ilustrator

Riwayat pekerjaan/profesi

2011-2018 : Kepala Quality Control PT MAGP Group
2018-2020 : HRD Staff PT Ganesha Abaditama
2020-sekarang : Freelance ilustrator

Riwayat Pendidikan:

S1 Teknologi hasil pertanian Universitas Jambi masuk 2003

Editor

Legina Aditya, S.Si

Email : legina.aditya@gmail.com
Alamat Kantor : PT. Sumber Mitra Agung Jaya, Jakarta
Bidang Keahlian : Editing

Riwayat pekerjaan/profesi

Editor dan product specialist 2011-sekarang

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar

S1 Biologi FMIPA, Universitas Indonesia , Tahun 2007

Judul Buku dan Tahun Terbit

Buletin Summit Lipid Update Edisi Tahun 2013 s.d. Tahun 2018

Desainer

Hasbi Yusuf

Email : abi.yusuf09@gmail.com
Bidang Keahlian : Desainer

Riwayat Pekerjaan

- Desainer & Ilustrator RSL Award
- Desainer & Ilustrator SD Menara St. Martinus Makasar

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

2018 Pianika Method
2018 Syllabus Trumpet
2018 Syllabus Mellophone
2018 Syllabus Baritone
2018 Syllabus Snare Drum
2018 Syllabus Keyboard Percussion
2018 Syllabus Drill Design
2018 Syllabus Colour Guard
2020 Buku Panduan Guru Seni Musik untuk SMP Kelas VII
2021 Buku Panduan Guru Seni Musik untuk SD Kelas IV
2021 Buku Panduan Guru Seni Musik untuk SMP Kelas VIII